



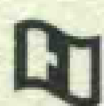
总主编　李其维　赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

第九卷（上）

本卷主编　朱莉琪


河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS



总主编 李其维 赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

（第九卷）

Volume Nine

可能性、必然性范畴及空间、几何(学)和概率概念的个体发生

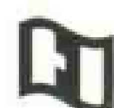
（上）

The Categories of Possibility and Necessity, and the Conceptions of Space, Geometry and Chance

（Part Ⅰ）

主 编 朱莉琪

副主编 衣新发 谢英香



河南大学出版社

HENAN UNIVERSITY PRESS

·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

皮亚杰文集.第九卷/李其维,赵国祥总主编;朱莉琪分卷主编.—郑州:河南大学出版社,2020.9

ISBN 978-7-5649-4481-0

Ⅰ.①皮…　Ⅱ.①李…②赵…③朱…　Ⅲ.①皮亚杰(Piaget, Jean 1896—1980)—文集　Ⅳ.①B84—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 190622 号

责任编辑　纪庆芳　卢志宇　宋小放
责任校对　时二凤

出　版　河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中化大厦 2401 号　　邮编:450046
电话:0371—86059701(营销部)　　网址:hupress.henu.edu.cn
排　版　河南瑞之光印刷股份有限公司
印　刷　河南瑞之光印刷股份有限公司
版　次　2020 年 12 月第 1 版　　印　次　2020 年 12 月第 1 次印刷
开　本　787 mm×1092 mm　1/16　　印　张　85.75
字　数　1828 千字　　定　价　645.00 元



李其维，1943 年生，江苏滨海人，华东师范大学终身教授；享受政府特殊津贴；曾任上海市心理学会理事长、中国心理学会副理事长。现为中国心理学会会士、上海市心理学会名誉理事长。加拿大维多利亚大学访问学者（1990–1991）、瑞士日内瓦大学高级访问学者（1999–2000），并受聘为日内瓦大学“皮亚杰文献档案馆基金会国际委员”（International Associate of the Foundation of Archives Jean Piaget）。

曾任《华东师范大学学报（教育科学版）》副主编（1996–2015）、中国心理学会《心理科学》主编（2009–2017）。

发表的主要论文：《对研究形式运算的“组合系统”和 INRC 群的方法论探讨》（《心理学报》，1989），《“认知革命”与“第二代认知科学”刍议》（《心理学报》，2008），《心理学的立身之本——“心理本体”及心理学元问题的几点思考》（《苏州大学学报（教育科学版）》，2019）。出版的专著：《论皮亚杰心理逻辑学》（1990）、《破解“智慧胚胎学”之谜：皮亚杰的发生认识论》（1999）；共同主编《皮亚杰发生认识论文选》（1991）；主持翻译“皮亚杰发生认识论精华译丛”（2005）和“当代心理科学名著译丛”（华东师范大学出版社，1999 年起）；共同主持翻译《儿童心理学手册（第 6 版）》（华东师范大学出版社，2009），并获第二届中国出版政府奖图书提名奖（2010）。

获国家教委和国务院学位办授予“做出突出贡献的中国博士学位获得者”称号（1991）、中国心理学会终身成就奖（2015）、中国科协全国优秀科技工作者荣誉称号（2016）。



赵国祥，博士、二级教授，河南大学、河南师范大学博士生导师。先后在华中师范大学、河南大学、华东师范大学获得学士、硕士、博士学位；1999 年 9 月至2001 年 9 月，在中科院心理所博士后流动站做研究工作。自2002 年 4 月起，先后担任河南大学教育科学学院院长、河南大学副校长、河南大学常务副校长（正校级）、河南师范大学党委书记，第十三届全国人大代表。先后兼任中央组织部领导干部考试与测评中心专家组成员、教育部高等学校心理学教学指导委员会委员、教育部普通高等学校学生心理健康教育专家指导委员会委员、教育部中小学生心理健康教育专家指导委员会委员、中国心理学会候任理事长（2020）、河南省心理学会理事长、《心理研究》杂志主编；被评为享受国务院政府特殊津贴专家。

学术研究主攻方向：管理心理学与人力资源管理、心理健康教育。在《心理学报》《心理科学》《AIDS Care》等国内外学术刊物上发表论文 80 余篇；在中国社会科学出版社、高等教育出版社等出版《心理学概论》《管理心理学》《领导者个性论纲》《领导艺术》《领导心理研究》《管理心理学高级教程》《现代大学生心理健康教程》等 19 部专著、教材；承担国家级、国际合作、省部级科研课题 14 项；获国家级、省部级科研、教学优秀成果奖 12 项。

《皮亚杰文集》编委会

《皮亚杰文集》出版委员会

谨以本文集敬献
中国皮亚杰理论传播和研究的先驱者

艾　伟、高觉敷、黄　翼、左任侠、朱智贤、刘　范、卢　濬、胡士襄、
曹传詠、傅统先、朱曼殊、李伯黍、吴福元、李　丹、吕　静
等诸位前辈



总目

序　一　（Marc Ratcliff）

序　二　（Leslie Smith）

序　三　（李其维）

第一卷　皮亚杰自传、访谈及皮亚杰理论自述

第二卷　皮亚杰思想的认识论与方法论

第三卷　心理发生及儿童思维与智慧的发展

第四卷　从动作到觉知——儿童对世界的认知及个体意识发展

第五卷　知觉与符号功能的发展

第六卷　智慧操作的建构过程

第七卷　皮亚杰心理逻辑学

第八卷　数、因果性范畴及时间与某些物理概念的个体发生

第九卷　可能性、必然性范畴及空间、几何(学）和概率概念的个体发生

第十卷　皮亚杰理论的应用——教育及其他

走近皮亚杰　继学有来者——代《皮亚杰文集》后记（赵国祥）

出版说明

一、文集收录了皮亚杰公开出版或发表的著作、研究报告、演讲和回忆录,以及有关皮亚杰学术活动的采访记录。部分卷次在其附录中收录了少量其他学者对皮亚杰理论所做的述评。全部附录文本量占文集总量的3%左右。

二、文集对所循译的原初文本的选择方案是:原文为英文的或已有较成熟的英译版本的文本,从英文译为中文;原文为法文且未有英译本或英译本内容不完整的,从法文译为中文并保持文本的完整性。

三、曾经再版或经多次转载收录的文献,文集大多收录最近版本,并注明历次再版或转载的信息;少数文本虽有再版却没有实质性改动,为体现原始文献的完整性,酌情选择较早版本。

四、文集按照文本研究主题分别成卷,每一卷中各文本的排列顺序首先参照其主题之间的逻辑关联,并兼顾出版时间,综合考量以进行编排。

五、有少数英译本和法文原文标题不一致的文本,中译本参照所循译版本的表达。

六、原文引文部分、参考文献、脚注或尾注,在翻译时尽量保持原貌。

七、所涉及人名参照《世界人名翻译大辞典》(中国对外翻译出版公司,1993年版)做统一校订。已有中译本的文本,在收入文集时,也对其中译法不一致的人名、地名进行了统一校订。

八、原文作者的国籍按其当时所供职的学校、机构所在国家为准做标注。

九、文集校订并规范了一些学术用语的译法,如"格式"(schème, schèmes)和"图式"(schéma, schémas)在之前的英译本中被混淆为schema,在中译本中多被混淆为"图式",在文集中对这两个概念做了精确的区分和辨析;accommodation之前多被译为"顺应",文集中统一为"顺化",以与其同位概念"同化"(assimilation)及上位概念

“适应”(adaptation)有更好的对应和区分。

十、译者或编者勘校的原文笔误,统置页末脚注加以说明。

十一、对原文中的“主要人名索引”和“主要术语索引”做中英或中法对译,并尽量保持原貌。

《皮亚杰文集》虽未能收集皮亚杰的全部著述(所缺特别是皮亚杰用西班牙语和意大利语著述的少数文本,以及极少一部分无法获得版权的文本),但所收录文本覆盖了皮亚杰理论的各相关领域具有充分代表性的重要著作,这使得《皮亚杰文集》在体现皮亚杰理论体系的学术价值和整体性的意义上是完整的。

卷目

上卷

导读/1
儿童的空间概念/5
儿童的几何学概念/441

下卷

儿童概率概念的起源/807
可能性与必然性/977

附录

论皮亚杰的必然性/1267
皮亚杰论变化和选择模型:结构主义、逻辑必然性与互动论/1293
可能、不可能与必然/1329
论必然性/1347

导 读

尽管皮亚杰本人认为自己是一位自然科学家，而不是心理学家，但他却被公认为20世纪最伟大的发展心理学家。他的思想至今仍然是儿童心理学的基础。皮亚杰关于发展心理学和发生认识论的研究有一个独特的目标，即知识是如何获得和增长的。他的答案是，知识的增长是一种逐步构建的逻辑嵌入结构，通过将较低的、不那么强大的逻辑系统纳入到更高和更强大的逻辑系统，直到成年。因此，儿童的逻辑和思维方式最初与成人完全不同。

以往人们认为智力发展要么反映了内在能力要么反映环境影响，皮亚杰理论的原创性在于他拒绝了这两种观点，提出了第三种主张，即介于先天论和经验主义之间的建构论。他指出个体活动和动作的重要性。比如本卷中儿童的空间直觉是对客体采取的动作，动作超越客观的局限并且形成运算格式。空间概念则是内化的动作，不仅包含对外部事物、事件或是对动作结果的心理表象，也包含主动的对未来动作的预期。以直线概念为例，这是我们熟知的一个基本的数学概念。儿童在很早的时候就已经感知到了直线，但这个概念的真正习得则需要儿童在射影空间或坐标轴系统中将物体联系起来，儿童在想象或画出一条直线时需要事先假定一个射影空间或欧几里得空间，这样他们才能够用眼睛和手做出直线形状的运动。皮亚杰认为，在智力活动中，人们的头脑与现实或现实的表征是交互作用的。

建构论的一个难题是，更强大的系统是如何从不太强大的系统中产生的。皮亚杰对认知系统稳定和变化的解释是"平衡"。任何阶段的知识都是暂时的平衡，会被新的可能性打破。他强调过程和认知结构发展中可能性的作用。皮亚杰认为，可能性为新出现的运算发展提供了原材料。另外一个与运算发展有关的概念是必然性。运算是由可能性和必然性合成构成的。可能性导致分化，必然性导致整合。可能性和必然性是区别于现实性的。皮亚杰认为知识的产生源于主体对客体的动作。可能性和必然性是主体自主活动的产物。后期的建构论强调头脑中的无限的可能性，同时也提出其制约来自只有某些可能性能真正实现。强调知识发展中可能性的作用即是强调主体在构建知识中的自主性。皮亚杰认为，知识获得取决于主体的认知机制而非社会环境。

本卷收录皮亚杰可能性、必然性范畴及空间、几何(学)和概率概念的个体发生的相关研究。皮亚杰的范畴是以充分性和必要性为标准定义的，他对范畴的解释是逻辑解释，不同于以案例和包含成分为标准的范畴，后者被称为原型解释(prototype interpretation)。读者阅读本卷可以体会皮亚杰对儿童这些范畴知识掌握和增长的论点

和论述。

本卷包括四本著作和四篇附录文章。

《儿童的空间概念》法文版出版于1948年,英文版出版于1956年。皮亚杰和英海尔德通过对构成儿童空间概念基础要素(例如速度、运动和时间的概念,对位置移动的理解以及对外部物体不同类型的操作等)的研究,在人类历史上首次清晰地刻画了儿童空间概念形成及发展过程。作者在书中详细阐述了三个部分的内容:儿童理解拓扑空间、投射空间和从投射空间到欧几里得空间的过渡。这三部分内容的编排顺序也正是儿童空间概念发生、发展的顺序。作者特别指出,在儿童掌握投射空间概念和欧几里得空间概念之前的很长一段时间,儿童空间概念的形成是从对简单的拓扑空间的理解开始的。该著作各部分的内容梗概如下:在第一部分,作者对儿童空间知觉、表象空间知觉、对形状的触觉感知、"图画空间"以及线和圆的概念发展顺序等进行了详细的阐述;在第二部分,作者重点说明了儿童如何理解投射线和投射图、影子投射、投射图形的协调与整合、几何部分、平面和旋转等;在第三部分,作者分别从儿童理解菱形与平行线、三角形与长方形、参照系统与坐标系、"直觉"空间等方面回答了儿童是如何从投射空间过渡到欧几里得空间的。

《儿童的几何学概念》论述儿童是如何进行测量的。这个问题不仅会引起数学家和哲学家的浓厚兴趣,更是心理学家和儿童教育工作者关心的问题。测量是一个复杂的问题。虽然现代认知发展研究发现幼儿也可以进行简单的测量,比如用步长粗略表征距离,但皮亚杰发现直到8—11岁时儿童才能够完全理解。皮亚杰和他的同事们发现,测量相关的问题也与儿童恒常性的发展紧密相关,是儿童认知发展中的里程碑式发展任务。该著作中的研究采用了系统化的、细致深入的访谈研究方法,揭示了不同年龄儿童测量的发展水平和阶段。书中第一部分探讨了儿童对测量任务的自发性反应和对位置变化的表征;第二部分探讨了儿童对守恒和长度的测量;第三部分是角度和曲线测量;第四部分主要是讨论面积和体积的相关测量问题;最后一部分是对空间测量学概念主要发展水平的回顾。需要指出的是,皮亚杰和他的同事们考察的是儿童在正式接受数学教育前的自发测量反应。了解儿童的自发概念和认知结构,对于教育工作者有针对性地因材施教具有重要意义。

《儿童概率概念的起源》是皮亚杰与其主要合作者英海尔德合著的一本关于儿童思维发展的经典之作,从心理运算的视角系统、精确地分析了儿童概率概念的缘起与发展,并探讨了概率概念形成的条件及基本特点。他们指出,概率是心理运算的副产品,而心理运算可以使我们精确地研究儿童概率概念的形成与发展。在内容的安排上,实验与理论并重,既设计了不同年龄段儿童思维发展的清晰案例,又对实验结果进行了翔实的理论解读。这本著作包括三个部分,每部分都包含三个章节。第一部分,以自然界常见的物理现象为例,探讨儿童概率概念的形成;第二部分,以随机话题和特殊话题为例,研究从儿童对概念的理解转向儿童对可能性/概率的量化;第三部分,考察儿童组合

(包括组合、转置、排列)运算的发展。研究认为:概率概念形成于儿童早期阶段,经历了4—7岁、7—11岁、11—12岁三个阶段的发展;儿童在不同阶段对概念的理解存在不同程度的缺失。

我们知道,思维和认知过程是不能被直接观察的,所以我们是通过儿童的可观察的行为来推论他们的思维过程和认知结构。皮亚杰认为,证明儿童头脑中结构存在的最好证据是儿童认为哪些事情是可能的、不可能的或者必需的。《可能,不可能与必然》这篇文章分别讨论了儿童对"可能""不可能"和"必然"三个概念的理解方式,并试图通过感知运动运算、表象运算和符号运算等儿童认知发展阶段中的不同认知格式的变化来解释儿童对三个概念理解的发展特征。作者陈述了儿童发展的三个阶段:第一个是无差别阶段,在这个阶段,真实体现为伪——必然性而同时可能性则被限定在最容易预测的发展趋势之中;第二个是区别化阶段,其中,可能性和必然性都被从简单的"事实"中分离出来,它们会在数量上逐渐增加;最后一个阶段是整合化阶段,在该阶段,可能性、必然性和结构性等观念形成综合。对儿童认知格式发展的梳理是这篇文章的中心议题。

在《皮亚杰论变化和选择模型:结构主义、逻辑必然性与互动论》一文中,皮亚杰并不认为随机试验和错误模型或变化和选择模型具有充分性。相反,他认为,为了解释进化和发展的事实,需要进行基于目的性的自动调节。这个所谓目的性的必然性一直是其模型的一个有争议和被普遍反驳的方面——特别是在其进化学说上。然而,必然的目的性并不是皮亚杰思想的一个孤立的部分,而是由贯穿皮亚杰所有著述中的两个中心力量的深层驱动:围绕他关于知识本质的结构主义假设所组织的一系列假设,以及逻辑必然性的关键认识论问题。然而,结构主义被证明是皮亚杰认识论的一个具有严重缺陷的基础,并且是皮亚杰著述中许多不充分和错误立场的中心——关于认识论、进化甚至必然性本身的立场,他概述了另一种知识概念——互动论——为必然性提供了相应的替代方法。

在《论必然性》中,必然性被认为与主体格式的解释相关,它产生自一种心理发生的观点,包括多次提到的科学思想史。必然性的形成阶段平行于"可能性"的形成阶段,在心理发生期间每个阶段均为另一个阶段提供支持,这可以被解释为一种接近(新的可能性)与闭合(在作为必然性之基础的系统中)的交替。此外,必然性的力量随其发展阶段而增强,必然性的演变与"可能性"的演变一起,构成了决定运算结构形成的总体框架。

皮亚杰对知识发展所作的解释,遭到来自哲学界的反对,他们认为皮亚杰的解释将必然性与经验问题混为一谈。在莱斯利·史密斯(Leslie Smith)的评述文章《论皮亚杰的必然性》中,作者区分出皮亚杰在其解释中使用必然性这一概念的三种不同方式,分别为必要条件(necessary conditionship)、演绎的必然性(deductive necessity)和建构的必然性(constructive necessity),指出皮亚杰对知识增长的解释提供了必要而非充分的条件和经验而非逻辑的条件。但通常情况下,心理学家根本不讨论皮亚杰所述关系的性质,他们

默认皮亚杰的解释提出了充分条件。本文为评价哲学和心理学对皮亚杰所作解释的批评意见提供了解释性价值。一个解释能够引起跨学科的推敲,这对哲学和心理学的贡献都是显著的。事实上,皮亚杰所作解释的主要吸引力可能就是它允许跨学科审视的能力。

皮亚杰的以上著作系统描述了儿童的空间、几何学和概率概念的发展,体现了他的阶段论和结构论的思想:儿童的点、线、面、透视、测量、概率等概念的发展都经历了类似的发展阶段,证明了心理发展的普遍阶段和顺序。这些概念也是儿童在后期接受正式学校教育时需要习得的概念。儿童的发展和学习从来都是不可分割的概念。很多学习理论认为学习是发展的来源,发展是学习的结果。在皮亚杰看来,学习是从属于发展的,学习是更高水平知识重组的结果。发展是自发的过程, 学习则是由情境引发的过程。不能由学习揭示发展,而应由发展来揭示学习,学习是发展的函数。发展必须达到某个水平,才会有相应的学习。皮亚杰区分了两种学习,一种发生在信息获得中,另一种是发生在平衡中。因而皮亚杰的研究也有实际应用上的重要价值。对教师而言,只有了解儿童发展,才能促进儿童学习。教学如果能够遵循儿童思维和概念的发展规律,这种教学就会起到事半功倍的效果。比如概率概念,我国学校正式的概率教学一般是在初中开始,排列组合概念在高中数学课本中正式呈现。然而儿童在接受正式的教学前已经对这些概念有一些自发的认识,了解儿童头脑中的自发概念,才能做到因材施教。

朱莉琪
2020 年 6 月 20 日

儿童的空间概念

〔瑞士〕让·皮亚杰　〔瑞士〕巴蓓尔·英海尔德　著
衣新发等　译

儿童的空间概念

法文版　*La Représentation de l' Espace chez l' Enfant*, Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

作　者　Jean Piaget, Bärbel Inhelder

英文版　*The Child' s Conception of Space*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1956.

英译者　F. J. Langdon, J. L. Lunzer

衣新发等　译自英文

内容提要

本书法文版出版于1948年，英文版出版于1956年。皮亚杰和英海尔德通过对构成儿童空间概念基础要素（例如速度、运动和时间的概念，对位置移动的理解以及对外部物体不同类型的操作等）的研究，在人类历史上首次清晰地刻画了儿童空间概念形成及发展过程。作者在书中详细阐述了三个部分的内容：儿童理解拓扑空间、投射空间和从投射空间到欧几里得空间的过渡。这三部分内容的编排顺序也正是儿童空间概念发生、发展的顺序。作者特别指出，在儿童掌握投射空间概念和欧几里得空间概念之前的很长一段时间，儿童空间概念的形成是从对简单拓扑空间的理解开始的。该著作各部分的内容梗概如下：在第一部分，作者对儿童空间知觉、表象空间知觉、对形状的触觉感知、"图画空间"以及线和圆概念的发展顺序等进行了详细的阐述；在第二部分，作者重点说明了儿童如何理解投射线和投射图、影子投射、投射图形的协调与整合、几何部分、平面和旋转等；在第三部分，作者分别从儿童理解菱形与平行线、三角形与长方形、参照系统与坐标系、"直觉"空间等方面回答了儿童是如何从投射空间过渡到欧几里得空间的。

衣新发

目　录

原著序言/13

英文译者注/15

中译本序言/17

第一篇　拓扑空间/21

第一章　空间知觉、空间表征和触知觉/23

第一部分　知觉或感知运动空间/25

第一节　表征前的空间知觉/25

第二节　知觉和运动:"知觉活动"的作用/31

第二部分　识别形状("触知觉")/34

第三节　依靠触知觉的形状识别:方法和整体结果/35

第四节　第一阶段:识别相似物体,然后能识别拓扑形状而不能识别欧几里得形状/38

第五节　第二阶段:对欧几里得形状识别的进步/43

第六节　第三阶段:运算协调/49

第七节　结　论/51

第二章　对绘画中基本空间关系的处理/55

第一部分　无意识绘画中的空间/57

第一节　第一阶段:综合能力的缺乏/57

第二节　第二阶段:智慧现实/59

第三节　第三阶段:视觉现实/61

第二部分　对几何图形的绘画/61

第四节　方法和一般结果/62

第五节　第零阶段:简单的韵律运动,第一阶段:辨别的开始(1A 亚阶段),闭合的弯曲形状接着出现(1B 亚阶段)/66

第六节　第二阶段:对欧几里得形状的区分/74

第七节　第三阶段:结论/81

第三章　线性和圆形顺序/83

第一节　方法和一般结果/84

第二节　第一阶段:通过物体之间的相似建立的不考虑顺序的简单直觉的对应性/85

第三节 第二阶段:有明显对应性时的顺序的直觉表征/89
第四节 第2B亚阶段:顺序的直觉对应性和圆形顺序向线性顺序的转换以及再现逆向顺序时的失败/93
第五节 第二阶段:顺序的直觉表征和从2B亚阶段向第三阶段过渡的例子以及通过尝试和错误建构逆向顺序/97
第六节 第三阶段:运算对应性与结论/100
第四章 “绳结”的研究以及“围绕”的关系/103
第一节 方法和一般结果/104
第二节 第一阶段:学会打结/107
第三节 第二阶段:可以实际复制的绳结间的部分直觉对应性/111
第四节 第三阶段:简单绳结间的运算对应性和区分“三叶草形状”的左右反手结/119
第五章 “点”的概念与“连续性”的概念/123
第一节 方法和一般结果/124
第二节 第二阶段:前运算概念/127
第三节 第三阶段:有限的运算综合和连续性的过渡反应/134
第四节 第四阶段:思维的抽象运算和连续性的综合/141
第二篇 射影空间/145
第六章 投射线和透视/147
第一部分 投射直线的构造/148
第一节 方法和一般结果/148
第二节 第一阶段和2A亚阶段:不能做出与桌子边缘平行的直线(第一阶段),或与之相独立(2A亚阶段)/150
第三节 第2B亚阶段:中介反应第三阶段:通过“瞄准”和“设定目标”形成的直线的运算结构/157
第二部分 透视图/162
第四节 方法与一般结果/163
第五节 第二阶段:不能区分(先完全后部分)不同的视角,没有透视效果的表达/166
第六节 第三阶段:主观视角与客观视角之间的运算性区分——第3A亚阶段(部分的)、第3B亚阶段(完全的)透视的无意识表现/175
第七章 影子的投射/183
第一节 方法和一般结果/184
第二节 直线的射影/185
第三节 圆盘的射影/189
第四节 长方形的射影/191

第五节 圆锥体的射影/192
第八章 透视的协调/197
第一节 方法与总体结果/198
第二节 第2A亚阶段:儿童局限于复制自己的视点/200
第三节 第2B亚阶段:过渡期的反应,尝试区分不同的视点/208
第四节 第3A亚阶段:真正的但是不完全的相对性/216
第五节 第3B亚阶段:景观的完全相对性/221
第六节 结论:视点的协调和单个透视关系的精细化/224
第九章 几何学的截面/228
第一节 圆柱、棱柱、平行六面体和中空球的横截面和纵截面/231
第二节 圆锥的截面/238
第三节 复杂物体的截面/242
第十章 旋转和面的展开/248
第一节 方法和一般结果/250
第二节 圆柱体和圆锥体/252
第三节 立方体和四面体的改变/261
第四节 结论:符号表象的本质以及投射运算与欧几里得几何运算之间的联系/268
第三篇 从射影到欧几里得空间的转换/271
第十一章 菱形的仿射变换与平行线的保留/273
第一节 方法和一般的结果/275
第二节 第2A亚阶段:没有确定形状的菱形,通过装置的无限扩大调整产生的图形/276
第三节 第2B亚阶段:菱形的逐渐建构,预期的开始,但没有对平行性和边长度的保留/279
第四节 第3A亚阶段:保留对边平行性和长度的操作性建构的开端/281
第五节 第3B亚阶段和第四阶段:关系的明确表述/283
第六节 结论:关于平行性的保留/284
第十二章 相似性和比例/287
第一部分 相似三角形/289
第一节 方法和一般结果/289
第二节 内接三角形,第2A亚阶段:对应边的不平行,第2B亚阶段:平行性的开始/293
第三节 内接三角形,第3A亚阶段:边之间平行性的建立,第3B亚阶段:维度联系的开端/298
第四节 基于角相等的相似三角形,第2A亚阶段:忽略了边的倾斜程度,第2B亚阶段:分析的第一个标志/307

第五节　基于角相等的相似三角形,第3A亚阶段和第3B亚阶段:对角度分析的进步/310
第二部分　长方形的相似/316
第六节　方法和一般结果/316
第七节　第二阶段(4—5岁至7—8岁):全局的比较导致对长度的过度估计/319
第八节　第三阶段:在知觉比较而非在作图中维度关系的直觉转换/323
第九节　第四阶段:操作性比例的一般化/329
第十节　结　论/330
附录:在开放图形中的比例/332
第十三章　参考系与水平-垂直坐标/334
第一节　方法和一般结果/337
第二节　第一阶段:在流体或固体情况下不能区分表面或平面/341
第三节　第2A亚阶段:水面平行于瓶子的底部,树木与山坡垂直/343
第四节　第2B亚阶段:中介类型的反应/348
第五节　第三阶段:水平和垂直轴的发现/355
第六节　总体参考系统的发展/364
第七节　结论:参考框架的建构/367
第十四章　示意图和村庄模型示意图/371
第一节　在一个风景模型中放一个玩偶/372
第二节　村庄模型布局:技巧和一般结果/376
第三节　第一阶段:除了一些基本的邻近关系外没有空间对应/379
第四节　第二阶段:部分协调/381
第五节　第3A亚阶段:一般射影坐标和欧氏坐标的开端/386
第六节　第3B亚阶段:对距离和比例的掌握/390
第七节　度量坐标的抽象示意图/392
第十五章　空间直觉的一般结论/394
第一节　知觉和概念空间及表象的功能/397
第二节　亚逻辑运算和连续性/401
第三节　构成基本拓扑关系的亚逻辑运算/403
第四节　由射影关系构成的亚逻辑运算/408
第五节　欧式空间中的亚逻辑运算/413
第六节　“广泛的”运算、度量运算、发展的顺序问题/418
原版索引/423
译后记/433

原著序言

基于多种原因，关于空间概念的研究，更确切地说，关于空间概念所包含的无数思想或观念的研究是儿童心理学中一项不可或缺的内容。

首先，假如儿童思维不同方面的发展状况能够告诉我们任何有关人类智能的原理机制和人类思维的本质，那么很明显关于空间的难题必然具有极高的研究价值和重要性。

哲学家和心理学家对空间本质问题的探讨和争论已经持续了几个世纪。他们一直在争论：这是否一个来源于知觉或图像的经验概念，是否思维和意识所固有的，抑或是否在特征上是可操作的等。毫无疑问，如果这里有任何需要求助于实验心理学的原因，那是因为只有关于心理发展的实际数据才能揭示空间概念发展过程中起作用的真实因素。

有个问题特别需要探索。一方面，几何学的初级读本几乎都一致把空间的基本概念表述为建立在欧几里得概念之上，例如直线、角、正方形、圆形、尺寸和其他相似的概念。这种观点似乎得到了视知觉和触觉"完形"研究结果的支持。另一方面，抽象的几何分析倾向于说明基本空间概念根本就不是欧几里得的，而是"拓扑的"。也就是说，基本空间概念完全建立在质性或"双连续"的对应关系之上，这些对应包含了诸如临近和分离、顺序和闭合的概念。我们会发现：本质上具有主动性和运算性特征的儿童空间，在成为射影或欧几里得空间之前的很长一段时间，总是以这种关系的简单拓扑类型为开端的。

毋庸讳言，另一个需要对关于空间概念发展问题进行特别关注的原因是，在这个领域的任何研究，只要足够合理和深入，都有实际应用上的重要价值。举例而言，几何学的教学如果能够遵守儿童几何思维的发展规律，这种教学就会顺畅。特别之处在于：对于我们的思维方式来说，相对于大部分所谓的"初级"教科书，儿童的思维发展过程与数学建构的历程可能更为一致。有人说，康托尔的集合理论在小学就可以很好地教授给儿童。同时，我们认为对于拓扑元素来说，情况也是一样的。

在进一步阐述问题之前，我们必须向我们"宽容的读者"(正如他之前被称呼的那样)致歉，因为接下来还有一段冗长的内容。[1]即使如此，我们必须说明：本书绝对没有穷尽我们最初的研究计划，在这之后还会有第二卷内容，它涉及度量概念以及欧几里得测量的问题[2]。简言之，有关空间认知的主题是如此之难，因此在我们觉得在能够提供

---

① 虽然我们现在只研究概念或表征的空间，而不是感觉运动空间。这在《儿童"现实"的建构》，伦敦，1955的第一章和第二章中已经讨论过。

② *La Géométrie Spontanée de l'Enfant*, Paris, 1948.

任何一个一般结论之前,必须强迫自己做大量的实验。尽管对这一特别问题的阐述和说明是我们长期以来的预期目标,但是必须首先通过对速度、运动和时间概念[1]的初步研究来解决该领域存在的问题。有关速度、运动和时间概念活动的知识,除了更容易获得,也影响或支配着人们对动作的理解,这些动作涉及位移和对物体进行的不同类型的运算,这些共同构成了空间概念的基础。

在促进这项工作完满结束的过程中,我们要特别感谢米尔·艾琳娜·斯泽明斯卡(Mlle Alina Szemińska)。斯泽明斯卡在关于空间的早期研究中给予我们很大的帮助,同时她所做实验的大量结果会出现在第二卷中。我们同样要感谢M.汉斯·阿贝利(M. Hans Aebli)为我们提供了在日内瓦的心理学实验室,同时感谢他为本书制作了插图。[2]

让·皮亚杰和巴蓓尔·英海尔德

---

① 详见《儿童时间概念的形成》(巴黎,1927)和《儿童的运动和速度概念》(巴黎,1946)。

② 为了完全做到这样,我们本应该对每一个反应都进行图示说明,如果这样那就会是现在本书大小的2倍。实际上,我们只能在每章开始的部分给出一些典型的图画进行总结说明,并附上关于个体画作的言语描述。

英文译者注

虽然以下罗列的大多数术语在文章中都有定义和解释，但在这里加以说明更有助于读者进行查阅。以下给出了这些术语的详细定义。

顺化（ACCOMMODATION）：指的是个体已经存在的格式或行为模式在环境影响下的改变。顺化和同化（q.v.）可以认为是两个相反的过程。顺化指的是环境影响导致个体的行为模式发生改变，而同化指的是环境因素被吸纳入个体原有的格式中。

仿射和仿射关系（AFFINITIES AND AFFINE RELATIONS）：仿射几何学和射影几何学不同，前者包括对平行的定义。另一方面，如果从欧氏平面几何中去除对距离和角度测量的定义，那么剩下的就是仿射几何。因此，仿射几何可以看作射影几何到欧氏几何的过渡几何。

仿射关系可以用仿射群来定义，也就是说，在仿射几何中，射影平面共线集保持直线不变，平行四边形下的仿射变换可以看作仿射关系的一个例子。

同化（ASSIMILATION）：顺化的相反过程。通过将客体加以转化的方式并与主体的格式相对应，把客体纳入到主体的行为模式中来。用皮亚杰的话来说：生物体通过顺化和同化的动态平衡来适应环境。

可展曲面（DEVELOPABLE SURFACES）：可展曲面是由立方体通过平面旋转得到的，没有任何对平面的剪切或是伸展。可展曲面不是圆柱体或锥体，也不是由空间曲线的切线构成的。

群集（GROUPING）：各种命题的组织符合集合的规律。逻辑群集包括复合（composition）、反演（inversion）、同一性（identity）、结合（associativity）等运算。与数学集合运算不同，前者在同义反复（tautology）的情况下受到限制。

因此：

1. $A + A' = B$，$B + B' = C$（复合）

2. $A - A' = B$，因此 $A = B - A'$，并且 $A' = B - A$（反演）[①]

3. $A - A = \varnothing$（同一性）

4. $A + (A' + B') = (A + A') + B'$，但是 $A + (A - A) \neq (A + A) - A$（结合）

5. $A + A = A$，因此 $A + B = B$（同义反复）

群的结构和布尔代数的半框架形式相类似，因为两个补集的交集（meet）是空集（例

① 中文版译者认为英文版此句有误，应为 $A + A' = B$；因此 $A = B - A'$，并且 $A' = B - A$（反演）。——译者注

如，$A \times A' = \varnothing$，$B \times B' = \varnothing$，等)，类似的是，两个空集的并集(join)是空集。读者如果想详尽了解这个问题，可以参考皮亚杰的《运算逻辑试论》(*Traité de Logique*)。

触觉感知(HAPTIC PERCEPTION)：原文是法语中的“srereognostique”，在英文中没有与之对等的表达。这个概念最初是1950年由里夫斯(Revesz)在《心理学和盲人的艺术》(*Psychology and Art of the Blind*，伦敦)一书中提出的，是指在视觉刺激缺失的条件下，通过触摸感受对象。

同胚(HOMEOMORPHIS)：从拓扑学的观点上讲，如果两个空间是等价的，则被定义为顺势。如果两个点集是一一对应的，就说它们是顺势的。因此，所有的闭合曲线之间都是顺势的，所有闭合的有关图形，例如方形、三角形和圆圈等这样的图形也是顺势的。

同源异形的(HOMOLOGY)：在两个几何图形的关系中，在一类里面的每一个点，另一个类中总有一点与它对应。

绳结(KNOTES)/环形绳结(OVERHAND)和三叶草形绳结(TREFOIL)：绳结被定义为使空间的任意简单闭合曲线无法再次通过的点。打环是最简单的结点，指在直线的结尾处打环并通过圆环。三叶草形结点是指末端聚集在一起的环形绳结，这里仅指为了建立接下来的环而截面被放大了的环形绳结。

逻辑乘法(LOGICAL MULTIPLICATION)：指兼顾连续两个属性的心智操作。

运算(OPREATION)：指首先进行内化的想象，然后由分化变得完整的抽象概念。例如被包含在可逆的结合中，或者以上述原则被定义的动作。对于皮亚杰来说，运算是思想最终获得的平衡。

定量(QUANTITY)、广泛的(EXTENSIVE)和精细的(INTENSIVE)：数量的广度是实际添加的重要能力，而集中程度却不是，两个实例是质量和温度。

融合(SYNCRETIC)：全局的或者未分析的整体。也就是说，在运算的样式中，整体的各个组成部分都互不关联。在之前的著作中，皮亚杰认为儿童的世界就是由融合的整体组成的，在整体中，所有的东西都相互关联，而又没有任何东西与之关联。

拓扑学(TOPOLOGY)：拓扑学是顺势的基础，也就是说，指的是除在大小和形状这些内容之外的各类空间等值。拓扑学的主要问题不是距离、角或者直线，而是连接和边界的适切性。这个几何学并不区分圆、椭圆、多边形，也不区分方形和球体。但区分的是，球体和圆托，对于任何封闭的圆环来说都与球体的部分是交界的，而圆环与圆托则不是如此。

在解决拓扑学问题的时候，最重要的概念就是邻近性。我们通过一些限制的观点来介绍这个关系。如果每个中间都至少有一个显著不同于其他点围绕的圆环，S表示欧氏空间中的点集，那么M点集的限制就是P点集。接近性有以下公理：

1. 一个点与它周围的点是相同的。

2. 两个相邻的点的交集可以由与它相邻的第三个点延续。

3. 任何由给定点集发展而来的点都可发展出一个包含在给定点集中点的集合。

中译本序言

感谢其维教授的信任,命我组织团队完成皮亚杰有关空间概念这一本书内容的翻译工作!每次收到邮件,看到“新发兄”的字样,一想肯定是李老师发来的,这种李氏招牌式的问候语,想必温暖了无数中国学人的心田。他长期以来一直专注于皮亚杰发生认识论的研究工作,在中国一提到皮亚杰,肯定会首先想到李其维。记得在北师大发展心理研究所读硕士时,就经常听到李其维老师的高论,还专门以发展心理研究所研究生会主席的身份邀请他主讲过一次“智贤心理学讲座”。这次能够以翻译的机会再续前缘、能够在这样一套大型译丛内主持翻译一本皮亚杰和英海尔德合作的扛鼎之作怎不令人欣欣然而喜洋洋者矣呢?特别是,我们的翻译接近尾声、行将画上句号的时候,听到了李其维教授被中国心理学会授予“终身成就奖”的消息,我想这本译著应该是对其维教授获奖最好的致敬了!

从其维教授那里听过两句黄庭坚的诗“随人作计终后人,自成一家始逼真”。跨越时空,皮亚杰的学术生涯与这两句诗恰成互为印证。用我们中国流行的话语来描述,那就是皮亚杰通过自身的理论自信、道路自信和方法自信,付诸筚路蓝缕的科研实践,达到了在心理学研究领域中的理论创新、概念创新和方法创新。发展心理学这块地儿上本来没有几条路的,经过皮亚杰的开拓突然道路明亮、宽广起来。在皮亚杰所开拓的康庄大道上,发展心理学人不断开拓,现在可以用“蔚为大观”来形容之。我们翻译此书,是为了传播皮亚杰在*N*年前的创意与思想、方法与方法论,但更重要的我觉得应该是将皮亚杰的这种信念借鉴过来,开拓中国的发展心理学大业!

从十七年前读本科开始,皮亚杰的三山实验、表征与守恒、同化与顺化等名词与概念就已经熟稔于心。但是,经过这次翻译有关空间概念的完整研究,才领略到皮亚杰研究历程的细部。像时间与空间这样的问题,儿童从生下来之后是如何一步一步获得对其认识的,这是一个恒久弥新的研究问题。正如皮亚杰所说,有关空间认知的主题如此之难,要得到任何结论都要做大量的实验。

在本书中,皮亚杰将儿童的空间认知分成三个大的过程,首先是对拓扑关系的认知,然后是射影关系和欧几里得关系,在每个过程之中他都设计了实验来检验特定年龄阶段的发展特征。他的研究逻辑如下:首先,从康德(Kant)和庞加莱(Poincaré)等人对空间认知的经典论述出发,如康德认为空间知觉是一种先验的“情感”结构,思维的作用仅仅是向逻辑推论过程提交空间知觉数据,这种过程能无限制地分析数据直到内容枯竭。庞加莱认为感觉印象促进了空间概念的形成,就好像感知运动操作为几何思维提

供了基础,同时智力对先前预备好的这些材料进行了再次加工。他尽力将自己关于组间位移的理论应用于实际的感觉。其次,皮亚杰选定特别设计的实验材料,包括简单的梳子、钥匙、铅笔和勺子,也包括圆、椭圆、矩形和三角形,还包括立体的如三座不同颜色和标志物的山,以及更复杂的一个完整村庄的模型等等。再次,通过与儿童对话(也就是我们经常谈及的临床法),了解不同年龄阶段儿童对这些空间材料的认知,将与儿童对话的核心部分罗列出来,作为该阶段儿童空间认知发展程度的证据。最后,根据任务所对应的空间认知能力种类以及研究者与儿童的对话,得出不同阶段儿童的发展特征。因此,皮亚杰的研究经历了理论-实验-理论的过程,也可以说是演绎-归纳-再演绎的过程。

通过皮亚杰的研究,我们知道,儿童对空间概念的理解存在两种水平:一种水平发生在知觉层面,另一种水平发生在思维和想象层面。空间直觉不能被简化为知觉与想象的产物,也不能彻底地从逻辑或公理中分离出来。儿童通过感知客观的空间材料获得运算格式,这种格式能被形式化,并且可以通过纯抽象的、演绎的形式起作用。所以说,空间概念是内化的动作,不仅包含对外部事物、事件或是对动作结果的心理表象,也包含主动的对未来动作的预期。

在研究中,皮亚杰有的实验包含5个被试,有的有8个,也有的实验包括了100个儿童被试。所以,每个研究应该包括多少个被试,这方面似乎没有一定之规。同时,在这本著作中,我们看到的是抽丝剥茧般的理论分析、精巧对话和对儿童发展的描述,这里没有复杂的统计,甚至连一条发展的曲线都没有。遥想2004年在北京召开国际心理学大会之时,与会的诺贝尔奖获得者丹尼尔·卡尼曼做了大会报告,他相当多的研究只用百分数就说明了问题。每每想到这些,就不由得反思:我们选择心理学作为安身立命的领域,经过一个又一个的研究,究竟有多少真知能够被累积出来?当我们累积的数据越来越大、采用的统计方法越来越高级、使用的仪器越来越精致,我们真的能够离真理更近吗?

平心而论,翻译此书的过程不能说是与大师对话的过程,我们解开、明晰大师的意图本身就是不容易的,翻译之途的确是不断看清大师心迹的过程,越是看到大师的心迹,也就越能照见自己的心迹和这个时代的心迹。在此过程中,也发现大师其实没那么高大,但是他从容、淡定而自足地经营了自己的园地。中国有那么多从事发展心理学研究的,我们究竟该如何刻画儿童的心理发展?我们所得出的发现,究竟有哪些是增进了本领域的知识进步?当我们看中国儿童空间概念建立的过程,是否与皮亚杰研究的发现是一致的?

全书翻译的分工如下:我统筹了全书的翻译,初稿由以下研究生译出,谌鹏飞(原著序言、第二篇的概要、第六章、第七章和第十三章的前一半),史俊(第四章、第五章和第十章),薛荣和韩泽宇(第三篇的概要、第十一章、第十二章和英文译者注的后一半),赵竹青(第一篇的概要、第一章和第二章),蒋莉(第三章、第十四章和英文译者注的前一

半），王娟（第八章、第九章和第十三章的后一半），全体人员合作完成了第十五章的翻译。最后，我对全书做了校阅与审定。

感谢全体参与翻译工作的研究生的努力，他们在此过程中均有所进步，在“译后记”部分，各位读者可以看到他们的翻译感言，这是年轻心理学人与一代心理学巨匠相遇的心灵激荡；感谢现代教学技术教育部重点实验室、陕西师范大学教师专业能力发展中心和中国基础教育质量监测协同创新中心陕师大分中心给翻译团队的各种支持，无论教学技术和监测手段如何发展、教师教育有何创新，相信永远都会从儿童实际的发展规律出发，所以本书的翻译也必将有助于实验室和中心工作的推进；最后，特别感谢我的夫人隋欣老师在我夜以继日地组织翻译和校阅期间承担起大部分家务的重担，并愿意听我有关翻译工作的各种唠叨；感谢儿子衣福铎带给我们全家的快乐，我们经常惊叹于他的发展，并不断地从他身上看到了立体的发展心理学。

衣新发，乙未年九月廿九日于康涅狄格大学·润吾德（Renwood）寓所

又及，初稿完成以来，又经过了数次校阅，特别是上海松江教育学院谢英香博士通读了全文，并提出了具体化的修改意见；此外，陕西师范大学外国语学院的王茂洁同学对文稿的整体完善也做出了特别的贡献。特致谢忱！感谢第九卷主编朱莉琪教授的诸多帮助及全体编译人员的相互支持、鼓励！

衣新发，戊戌年六月于陕西师范大学

最后，特别感谢河南大学教育科学学院宋小放老师认真地完成一校工作！感谢我的硕士生于尧、王冰洁、鲍文慧和敖选鹏同我一起完成最后的完善、收尾工作。值得一提的是，本书翻译期间，我的女儿衣福坤从出生到现在，已然三岁半，她的空间概念正在形成之中，对照书中所言，看她成长自妙不可言。

衣新发，己亥岁末于长安

第一篇
拓扑空间

概　　要

为了着手研究儿童在思考空间时是如何尽可能多地运用各种假设的,我们需要先写两章进行介绍。这两章研究了两种本身非常平常的行为,但它们显示了空间思维在进化过程开始时的类型。

其一,在第一章,我们将会研究儿童是如何仅仅通过触觉,或通过被我们命名的"触知觉"[1],来识别各种不同的客体。其二,在第二章,我们将会检验儿童对几何形状绘画的发展。这些调查都将会揭示出:领先于组织射影和欧几里得空间,儿童先学会构造和使用某些初级关系,如接近和分离,顺序和封闭。这些关系和几何学家们命名的"拓扑"相符合,而且从空间构建的理论来讲,它们同样被认为是初级的。

这些发现驱使我们通过更细致地研究这三种关系来继续进行介绍。于是,第三章就研究了顺序,这完全是从空间的接近和分离的角度来讲的。第四章涉及封闭或围绕,是从理解他们的起源的角度,例如,从研究结点的知识开始。第五章致力于解决连续性与线和截面逐渐细分为更小的单元,直到最后变成点的这些问题。

因此,介绍性的两个章节和三个具体的章节构成了第一篇,它大致揭示了最具直觉性的拓扑关系对于空间表征后续发展的极为重要的意义。

---

① 见"英文译者注"。

第一章 空间知觉、空间表征和触知觉[1]

研究空间心理发展最主要的困难都来自这样一个事实——空间关系的发展过程有两种不同的水平。一种水平发生在知觉层面,另一种水平发生在思维和想象层面。

解决这个问题的常规方法,也即大多数数学家所采用的方法是假设空间思维的发展会受到动力和空间机制的影响,而且就目前来看这个假设的确是正确的。但是这种观点进一步假设:表征形象和几何思维都只是那些已存在的感知运动结构的复制。这个假设简化了事实,甚至完全歪曲了事实。

康德(Kant)认为空间知觉是一种先验的"情感"结构,思维的作用仅仅是向逻辑推论过程提交空间知觉数据,这种过程能无限制地分析数据直到内容枯竭。庞加莱(Poincaré)认为感觉印象促进了空间概念的形成,就好像感知运动空间为几何思维提供了基础,同时智力对先前预备好的这些材料进行了再次加工。他尽力将自己关于组间位移的理论应用于实际的感觉。

现在,我们可以确定这样一个感知运动空间,它从孩子出生起就开始,而且它和知觉及动力活动一起,经历了重大的发展,直到语音和表征形象的出现,例如常规的表征功能。这种感知运动空间被叠加上许多先前存在的空间,如位置等,尽管它绝不是对它们的简单反射或重复。相反,它有自己的发展过程,追溯这个过程也相当简单,而且,感知运动行为的空间组织导致了以它们自己的规律形成新的心理结构。[2]

然而,在这个时候,存在一种令人好奇的现象,它趋向于使得对任务的分析复杂化。尽管在知觉和动力活动中获得的感觉收益(在它们自身的水平上提供直线、三角、圆、正方形和投射系统等)、表征思维或想象,最初存在时忽略测量标准、透视关系和比例等。结果,它被迫从最简单的概念中重建空间,例如邻近、分离、顺序和包围的拓扑关系等,把它们应用于测量和投射图形中,这些图形的基础是比那些最简单的关系本身更高水平的知觉。

在不能观察到这些最初的关系和它们所涉及的知觉内容之间矛盾的过程中,在一个表面上更高级的阶段,人们倾向于把所有东西缩减至平常水平,而且想象那个几何概念直接建立在感觉数据上。

此外,在表征空间的发展过程中,表征活动从某种意义上说被反射或投射回知觉活动上。从表征可以以一种坐标系(与来自物理经验但以几何级数发展的垂直-水平轴相

---

① 与 Mlles. E. deJongh, U. Galluser, B. Demetriades 和 M. A. Morf 合作。

② 见《儿童"现实"的建构》,第一章和第二章(这里被称作 C.R.)。

一致)排列好所有空间图形的阶段开始,知觉本身开始定位部分结构,这些结构在没有这样的系统时就已经形成了,但是在这之前它满足于一种远远有限的结构化水平。

对各个阶段的一无所知导致了这种转变,成人假设那种知觉从一开始就包含很多坐标系或水平-垂直关系,尽管实际上这些体系相当复杂,直到八九岁才完全发育好。而且这样一种错觉实际上逐渐强化了之前提到的那个错误概念,它忽略了知觉方式是和表征相关的,这个错误概念已经影响到了当下对几何概念的解释。

这个错误概念是如此根深蒂固,以至于我们将要在第一篇用很大的篇幅来根除它。在这一章,我们将仅仅概述这个问题。在第一部分,我们将试图对涉及感知运动和知觉空间的事实加以概述。在第二部分,我们将介绍关于表征空间的研究,审查一些非常简单的感觉空间概念,如图像,也就是那些涉及物体形状的概念。在神经学和实验心理学中,对固体(相对于看不见的物体)的触觉识别被叫作"触知觉"。尽管这个术语很常见,但它是不正确的,因为这些所谓的知觉远远超过纯粹的知觉限制,而且通常假定将通过触知觉和运动转换为实际的形状。但这绝不是关于术语的问题,我们在这里实际上关心的是关于触觉事实的混合特征。因为它给了我们一个机会,可以在自然状态下观察从形状知觉发展到对它们表征的实际过程,对于儿童而言,这个阶段处于2—7岁。而对绘画的研究则标志着从视知觉到观念运动表征的转换,所以这两种研究非常自然地成为表征空间研究的引言。

第一部分 知觉或感知运动空间

当前研究的主题并不是空间的一般发展,而是表征空间(的发展),而且因此对表征空间的分析超出了我们所设置的种种限制。但是,在介绍知觉感知运动框架、参考框架、建立空间的整体表征结构的起点和基础之前,还应该先回顾一下我们对这个主题都了解些什么。对于感知运动空间的介绍将会非常简略,因为我们已经在其他地方(C.R. CHS.第一章和第二章)尽力追溯其在生命最初18个月的起源了,以下是本文将会涉及的它更早期的轮廓。

第一节 表征前的空间知觉

根据目前所认可的对知觉过程的解释,从最初级到最高级发展水平的每个知觉"领域",都是依照相同的"结构"类型组织的。假设这种结构从一开始就具备一种几何特征,它与"良好完形"规律效应相去甚远,而且涉及知觉大小和形状恒常性的立即形成。这意味着任何年龄的儿童都可以不受透视的影响而识别出物体的形状,同样不受距离的影响而识别出物体的大小。因此它来自一开始就立即产生的对空间和测量关系的知觉。如果这个假设是正确的,那么要描述知觉空间只用回想空间构造规律就可以了。

但是,我们已经在以上的相关研究中展示了:物体形状的恒常性远不是从一开始就完成的,因为7—8个月的儿童还没有形成客体永恒性(permanence of object)的概念,而且也并不想要把他面前放错的奶瓶颠倒过来(C.R. 128—129页)。和我们已经展示的一样,朗伯西尔(Lambercier)也认为大小恒常性的问题在8岁儿童和成人之间仍然存在很大的差异[①],同时,布伦斯维克(Brunswik)和克鲁克香克(Cruikshank)[②]也已经证明了在最初的6个月里,不存在这种永恒性。因此,我们有依据来假设:射影顺序(projective order)(知觉的)和测量顺序(metric order)(随距离变化来估计大小)比那些其实质已经被确定的早期空间关系出现得要晚。同样显而易见的是,空间知觉包括一个逐渐的建构过程,它绝不是在心理发展的开始就已经形成了。

这个建构包括些什么呢?我们试图概述感知运动发展的三个时期——从出生到表

---

① 见 Piaget and Lambercier, "Le problème de la comparaison visuelle en profoundeur et l'erreur systématique de l'étalon," *Arch. Psychol.*, 1947.

② Brunswik and Cruikshank, "Perceptual size constancy in early infancy," *Psychol. Bull.*, 34, 713.

征的开始——概述它的轮廓。第一时期包括两个阶段，即纯粹反射(pure reflexes)和初级习惯的获得(the acquisition of primary habits)。第二时期也被分为两大阶段，即“二级循环反应(secondary circular reactions)”(从操纵物体开始，大概4—5周)和“首次完全智慧行为(first fully intelligent behaviour)”等，此期间要一直延续到周岁结束。最后，第三时期包含“三级循环反应(tertiary circular reaction)”(从实验开始)和首次的“内在的协调(internalized co-ordinations)”(对新颖情况的快速理解)两个阶段。[①]

第一时期。其两个发展阶段的主要划分依据是不同感觉空间的协作，尤其是视觉和抓握——视觉和触觉-运动空间还没有像整体一样彼此相关。因此，在这个水平上并不存在客体的永恒性和形状及大小的恒常性(参见C.R.第一章)。

然而，尽管任务似乎看起来很艰巨，但是努力重建原始的或初级的知觉(如练习吸吮反射、触摸反射和看光斑反射等)中出现的空间关系是很有必要的。但是，由于这些最初的知觉并不能获得大小和形状的恒常性，哪种类型的关系能够组成这样的一个空间呢?

1.知觉可获得的最基本的空间关系似乎是“邻近(proximity)”，这和最简单的知觉结构类型相符合，也就是“接近(nearby-ness)”的元素隶属于同一个知觉区域。与格式塔学派的研究一致，大家都知道结构组织中的首要因素无疑是结构中元素的邻近性。然而，需要指出的是，这种关系会随着儿童的长大发生改变。相对于其他组织因素(相似性、对称性等以及被叠加在这些反射上的最早期习惯)，孩子越小，邻近率就越重要。相反，随着儿童的成长，这种倾向会消失，而且构成知觉整体的元素之间彼此相关(所需要)的最小距离会逐渐增大。[②]

2.第二个基本的空间关系是“分离(separation)”关系。两个相邻的元素可能会部分混合在一起并造成混乱。为了介绍它们之间的关系，分离关系具有使之分离的效果，或者至少能提供分离它们的方法。但是这样一个空间关系再次和最原始的功能相符合，那种功能涉及隔离不同的单元，或以一种常规的方式分析组成完整或融合整体的元素。就像一个婴儿会有这样的经验，当他看到某个物体靠在墙上，小得以几乎不能把它从背景中区分开来的方式出现，融合的知觉里只有邻近性而没有分离性。知觉变得越融合，分离关系就越重要。因为随着儿童的成长，它们越来越倾向于分析物体，这种关系经历了很长的发展过程。但是这并不足以得出这样的结论:“分离”和“邻近”关系的演化遵循着相异的路径，以至于分离的重要性仅仅随着年龄的变大而增长，而邻近性则在下降。相反，正如分析能力的进步使儿童分离出前所未有的大量元素，那些元素至今

---

① 对于我们这里再次陈述的三个时期的六个阶段和引用的文献，请见 *The origin of Intelligence in the Child*, *London*, 1953。

② 见 Meili, R., “Les perception des enfants et la psychologie de la Gestalt,” *Arch. de Psychol.*, Vol. XXIII, pp. 25-44 (1931). 还见 Piaget and Lambercier, “Comparaisons à distance, etc.,” *Arch. de Psychol.*, Vol.XXIX, pp. 173-254, 对于元素之间相距更大的图形结构，考虑到年龄的因素。

仍被看作是没有差别的,这使得他在建构察觉到的图形时,考虑到在一个更大的范围内发挥作用的不同邻近程度,而不是被限制在近距离的邻近关系里。

3.第三个基本关系建立于两个邻近但分离的元素被前后排列在一起时。这就是顺序(order)关系(或空间连续性)。毫无疑问,它在儿童生命里出现得非常早,并不仅仅发生于婴儿的注视点或触摸点越过以固定的顺序排列的一系列元素(例如他们小床的横木)时,而且发生在知觉指导一系列习惯运动时,这里的知觉是依据有组织的参照点而发生的。例如,看到一扇门打开,一个图形出现,某些象征着开饭的活动,形成了在空间和时间上组织的一系列知觉,这与吸吮习惯极其相关。因为顺序关系出现得非常早,也考虑到整体的复杂性一直在发展,没有必要指出它们能够取得突出的发展。在知觉领域,有一种特别的关系,它的顺序包括一个基础的部分,这就是对称性。这两个顺序就是它最简单的代表,……*CBA/ABC*……这个任务在建构“良好构造(good configurations)”或者熟悉的“经验”形状(如脸)中非常有名。

4.基本知觉中呈现的第四个空间关系是封闭(enclosure)关系(或围绕)。在一个组织系列*ABC*中,成分*B*被认为是在*A*和*C*之间单维度下形成一种封闭关系。在一个平面上,可以觉察到一个成分可能被其他成分围绕着,例如鼻子被脸部的其他部分包围。在三维结构中,包围表现为“内部(insideness)”关系形式,例如一件物体在一个密封盒里。但是,我们清楚地认识到:尽管包围关系来源于知觉给予的东西,一旦邻近、分离及许多其他顺序类型变得有组织性,封闭关系将经历一个复杂的进化过程,尤其是在三维立体情况下。因此,由于被屏幕遮挡而造成的客体消失了一部分,并没有导致对实际发生事实的感知,而是导致感知到像是物体再次被屏幕吞了进去。再例如,还是关于这个年龄,当儿童尝试替换围绕木棍的圆环时,他满足于推挤木棍,仿佛仅仅通过接触就能实现(圆环对木棍的)包围,而没有进行使圆环穿过木棍的行为。[①]

5.最后,在线和面的情况下,很明显从一开始就存在一种“连续性(continuity)”关系。核心问题是确切地知道那些肯定能觉察到整体知觉领域的东西包含一个持续的空间范围。因为与事实相当不一样,许多最初感知到的空间(例如口腔的、触觉的和视觉的等)在很长一段时间里并没有彼此协调,它并没有在任何特殊领域被展现,例如视觉,其知觉连续性在所有发展阶段都保持着相同的特性。庞加莱将经验上的连续性和以下公式联系起来:例如在*ABCDE*序列里,邻近的成分被混淆或区分不出来(因此$A=B$,$B=C$等),但是*A*和*C*、*B*和*D*被区分出来了(因此$A=C$,$B=D$等),在这个过程中我们对这个客体有一种连续的印象。苛勒(Köhler)以一种相似的方式描述了韦伯定律下出现的不同阈限。因此,我们可能会说知觉的持续性随着敏感性阈限值的增长和邻近与分离关系的进化被修正了。

总体而言,在元素的邻近性、分离性、有顺序的规律性等标题下,由格式塔理论分析

① 见*The Origin of Intelligence in the Child*, p.320(obs. 174).

的知觉关系和那些同等的基本空间关系相符合。而且它们就是几何学家告诉我们的那些具有原始特征的、组成了几何学上所谓拓扑的部分，它与严格的形状、距离和角度或测量和投射关系无关。为了接受这一假设——形状和大小恒常性并不是基本知觉的直接产物，(我们需要)凭借拓扑学上认为的基本几何建构数据，直接把知觉上的原始空间分解为线段。此外，如果在最初的几个月，儿童的世界里确实是缺乏永恒的物体的，就像我们在其他地方已经展示的那样(C.R.第一章)，这意味着察觉到的图形出现和消失就像滚动的静态画面或展示的一系列变换的形状一样，或在二者之间转换，所以不能区分出状态的转变和位置的转变。但是我们可以说，从5—6周开始，紧跟着笑容的出现，婴儿已经有能力去识别了。因此，尽管存在距离的变化和知觉效应，但他也会识别出熟悉的脸庞。

从空间的观点来讲，在许多的转换过程中识别一张面孔包括了两个或一对一(或双重)的对应，这种对应是介于图形连续状态中(例如婴儿在脸部所处的每一个不同位置发现了相同眼睛、相同的鼻子等)成分之间的。但是这种对应具有什么样的结构呢？这种基本的知觉转换规则是什么呢？因为到目前为止还没有建立起大小恒常性和区别于明显的物理状态变化的物体运动的组织性，所以它并不是一个欧几里得结构。从与变化相联系的观点来讲，同时又因为到目前为止还没有建立起形状恒常性，所以它也不可能是一个投射结构，同时也不是由于知觉察觉到的内容而发生变化。

以由拓扑学设想的相对可塑的、灵活的结构来观察脸部，在它转换的全部过程中，面部和面部的相似性可能会减少直到成为"同质异形体"。那是个双重的、双连续的简单拓扑对应，但是靠不加精确运算的完全直觉也是很有必要的，因为它是直觉本身的工作。

第二时期。感知运动发展的第三和第四个阶段是以领会和理解状态下的视觉协作为划分依据的，而且也以视觉控制下大量运算格式的结构作为另一个划分依据(第三阶段)。但这些阶段都可以通过常规的行为协作(第四阶段，从与达成目标的方法相关的智慧关系开始)区分开来。从这个意义上来说，存在一种完全的知觉空间转换，这是由于视觉指导了运动系统，但最后运动系统也会对视觉产生反作用。

操纵物体实际上导致了对图形或形状的分析。一个物体从一只手递到另一只手，在各个方向上翻转该物体，同时把看到的物体的样子与触摸得到的感知觉联合起来，从不同的视角看到的同一个物体有时是完全不同的东西，仅仅通过触摸而看不见物体得出的感知觉也不太一样。为了与第一时期灵活且可塑的图形相对立，它获得了实体的持续性。为了扩展它，物体的永恒性在反应的协调过程中发展起来，所以一个同时为欧几里得形状(结果物体被描绘成一个恒定的大小)和投射形状(协调物体不同的角度，如远景的结果)的结构出现了。

因此第二时期(从4—5月到10—12月)的独有特征在于建构图形和大小及形状知觉恒常性的发展。与格式塔理论的主要假设相反，我们相信(更进一步的理由请见第二

节)作为感知运动活动的结果,"良好构造"(或简单的欧几里得形式)本身会随着年龄而发展。眼部运动、知觉探索、模仿分析、行动转换等在其发展中都发挥着基本的作用。当眼睛不可能转动时,良好构造在速视视觉(tachistoscopic vision)里非常突出,这个事实证明了它本身并不包含任何东西,因为尽管在这种情况下获取的格式可能会让位于即刻的认知,但这也仅仅会带来一个更早期的结构。[①]对于良好构造稳定性的增加,它不仅是由于感知运动的活动规律也是由于那些纯粹的知觉造成的。

在本时期之前,我们还不能说婴儿可以察觉到直线。首先,我们最好先问一下:在最初的几个月里,对于不平稳且震动的眼部运动来说,客观的直线是什么?接着,独立的直线知觉很难存在于婴儿的知觉世界里。为了察觉这样的一条线,婴儿首先必须将它从一些完整的图形(如一张桌子、一张床、一个门等)里提取出来。到目前为止,我们并没有假设这些图形象征着有固定形状和维度的永恒物体的存在,那么怎样才能想象进行了这样一个提取呢?从另一方面来说,接近8—10个月的婴儿会看到关于物体运动和对它们形状进行认知的整个一系列的探索,并倾向于使它们与直觉发生关系(见C. R.第167—169页和159—164页)。接着这条线段像轨道、两个飞机的交叉点及保留在知觉里形状的单一方面等一样发挥着重要的功能。

连同主要的知觉形式结构(线、圆等),此时期最重要的收获毫无疑问是大小和形状恒常性。在表面上,它们都是以射影和测量关系组织起来的。例如,就形状恒常性而言,感知到一个形状,这个形状以菱形的形状出现,当它倾斜时,知觉将会重构其正面看到的形状。这种重构包含两个明显透视点之间射影性的对应,但是它还包含觉察到有相同角度和相同侧边的形状,这些组成了测量上的对应。从另一方面来说,觉察远方物体的实际维度涉及从知觉(因此投射形状)区分开来的形状中重建恒定的大小(因此测量),继而组成一个既是射影又是欧几里得的完整视觉。因此我们还可以看到射影和测量关系共同建立起来且相互依赖。

实际上,形状恒常性来自知觉协作中其感知运动的建构。在以上描述的第一时期,以主体与客体的观点来看,当物体改变了儿童的知觉时,被觉察到的转换并不如它改变的那样,而是和物体本身的实际转换那样。在一个悬挂的物体之前摆动脑袋的婴儿表现得好像是在跟它一样震动,直到8—9个月他才会真正探索实际位移的真实效应。大概在这个年龄,他才开始把呈现在他面前错置的奶瓶翻转过来。那就是把一个固定的形状归于一个永恒的固体。

至于大小恒常性,它和知觉控制的运动协作相关。贯穿第一时期的始终,儿童都不能区分出物体本身的运动和他本人身体的运动。在这个阶段,婴儿不具备将位置的客观变化"群集"或把永恒性赋予那些看不见的物体(这种永恒性与迂回和返回运动相关

---

① 参阅 the "empirical Gestalt" of Brunswik. 当速示器快速呈现一个介于对称的五指结构和普通的人类手掌之间的形状时,被试能像觉察对称图形一样很容易地觉察出一个"手掌"。

联,包含了位置变化的实际组别的核心部分)的能力。在第二时期,主体开始能从客体运动中区分出自己本身的运动。我们可以在这里发现运动可逆性的开端,也是从此时开始婴儿会在物体消失时去找它。正是依据这种对运动的分类和赋予物体永恒性,接下来固定维度和其大小的获得才能被或多或少正确地估计出来,不管它是远或是近。

总之,第一时期的空间仅仅容许与基本拓扑关系同类的前-透视和前-欧几里得关系。从觉察到的关系并不能从主体本身的活动中区分开来的意义上来说,对于知觉和运动拓扑学来说,高于一切的完全自我中心是非常有必要的。不管形状的变化是由于物体的运动还是他本身肢体的运动,婴儿都不能将其区分开来。然而在第二时期,主观运动协调能力的增长导致了射影和测量关系的形成,这两种关系的综合导致了大小和形状恒常性的形成,所以感知运动空间越来越去中心化。前者[1]是由于射影对应能够协调好透视射影,也是由于客体的隐蔽(客体被屏幕部分隐藏)。

第二种关系类型来自对运动进行分类、用手放置物体、为估计大小而移动眼睛等能力的发展,而且来自空间关系(相似性)的置换。这样,在感知运动活动的单维度上,透视恒常性的发展可以被视为射影和欧几里得空间精细化的标志。

第三时期。从2岁开始,感知运动活动就被系统的观察和探索及对实验(第五阶段)的尝试性努力所丰富,最终又增添了对关系的内部协调时的完全智慧运算活动(第六阶段)。这个进步用以上方式影响了感知运动空间的发展。然而,第二时期取得的成就与客体的形状和维度息息相关,第三时期所取得的成就则包含了使得物体之间发生关系。对运动的分类扩展到了大量的不断增长的连续位置,包含并不能直接观察到的运动效应(第六阶段)。为了阐述这一阶段,我们对12—16个月婴儿的视觉运动(C.R.第187页)、位置(第191—192页)、容器和其包含物关系(第92—93页)、客体旋转和逆转,不仅和本身身体相关还和其他人的身体相关(第194—195页)等进行了非常深刻的分析。

最后,在此时期的后半段(第六阶段),随着标志着完全智慧活动的内部化的快速协调的出现,第一次出现了使得延迟模仿成为可能的心理图像,继而导致对绘画的首次尝试。[2]因此,符号功能得以发展,也促进了语言或大量标志体系的获得。结果,空间已经从纯粹的知觉发展为拥有部分的表征性,而且因此更加接近我们在此工作过程中试图探索领域的边界。

---

① 前者指“中心化”。——译者注

② 见 *Play, Dreams and Imitation in Childhood*, London, 1951.

第二节　知觉和运动:“知觉活动”的作用

作为一个必要的准备,感知运动结构以很多方式参与了空间表征发展的未来,这个直白的声明并不足以明确地说明相对于表征空间,以上所讨论的知觉数据位于何处。

因此,儿童已经可以察觉到投射的事物,而且可以仅仅通过知觉获取明确的测量关系,很久以后他才会在思维里处理透视或通过运算测量客体。另外,他以这种方式察觉形状(直线、曲线、正方形和圆等)的能力远远提前于他在心理图形或表征思维的层面重建它们的能力。

因此,思维所处理的任务可以在其自身表征的水平上予以复制(不同于直接的知觉),这些任务是知觉与物体直接接触的特定领域中业已加工过的一切事情。除此之外,还存在一个鸿沟使得这两种结构常年分离。直到7—8岁,测量、知觉协调概念、对比例的理解等才导致了空间概念结构的形成,这标志着空间概念取得了实质性的进步。同时,需要指出的是,尽管知觉和表征是不同的,而且使其分离的时间上存在滞后性,但它们的结构在一定程度上是可重复的,而且都含有一个共同的元素。这种共同的成分就是运动活动。运动活动一直是表征想象和大多数情况下最初级知觉的指导因素,现在又成了其本身运算的来源。它在所有阶段都持续存在的事实导致其对于理解空间思维极为重要。

在每个水平,空间思维都以两种完全不同的方式存在。有时它集中于静态模式,如当联想起一个三角形或一条直线时;有时它表现出各种变形状态,如三角形在形状上的变化及直线绕中心旋转。这两种模式是不可分解地联系在一起的,还是存在先后顺序?是同等重要,还是存在支配关系?这些问题都是非常重要的,我们对几何思维特征的描述完全依赖于这个问题的答案。从一般词源意义上来说,我们可能把几何思维看成直觉的或对准感觉形象的思量。从某种意义上来说,或者我们可能使起初活动的、结构的和前运算的东西最终以其特殊平衡形式的运算出现。

在发展的各个阶段,我们都会发现第二种解释才是正确的。因为,尽管空间思维上的形象元素和纯粹的运动元素常常是相互连续且同时出现的,但我们应该注意到是后者控制着前者而非相反。

感知和运动是两个独立的生理现实么?现在整个神经学界都认可这一常识:它们在基础和必要性上是相互关联的。[①]我们不想在严格的生理学上解释(支持其中的一方),即使它们看起来是独立的,而且它们之间的“联系”仅仅是一种次要特征,这都远远不能证明生理层面的东西。因为心理学的任务并不是从行为或意识层面解释神经系统

---

① Von Weiszacker, Die Gestaltkreis, Stuttgart, 1947.

的运作，而是分析行为的演化。那就是说，例如知觉方式是建立在对过去知觉之后的情况上的。从这个角度上来说，可观察到的行为类型如果不依靠知觉，是不会发生任何变化的。同样，没有运动成分参与的活动，知觉也是不会发生的。整体的“感知运动格式(sensori-motor schema)”必须包含行为分析的起始点，而且没有知觉和运动被认为是孤立的。

从这一点来看，知觉(例如看到奶瓶被错误放置)是一个有直接的整体组织的系统。但是这个整体的平衡并不仅仅建立在真正的(例如实际观察到的)关系上，而且像机械的平衡一样，还建立在更早或偶然的知觉上(例如对奶瓶半旋转结果的预期)。这样一个虚拟关系的介入假定了运动活动，这是因为它经常是从一个知觉过渡到另一个的最后指示。

但是究竟什么是运动呢？实际上，格式塔心理学与知觉建立起了紧密的联系，但仅仅是在被知觉决定的情况下。这一观点已经被纪尧姆(Guillaume)[①]阐释清楚：“感觉中枢和运动中枢构成了一个机制，而且与反应的动态博弈与接受区域直接相关。”然而，与这种观点相反，我们认为如果运动真正标志着从一个知觉过渡到另外一个，那么必须辨别出转换之间相互作用的存在，例如——运动和由转换引起的接下来的状态——即知觉。从这个意义上来说，每一个活动都将被看成知觉区域的转换，每一个知觉区域都是由运动决定的关系集合。

因此，当8—10个月的婴儿看到被毯子压住一半的玩具时将倾向于掀开毯子，看到整个物体。这个运动从最初的知觉区域(仅仅能看到物体的一部分)转换到第二个区域(包括玩具和盖着其他物体的毯子)。在所有的可能性下，掀起毯子的运动本身就决定了区域的不平衡，或相对于主体的需求，仅仅因为看到物体的一半时知觉的不平衡性(因此，由运动造成的不对称和张力重新建立起对称和平衡)。这就是格式塔理论强调的情况的一个方面。但是这个公式仍然没有解答这个问题：在不依靠导致从一种直觉到另一种直觉的转换和这种运动本身时，究竟这样的状态(包括那些平衡)是否能够被观察到？

实际上，转换开始于知觉和智慧的顶峰，整个发展的过程都清楚地说明了转换的重要性一直在提升，这与静态知觉模式最初的优势相反。

但是我们不仅仅局限于这些，而是认为很有必要从知觉本身最初的形式开始更细致地分析运动的功能。由于我们对空间思维的解释完全建立在运动成分形状的关系上，举个例子，知觉里立方体的任何一面都不表现为一个正方形，观察者掌握物体形状恒常性这个事实的时候，他不可能在没有打断的情况下继续观察它，他可以在当前所感知的运动中看到一个正面的立方体。用这种方式，即使是知觉立即辨别出一个物体，运动也参与进来了，虚拟关系就立即和实际关系产生了联系。这些运动通常对于形状恒

① P. Guillaume, *La psychologie de la forme*, p.126, Paris, 1937.

常性的建立很有必要，在合成的知觉里不能被忽视，因为它决定了其平衡(以与一个机械平衡假设虚拟的速度和位移同样的方式)。从这个意义上说，每一个知觉都隐含了感知运动格式，这个格式会使之前的结构全部整体作用于实际情形。

对一个简单的平面图形(如一个矩形)的知觉引发了相似的思考。在某种程度上，视觉集中在其中一点上而不是其他点上，或者集中在某一面上而不是其他面上，或集中在某一种关系上而不是其他关系上，在此过程中，图形的宽度和高度可能会被高估等。[①]像这样的图形形状暗含了一些涉及变形的最小值的最佳注视点或集中点，而且从这个意义上来说，知觉并不决定眼动。但相反的是，实际上选择的点仅仅事关更大或更小的可能性，而且一个人可以计算可能涉及不同定位点组合的特殊的形状知觉效果。[②]因此，我们发现视知觉本身构成了由眼睛可能的运动决定的关系集合，而且在本章也会看到对触觉发生时和接触上的探索有关系过程的确切分析。

大体上来讲，一个接一个被动的知觉，例如由于特殊的集中，人们必须认识到知觉活动开始于中心点(或去中心化)的变化，包含了比较、置换和预期之类的东西。这种区分的需求在这样的事实中显现出来：当简单的知觉效果在每个年龄都保持着相对的恒常时(例如简单的几何错觉在发展的过程中很早就消失了)，知觉活动的效果随着孩子的成长而日益增大。在触知觉现象中可以看到一个很好的例子，这在触-运动知觉活动的发展过程中会变得更加明显。

现在，"知觉活动"可能仅仅是感觉运动智慧的持续，它在表征出现以前就已经开始活动了。如果这是真的，那就可以解释为什么知觉恒常性——第一年里感觉运动活动的产物，随着年龄的增长后来还会发展。实际上，大小恒常性仅仅需要9—10年就可以达到成人水平，这清楚地说明了这个格式的建立发生于低水平的行为层面而不是象征活动层面，而且在后者出现之后还在继续。

此外，在表征和接下来的运算智慧发展过程中，这些更高水平的机制持续对知觉本身做出反应。在它运作的过程中，我们应该看到许多这种例子，尤其是以协作系统的方式对横轴和纵轴的知觉组织做出反应，这种协作关系来源于概念之间相互影响的过程(见第八章)。

因此，我们可以说并不仅是积极运动成分来源于知觉的开始，而且是它本身的作用被知觉活动极大地提高了。而且，在知觉到表征的转换中，我们会再次看到这个因素发挥了作用。

---

① 我们和Lambercier一起展示了视觉集中的每个领域，可以说是被扩大到导致视觉集中相对夸大了其元素或关系。参见Piaget, J. and Lambercier, M., "La comparasion visuelle des hauteurs à distances variables dans le plan parallèle," *Arch. de Psychol.*, 1943.

② 参见Piaget, J., "Essai d'interprétation probabiliste du loi de Weber et de celle des centrations relatives," *Arch. de Psychol.*, Vol. XXX, p. 95. 解释了它仅仅与几何假象的因素相关，如Delboerf, Muller-Lyer等。

第二部分 识别形状(“触知觉”)

知觉是由于对物体的直接接触而得到的关于它们的知识。与此不同的是表征或想象则涉及当物体缺失时对它的唤起,或在它们存在时和知觉平行运作。它通过参考没有完全被观察到的物体来完成知觉信息。因此,举个例子,人们可能会察觉到一个三角形而且把已知的形状比作一整类可比较的形状,这些形状并不存在于知觉中。

因此,如果可以说表征扩大了知觉的范围,那么还可以说表征为它本身引入了一个全新的特殊成分。表征的特色存在于一个含义或意义系统之中,它能够具体地区分出象征和被象征。可被承认的是,知觉本身包含意义(例如,知觉里看到的形状和恒常的形状是相关的),但是在这种情况下它们仅仅是感知格式的符号、指标、一部分或一小部分。与此形成对比的是,表征的意义能够很好地区分出象征物和被象征物,被象征物包含符号(常规或数学语言)、标志(想象、模仿的动作和示意图)和它们象征的事物(在空间表征、空间转换和空间状态等情况下)。从知觉到表征的转换存在双重的困难,这包含象征物和被象征物,也就是说,包含想象和思维。

本章我们将着重讨论想象,尽管我们很难将它从其象征的概念中分离出来。但是一旦我们开始研究空间想象,就开始又一次面临运动和它与感知或形象成分的关系这一难题,在与知觉相关的部分已经讨论过这个难题。现在想象很有可能是一种内在的模仿(就像我们在其他地方试图展示的那样[①]),而且源于动力活动,尽管它的最终形式可以追溯到感知数据形象化的模式。因此,由于它最根源性的本质,心理的想象倾向于在纯粹的动力和形象特征之间摇摆,就像感觉和知觉在早期阶段那样,构成了表征空间开端的智慧关系最初就作为一种支撑的方式和想象联系在一起了。但是与静态模式相反,它们依附于空间转换,这些关系使得想象的形象形式和运动成分分离开来,而且同时使它们本身脱离于形象成分发展到后者,从此以后仅仅作为辅助符号使用。

我们可能用这种方式来概述这一困难。作为内在模仿的结果,心理想象从知觉结构的依附中受益,而且迟早(尽管比通常认为的要晚很多)会有益于已经形成的形状,例如直线、曲线、平行线、角、正方形、圆和其他类似形状。这并不是从一开始就标志着表征空间是欧几里得或射影结构,因为相对于实际的概念关系,它实际上与象征意象有更直接的关系。至于象征意象,与它们所依靠的模仿想象相反,可能空间表征开始于拓扑关系的再次建立,在这种关系里知觉本身仅仅是一小部分。接着模仿想象才能同时包

---

① *Play, Dreams and Imitation in Childhood*, 1951.

含投射和测量关系，最后才能建构同等的或协调的知觉综合空间关系。

第三节　依靠触知觉的形状识别：方法和整体结果

我们认为在2—7岁的儿童身上重复一个著名的实验来介绍空间知觉是很合适的，因为它说明了知觉和想象之间的差别。这里涉及究竟什么是触知觉，尽管如已经提到了那样，我们认为这个表达相当地不合适，因为它涉及了同样程度的想象表征和知觉。揭示此事实的这个术语来源于对简单或初级知觉和表征解释之间的差别证明。

给孩子呈现大量的物体，相似的固体（球、剪刀等）或扁平的几何形状（正方形、圆等）和在没有看到它们时对任意一个的触摸和感觉。接着，要从一系列可以看到的物体或其图画中对它进行命名、分辨和辨认。可以确定的是，这个反应涉及把触觉和动觉印象从不能看见的物体转换为可视化空间图像的过程。因此对这些数据的研究可以用来分析直觉想象的构建和触知觉的机制。

我们采用以下方法：在儿童面前呈现一个屏幕，他可以在屏幕后面摸到这个物体。用这种方法，而非传统的在桌下放置物体的方式，实验者可以测到被试对物体的触觉探索，而对此的认识对我们的研究结果至关重要。

以下物体被依次呈现：1.对于非常小的孩子（大一点的孩子觉得这非常简单），一系列常规物体，如铅笔、钥匙、梳子和勺子等，他们必须从可看到的相应系列的一堆物体中辨认。2.一系列用硬纸板做的几何图形剪贴画。（A）简单和对称的：圆、椭圆、正方形、矩形、菱形、三角形和十字等。[①]（B）更复杂但仍然是对称的：星形、洛林十字架（译者注：两横一竖，两横上短下长）、纳粹十字标识、简单半圆、弦上有缺口的半圆（见图1）等。（C）非对称但以直线为边：不同形状的梯形等。（D）大量纯粹的拓扑形状：有一至两个洞穿过的不规则形状、闭合或开口的环和两个相缠绕的环等。

为了消除偶然性的成分，当儿童命名过这个物体之后，要求他从一系列图形中辨认出他所感受到的物体。或者，向儿童展示一系列的图画或仅仅要求他们画下感受到的物体。我们还使用（虽然仅仅作为辅助）平面上用卡住的火柴棍组成的形状，如正方形、三角形等，和由硬纸板剪成的字母。木头凿出的轮廓比火柴棍要好用。儿童倾向于仅仅摸一下凹槽，而不是进行完全的触觉探索，而且在这种情况下，我们可以研究图形或图画和它们本身的简单运动之间的相关。

儿童面临的问题包含两个不同的任务。其一，把触-动知觉转换为视觉；其二，将视觉数据和运动探索结果合并起来构建视觉想象。

当被试必须从他看到的许多物体中辨认出那个他能感觉到但不能看到的物体时，这是他面临的第一个任务。在这一点上值得一提的是，对2—4岁的儿童来说，从触-动

① 直径为11—15厘米的圆，边长为10厘米的正方形等。

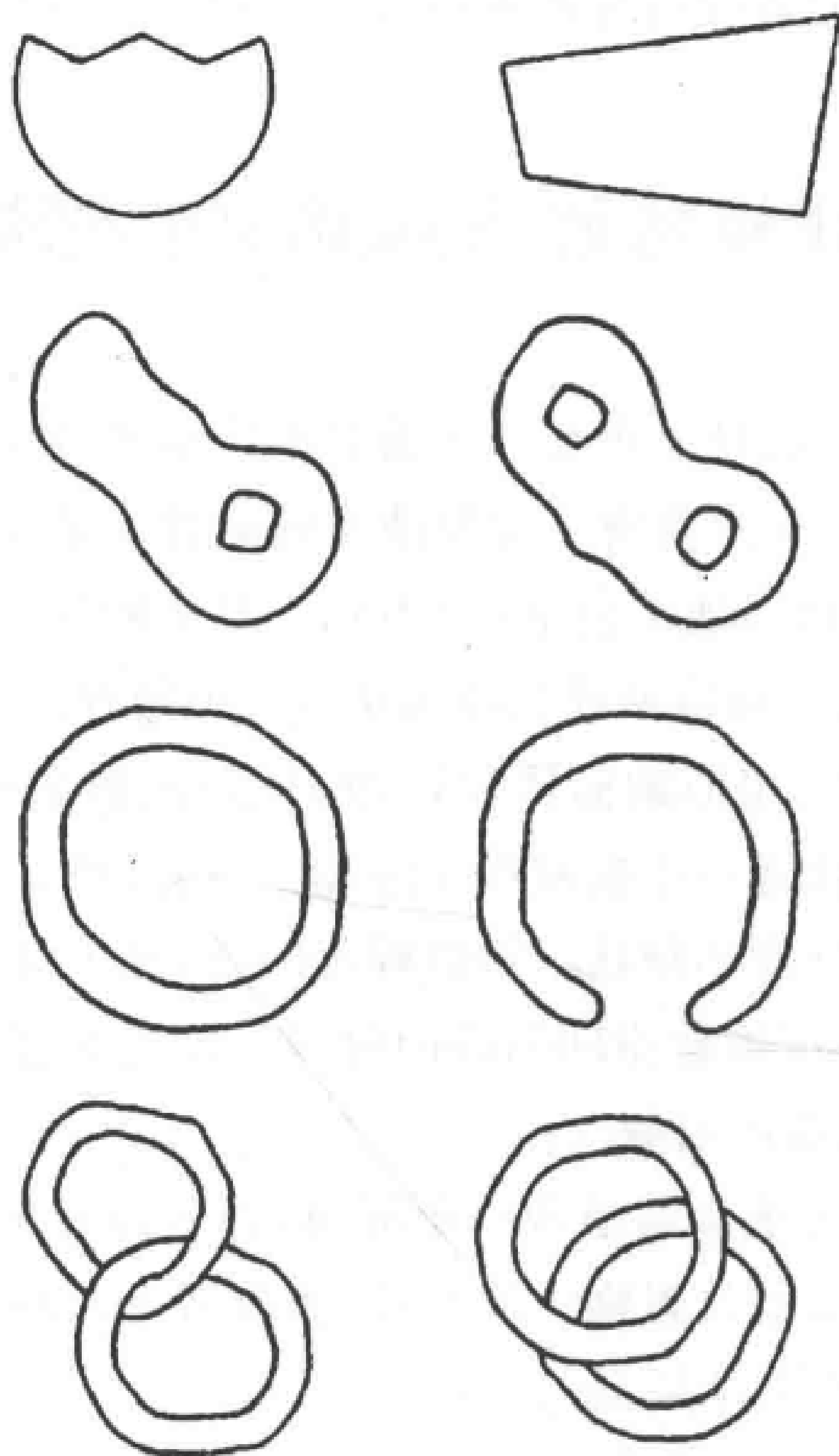


图 1　硬纸板几何图形剪贴画

知觉到视觉模式的转换绝不是一项新的任务。3—5个月的儿童(此年龄后触觉和视觉可以协作)已经养成了通过其触觉或动觉来对自己操纵的手或物体产生视知觉的习惯。[①]除此之外,模仿的常规发展,尤其是对面部运动的模仿,导致了这种一致性的获得。对于孩子自己的身体,他们不能像看到别人的身体那样看到自己的,只能通过自己的情况运用触-动觉的方式。[②]因此,我们期待找寻仅仅通过很早就形成的触觉探索而识别物体的能力。这种任务对于表征阶段的儿童来说,唯一的新的特征来自它现在的呈现方式不一样了,即需要言语的帮助。

对于第二个任务,对儿童而言,构建一个图形面临着新的问题,而正是因为这个问题,现有研究才单独关注了这一点。我们发现一旦物体变得复杂得难以辨认(尤其是遇到用硬纸板剪切的二维几何图形时),儿童就不再能仅仅通过触摸辨认出形状了。相反,他必须对它进行一次触觉的探索。在这种情况下,为了辨别或画出这个物体,儿童自己建构对它的视觉想象。[③]然后,在这里我们可以看到不仅是从触-动觉向视知觉的转换,而且还有触-动觉向视觉形象的转换。

---

① 见 *The Origin of Intelligence in the Child*, London, 1953.

② 见 *Play, Dreams and Imitation in Childhood*, 1951.

③ 很有趣的是,我们发现画出物体跟辨别出它同样困难。

因为它说明了如何感知到已知形状或多或少地被想象快速地探索，而且与此同时，空间关系是如何在后来落后于那些已知的知觉的，对我们来说，分析这个转换似乎是研究空间概念非常有趣的简介。它展示了心理想象出现得多早，同时也揭示了它的表面特征，即使是相对于从直觉的立场理解它们之间的关系。

这些实验的结果如下：在第一阶段，平均年龄为3岁6个月到4岁，儿童或多或少能够辨认出相似的物体，但是不能辨认出几何欧几里得图形。在第二阶段（4岁6个月至6或7岁）发展到可以区分开欧几里得图形。而对获得复杂图形的综合要等到第三阶段（6,6;7）。

在2岁6个月以下（第零阶段），隐藏形状的实验是不可能完成的，尽管这不能排除实验条件外儿童具备自发的触知觉，这些心理功能在儿童非常小（蒙住眼睛被发现，效果更差）的时候就已经开始尝试了。

我们可以把一个阶段分为两个亚阶段。在1A亚阶段（Substage ⅠA[①]）儿童可以辨认出相似的物体，却只能在实践中（参加实验的儿童没有参加过绘画训练或蒙特梭利训练）辨认出简单叠加的形状——尽管视觉和形状相对应。在第一阶段第二亚阶段（3;6-4岁），尽管开始了对图形的抽象，但让我们非常好奇的是，儿童首先辨别出的不是欧几里得图形而是拓扑图形。因此，圆和正方形不能被辨别出来，因为它们都是闭合的形状，尽管儿童可以区分出它们和开放图形的差别。直线和角当前都不能被辨别。

在第一阶段，触觉探索一直是相对被动的。儿童只是简单地用双手抓住物体，并对偶然的发现做出反应，例如用手穿过钥匙扣的孔时等。在第一阶段第二亚阶段，形状就被当成三维物体来探索了。

在第二阶段我们可以区分出三个相继发生的水平。在1B亚阶段和2A亚阶段（4岁至4岁6个月）之间，直线和曲线组成的形状出现了很大的差异，而直线组成的不同形状（正方形、矩形等）或曲线组成的形状（圆、椭圆等）之间却并非不同。借助于画画的表征是可能的（开始于1B亚阶段），但稍微落后于通过选择进行辨认。触觉探索一直是整体性的，但是当他们遇到偶然的指示时才会使用它。在2A亚阶段（4岁6个月至5岁或平均5岁6个月），儿童可以通过他们的角度，甚至是维度（圆和椭圆或正方形和矩形）观察到形状渐进的差别。识别和绘画仍然存在微小的间隙，但是后者越来越精确了。触-动觉探索标志着寻找识别的重要线索。最后，在2B亚阶段（5岁至5岁6个月）伴随着一些犹豫，儿童可以相继发现菱形和梯形，也能够区分出十字架和星形，但是对复杂形状的表征还存在着许多错误。探索变得更加主动，但是不总是系统的。

最后，第三阶段开始于6岁6个月至7岁，以系统的探索而著称，毫无疑问是受到了现在被恰当地称之为运算的影响，它在此阶段存在于所有领域。儿童现在可以区分出复杂形状，例如纳粹十字标识，而且能同时考虑到顺序和距离。从这一阶段开始，想象（绘画等）和再认的能力明确相关，就好像关系对地点的适应在稳定的思维控制之下被直接表达为一个更灵活的象征。

① "Substage ⅠA"译为"1A亚阶段"，"Substage ⅠB"译为"1B亚阶段"，均照此翻译。——译者注

第四节　第一阶段:识别相似物体,然后能识别拓扑形状而不能识别欧几里得形状

此阶段的有趣之处在于,儿童第一次因为缺乏足够的探索而不能提取形状,同时又能够轻松地识别他摸到的东西。接着,当孩子建立起提取形状的能力时,他不能提取那些超出拓扑关系的形状,而且不能重构欧几里得形状。这引发了第一个问题:为什么当儿童期望他们被以模型呈现的形状指导时,探索运动会缺失?因为没有什么会比用手指追随正方形或圆的轮廓出现得更早。第二个问题仍然来自第二阶段观察到的反应:形状的提取物包含什么,为什么拓扑形状在心理上比欧几里得形状表现得简单?

下面是1A亚阶段的一些例子。

克瑞(2;10)[①]　识别一个球、一支铅笔、一把钥匙、第二支铅笔、剪刀(但不能识别勺子)。但是他不能从一系列模型中辨认出用硬纸板做的圆,也不能画出它。他对于椭圆、有缺口的半圆和没有缺口的半圆的反应与之相同。

丹(3;0)　能够以相同的方式识别物体——拿起它们并在双手之间传递。拿起一个三角形,但是并没有尝试去探索它。"你知道它是哪一个吗?——*不知道*[②](接着尝试,他用双手抓住它并翻转了一下)。——你能画出它吗?——*可以*(涂鸦)。——(给他许多模型来选择)是这个吗(正方形)?——*是的*。——或者是这个吗(菱形)?——*不是*。——看着这些,是哪一个?——*这个*(正方形)。"

椭圆:用左手拿起并感受表面,接着认为自己可以从模型中识别出带缺口的半圆。"不是这个吗(常规半圆)?——*不,是那个*(带缺口的半圆)。"

正方形:"*我什么都看不到*。——画出它。——(涂鸦)——(展示圆、椭圆和正方形模型)是哪一个?——*那一个*(椭圆)。"

圆:最开始很被动,甚至没有轻微的运动。接着开始用手掌探索,而不用手指触摸。画画(涂鸦)。从三个模型(椭圆、圆和正方形)中选择了椭圆。

有缺口的半圆:拿起它并把手指放在缺口处。根据要点,从四个模型中选择了三角形。"好好看一下。——*那个*(椭圆)。——不是那一个吗(菱形)?——*不是*。——再感觉一下。——(用手摩挲圆的部件。)——*那一个*(指着椭圆)。"

常规半圆:在拿到半圆以后,根据它的一个角选择一个三角形。

鲁特(3;3)　犹豫了一阵后,能够识别出钥匙和梳子,但是主观上喜欢在识别

① 括号中第一个数字表示年龄,第二个数字表示月龄,如(2;10)表示这个孩子是2岁零10个月大。——译者注

② 有关实验者和儿童的对话,按原文格式在双引号中呈现,正常字体为实验者所说,斜体为被试儿童的回答。本书均以这种方式呈现。——译者注

形状之前踌躇两次。在桌子上放置正方形、圆、有缺口的半圆和三角形后,我们又把一个正方形放到他的手里,然后请他把这个正方形放到相应的形状上(他的眼睛睁得很大,所有触知觉的考虑都被丢在了一边)。鲁特的确做到了这个,但是紧接着又把一个三角形先放在圆上,又放在正方形上,还把一个环形放在正方形上等。然而,练习之后他能成功地把所有的形状(包括椭圆、菱形等)放置在相应的模型上,而且不会受到建议的误导,如把常规半圆放到哪儿,因为这里没有与之对应的模型。但是一旦把触知觉的条件强加给他,就再次完全迷惑了。

安德(3;5) 铅笔:双手拿着,翻转并触摸笔尖,接着说,"它是木头。——(展示钥匙、梳子和铅笔。)是哪一个? ——(立即指向铅笔。)"钥匙:感受它,翻转,用右手拿着,手指穿过钥匙扣的孔,告诉我们:"*钥匙!*"梳子:正确。

圆:翻转,将纸片平放在手掌之间然后用两根手指摸厚度:"这是个盒子。——看着它们(圆、正方形和椭圆),是哪一个? ——*那个*(椭圆)。"对于正方形的反应与之完全一致。拿着它,手环绕着它而不探索:"也是个盒子。——哪一个? ——(先指向圆,手里的东西替换了以后再次感受。)——*那个*(椭圆)。——不是那个吗? ——*不是*。"

这些反应的主要特征很清楚。儿童能够明白这些问题,他展示了自己有能力识别摆在自己面前的大多数相似的物体。但是当涉及集合形状时,他不能重构完整的图形,而且根据他是否感受到一个弯曲的边或直边或点,他会把摸到的形状比拟成一个拥有相同特征的视觉形状,不受物体其余部分的影响,或者试图将全部的结构整合起来。因此丹认为三角形和正方形相同,因为它其中的一个角;认为椭圆和有缺口的半圆相同,因为它们都有弯曲的轮廓;正方形、圆和椭圆相同(不能区分出直线和曲线);认为有缺口的半圆和三角形相同,因为它们都有顶点;等等。

这些错误很明显是由于对物体的探索不够充分。用于识别几何形状的探索和识别相似物体的效用不同。后者大体上仅仅需要善于领会的手势,或者是几乎不能与以下这些区分开来的运动:双手拿着,双手间传递,触摸,用双手按压终点,用手指戳钥匙扣的孔等。

但是为了辨认几何形状,孩子需要探索整个轮廓,而他满足于仅仅握住卡片,感受它们的表面,而且只触摸轮廓的一部分。结果,组合形状没能从熟悉的物体中区分开来,这只有通过善于领会且整体地探索才能辨别出来。

但是这仅仅解释了一部分,我们仍然需要继续探讨为什么探索这些不易识别的几何形状。可能我们想当然地认为,在不需要更多探索的情况下,常规的善于领会的运动对于识别相似物体绝对是足够的。

自动抓住一个球、一支铅笔、一把钥匙或一把梳子的行为涉及一些触-动觉适应或顺化(adaptation or accommodation),这使得同时区分出涉及的物体是有可能的。那么为

什么这种机制到了探索几何形状轮廓的时候就不发生作用了,不能识别出直线和角,不能识别相交或平行线,不能估计三角形的数量和大小了呢？常规答案是儿童不能"分析"它的知觉而且不能"抽象"。但是,这些概念到底是什么意思?

"分析"和第二节所做出的区分之间是有关系的,知觉和知觉活动之间变得相关。知觉活动开始于"去中心化"(decentration)。触摸一个正方形的任意一部分都涉及了集中(centration),导致了最初的触知觉。触摸另一个部分涉及另一个集中,产生了又一个知觉,等等。但是这是不完整的,每一个集中都会导致对接触部分的过分强调,这是以牺牲集中部分的外围为代价的。

因此,从一个集中到另一集中(或去中心)的过程倾向于互相修订或调节集中中心,而且去中心的次数越多,最终知觉就越精确。但是这样一个过程相应地也意味着活动和某种程度上的运动相称(超过纯粹知觉的范围),结果成为其他许多活跃运动的基础,如从一个知觉数据到另一个的"转换"、"比较"(相互转换)、"置换"(暂时的转换)等。正是这个组合构成了知觉活动,这经常涉及相当模糊的术语"分析"。

就本阶段的儿童而言,缺乏探索可能因此被解释为知觉活动本身大体上缺乏的结果。这意味着儿童的知觉仍然是被动的或静止的,而不是被整合为趋向于把它们捆绑在一起的感知运动协调体系。

通过回溯之前的研究,人们可以理解在儿童最初的几个月,接收视觉形状时什么最有可能发生。通过眼睛探索远比通过触摸探索简单,简单来讲是因为,相对于触觉集中,视觉集中可以同时包含许多成分,而且因此视觉形状比触觉形状建立得更快。但是,两种情况下的构建过程都受到怀疑,尽管两者之间间隔一年或两年。因此,几何形状的触知觉过程和第一节里描述的最初的三个时期的视知觉是相当一致的。

而且,我们可能指出这种探索或知觉活动的缺乏共同解释了儿童在绘画中的困难。上述案例中的儿童仅仅能涂鸦,连最简单的形状(圆、正方形)都不能复制。这个反应就是知觉运动,它和纯粹及简单的知觉不同,是模仿的来源。模仿倾向于延长动觉适应的过程,因此也是想象的根源,想象本身就仅仅是一个整合的模仿。因为不能够探索表面,儿童既不能从模型中辨认出它,也不能画出它的形状。

现在,我们可以以一个更好的姿态看待当前对形状的"抽象"这个术语的含义。人们经常说的好像几何形状是一个物体的属性,像它的重量或颜色,而且好像形状的抽象意味着从物体中提取形状,这个过程和提取它的物理属性相似。这种看问题的方式并不全是错的,因为并不存在一个空间扩展到物理范围上,而且实际上是与物体的质量分离的,等。换句话说,并不与它整体全部的主要特征相分离。但这种观点是受限制的,对于形状的抽象来说,除了抽象正在研究的物体的内部特征,还有许多其他的东西。首先存在一种和反应或反应的协调相关的抽象,由主体完成,从一开始就清楚这样的事实是很有必要的,那就是如果想要解释大一些的孩子的几何思维是如何快速地超越他们的经验的。对很小的孩子的触-动觉探索和知觉活动的分析,向我们展示了相似物体的

形状识别,这是对此层级的特殊抓握运动适应的结果。因此,形状并不仅仅存在于物体的内部,还是主体在抓握客体时的运动结果。仅仅是因为这些运动从一开始就被协调起来,因此获取的形状才是一个简单的整体,而不是一系列思考后整合在一起的离散成分。

下一个问题是究竟对几何形状的"抽象"发生的基础仅仅是物体本身,还是相对于物体的主体运动。1B亚阶段通过揭示第一次几何识别本质上与获取相似物体的不同,向我们回答了这个问题。因为,在这个亚阶段,可以观察到极具启发性的反应。儿童第一次识别几何图形时,非常值得注意的并不是从表面特征到常识性的知觉,例如直线、曲线、角等,而是通过抽象的数学分析所展示的那些更加原始的特征,如封闭、开放、交织等。

安妮(3;5) 可以立即识别铅笔、钥匙和梳子。接着给她一个圆,她用双手拿着,而且随机地触摸(放在手掌之间摩挲等)。安妮似乎识别了它,但仍然在摸一个正方形的时候指向一个圆。"你非常确定这个(正方形)和那个(圆)相同吗?(开始她把物体放在手掌之间,然后手指展开,接着轮流摸)——*是的,相当确定*。"接着,向她展示了圆和正方形,而且要求她画出来。她画出两个封闭的图形,都是椭圆的,而且彼此很相似,唯一不同的是正方形要稍微瘦长一些(两个模型都放在她前面)。

椭圆:她抓住硬纸板,像摸一块肥皂一样摸着,然后从展示的四个模型中选出了正确的一个。接着,她在拿着三角形的时候选择了另一个椭圆,她通过手掌来触摸顶点而只探索了部分轮廓。她称这个三角形"*是个花盆(园艺工具)*",接着,手里拿上另一个椭圆后,她用一只手掌抚摸边缘并说道:"*这也是一个花盆*。"有缺口的半圆先被她比作一个圆,而我们把她的手指放到缺口之间后,她正确地识别了出来。

环:安妮用手指穿过孔就立即识别出了这个形状。对于同样大小的圆,她可以识别出这就是填满了的环。开放的半环也能够识别,接着可以识别有一个洞的不规则表面,再接着可以识别有两个洞的不规则表面,最终可以识别两个交叉的环(这个最终可以从两个独立的环中区分开来)。

唐(3;6) 可以通过视觉叠加识别出所有形状。在此之后,我们发展到触觉。他识别出圆(双手拿着,轻轻地转,越过直径来摸),但没有识别出椭圆,甚至没有识别出带缺口的半圆(同时摸顶点和弯曲的边)。与此相反,他能分辨环和圆,和开放的半环以及有一或两个洞的表面。

马尔(3;10) 能毫不犹豫地识别出有一个洞的表面和封闭的环,可以在犹豫后识别出开放的环和交叉的环。对于圆,他有时可以做出正确选择,有时又会选择椭圆。矩形和三角形都被比拟成拉长的椭圆。

西姆(4;0) 对于圆能做出正确的选择,但是却不能画出它(涂鸦)。手把手地指导了一次后,他可以独立画出一个封闭的图形。他能轻松地辨认出开放的环、两

个交叉的环和有一个洞的不规则表面。但是他拒绝把三角形放置到包围圆、正方形和三角形的三个模型中去，尽管他用双手拿着它会合的边时会用两个食指摸它的顶点。

因此，我们可以确切地说，一方面这些孩子中的任意一个都能轻易地区分出开放图形和闭合图形，带有一到两个洞的表面或没有洞的表面，圆和环，交叉的环和分离的环，等等。换句话说，开放和闭合图形的拓扑关系，交叉和分离的形状都可以被正确地区分。另一方面，简单的欧几里得形状却仍然不能区分，和最初可以看到区分圆的例子不同，这种区分能扩展多少还有待判定。

在许多案例中，圆可以从许多图形中被区分出来，特别是它从没被比拟为正方形或直线形状，但是有时会被误认为是椭圆(马尔)。尽管摸到的圆被当成视觉上获得的圆或椭圆，但并不是引起这种比较的唯一形状。安妮把正方形当作圆，而且在拿着它的时候说自己很确定它就是个圆。当她画这个正方形时(现在是视觉输入)，她画出了一个近似于圆的图形。与此相似，椭圆有时可以被正确识别，有时被当作圆，然而视觉输入的椭圆被当作三角形(马尔和安妮)或矩形(马尔)，这时只摸没看。我们可以简单地说，这方面出现了选择的平衡，它的附加条件是弯曲的形状包含了所有其他的简单形状(正方形、矩形和三角形)。换句话说，弯曲的形状在此水平上只能被部分区分开来，儿童注意到的主要特征是它们的封闭结构。正方形、矩形、三角形也是封闭的，但是它们表现出的复杂性(直线、平行线和角)仍然与本阶段独特的几何概念不相容。另一方面，圆或椭圆都是封闭的，且都不具备这些附加的复杂性，正是因为这个，它们表现出了特殊的魔力。绘画似乎在确认这种解释(参见安妮)，在第二章我们还会回到这一点。此时我们已经可以说，所显示的对于弯曲形状的相对偏好，使我们确认了此水平空间表征关系特征的拓扑本质。

我们现在可以回答这个很容易的问题，与第一阶段第一亚阶段相联系，对形状的“提取”发展起来了。如果抽象仅仅意味着从物体中提取其最突出的形态特征，那么拓扑关系被首先挑出的可能性有多大呢？尤其是这种选择保持一致的可能性有多大？是不是直线边或角呈现的特征真的比开放或闭合或交错的关系多很多？

但是既然从物体中抽象出形状是依靠主体对物体活动的反应，例如，一步一步追随它的轮廓，环绕它，穿过它，分离它等，那么从知觉的角度来看，相对于最简单的欧几里得关系，这些邻近或分离(来源于开放或闭合)和交错的关系具有了相当深远的重要性。

同样很好理解的是和最基本的活动形式相联系的，尤其是在被动和整体水平下尽可能原始的探索活动，值得追问的是，这些基础的关系为何长期未得到几何学领域的关注。我们想，可能是因为几何学领域开始关注的是测量问题，而在几何学的历史上着手于对这些基本概念进行研究要相对晚一些。

第五节　第二阶段：对欧几里得形状识别的进步

我们已经观察到了，恰当地说是在第一阶段第二亚阶段，适于抓握的动作带来的首次区分包含了触-动知觉活动的开始。尽管它的特征很整体化且难以区分，但它仍然使得抽象出初级拓扑形状成为可能。在第二阶段，随着这种知觉活动中触觉集中协调的进步，这仍然保持为图形和心理形象，欧几里得形状逐渐能通过触觉被识别。同样，绘画能力也有进步的迹象。

尽管儿童对形状的探索仍然大体上是整体的，在1B亚阶段和2A亚阶段之间的某个时间点，他开始注意到某个线索或指示，这或多或少是偶然发生的。他能够依靠这个区分开弯曲的形状和直线构成的形状和角，尽管在没有系统地探索时他不能分辨出不同大小的这些形状。绘画呈现了大体上相似的特征，但仍然稍稍滞后于触觉辨认。这个过渡期在4岁到4岁零6个月之间可以被替换。

卢(4;1)　可以立即识别铅笔、钥匙和梳子。他也可以没有犹豫地识别出有一两个洞的平面、开放和闭合的环等。

他能识别出圆且可以画出来，对于椭圆也是这样(画的时候稍微拉长)。画正方形时，一个角差不多是直角，其他角有些弯，但是两次情况只能识别出一次。三角形、菱形等都混在一起。他对于有缺口的半圆的反应很有趣：他画了一个完整的圆，并用点来装饰周围。

齐(4;11)　实验开始的时候，因为齐不能立即区分出圆和正方形，他的反应应该位于1B亚阶段和当前水平之间。这两者他都画得像拥有曲边的三角形，然而他把这两个形状都描述为“房子”。接下来，他画了三角形本身，画风与之相似。但是在探索了矩形的形状后，他能够区分开直线组成的形状和曲线组成的形状。他画的矩形相当正确，有四条接近直线的边和四个几乎是直角的角。接下来，椭圆被呈现为有着曲边的四边形，但是当他结束绘画并连接终点时会呈现一个大黑点。“你为什么画一个大黑点？——*那是为了封闭它!*”梯形画得更有趣，或者由三个并列的成分组成，或者由两条有趣的直线从内部一分为二。

这是一个复杂的情况，因为有意识地区分直线和曲线形状，仅仅在实际的实验中才开始出现，尽管在这两类之间，唯一成功的识别是矩形和程度稍差的椭圆。

拉姆(4;10)　在这种情况下，会使用指导运动的方法(木板印刷形状)。他能立即识别出正方形和圆而且正确地画出来。对于三角形，拉姆说：“*它是屋顶。*”然后画得像一个开放的角。所有的直线图形(矩形、菱形和十字形等)都被比作正方形，而且被这样画出来，然而椭圆被他叫作“*一个小正方形*”，但画得却像个圆。

莱奥(4;9)　拿到正方形时,他双手都在运动,部分环绕着它,接着仍然拿着说:"它是圆。"但是他能从四个形状(包括圆)中识别出它。接着,他探索了菱形后说:"我知道它是啥。它是圆。——像这个(圆)?——不是。——像这个(一个接一个地指三个形状)?——是这个(他指向正方形,然后换成菱形,然后换成三角形)。"

圆:"它是圆(指向正确的)。"

三角形:"它是圆,它是房顶。——指向它(从四个中)。——(指出正确的)我认为我能感觉到它是什么,它是直直的什么东西。"

接着向他展示(视觉上)一个正方形和一个圆:"它们都是圆。——这两个一样吗?——不,不是一样的东西。——那么它们像什么?——它们都是圆。这个像圆(指向另一个圆),这一个和它不一样。"他画圆相当标准,然而画的正方形却像是某种椭圆,而且有刻意使得边不平行的迹象。

因此,中级水平的这些特征是很明显的。首先,探索比第一阶段更加主动,儿童不再满足于仅仅抓住或只是感受一个物体的表面,而不去进行更多的运动。

他调查并探索它,尽管仍然用一种整体和偶然的方式,并没有试图追随全部的轮廓,但是用这种方法可以获得大量的线索和指示,并认识到这些线索的重要性。

这种知觉活动增加的结果不仅导致了实验中呈现的完全可以掌控的一两个拓扑关系,而且我们还可以看到区分直线和曲线形状的开端,后者通过它们的角来识别。卢展示了在极其简单形状下的这种区分,从直线图形中区分圆和椭圆,但却仍然不能将圆和椭圆区分开来,在他的画中用同一个模型来代表它们,即有一个直角的闭合形状。齐能区分出圆和椭圆,但对其他形状很迷糊。拉姆能识别出圆、正方形和三角形,但却不能识别出其他的。莱奥能够清楚地区分三角形和"圆圆的形状",但同时也能区分出圆的"圆圆的形状"和其他与之不同的"圆圆的形状",如正方形等。简单地说,两大类形状之间的差别可以被区分,即曲线或没有角的,直线或有角的,尽管在这两个集合内细分很难被注意到。

尽管绘画的发展程度不高,不如从触-动觉转换到视觉的过程发展程度高,但绘画对于这些整体的认知和探索仍然具有珍贵的指导意义。现在的绘画确实比上个水平进步很多,因为涂鸦不再像第2B亚阶段那样随机了。相反,儿童这时偶然会画那些相当明显的形状,尽管它们看起来都很相似。只有卢能够画出一个正方形,但是这是因为那些木刻的凹槽指导他进行探索活动。其余的孩子都仅仅把正方形画成圆圆的形状,或多或少地被分解为直线(莱奥)或尝试重建三角形(卢和齐)。齐能够画出矩形,而且努力去分析菱形,但是使剩余的形状看起来非常相似。拉姆把这个三角形重构为开放的锐角,尽管图画的大部分强调了闭合的拓扑成分,就像齐的异常椭圆包含了一个大黑点来"闭合它"。简单说,相对于视觉,绘画更多地表达了儿童的探索性运动,尽管他后来

能看到模型(见莱奥)。

首先从触觉识别中获取的信息,和接下来从绘画中获取的信息,揭露出能够抽象出形状中的一个新的成分。毫无疑问,正是对角的分析标志着从对拓扑关系的知觉向对欧几里得关系知觉的转变。对儿童来说,并不是能够与圆形形成对比的直线本身,而是直线的结合才组成了一个角。那么,现在是否角的发现并不是从物体中直接抽象出形状的典型例子呢?正如沃克尔特(Volkelt)[①]所展示的,绘画和建模展示了这个水平的多重感官特征,触觉、动觉和视觉马上会从触知觉中分离出来。而且莱奥的"它是个直直的东西"的言论正是角的定义,角说明了沃克尔特的理论,同时也揭示了在建构初次的欧几里得表征形状时试探的重要性。

但是这绝没有解决好这个问题。把角看成是两条交叉的直线(拉姆的绘画),尤其是把它合并于一个封闭的形状中,儿童必须能够重构它,这个必要性说明了抽象来自行动,而非来源于物体本身。从这个角度来讲,角是双向活动(眼睛和手)联结的产物。不引入这些概念,这些带有"直线思想"的儿童永远不能超越"直直的东西"的简单印象。可以承认的是,带有空间和物理特性的物体在鉴别形状时发挥了点作用。但是由于对拓扑关系的优先构建,这些特性被分解成系统化运动的各个部分,或者说分解成较小的某些部分,对这些内容的绘画是通过视觉表现来完成的。正是基于这个原因,像之前所说的那样,从特殊的行动中所抽象出来的欧几里得形状和从这个涉及具体事物的行动中所提取的一样多。因此,赋予这些结构一个几何特征的正是儿童自己从一开始的行动,而不是简单的物理特征。

在2A亚阶段期间的进步可以从两个领域看到。探索变得更加积极,尤其是在探索重要线索时,尽管到目前为止这种探索还不够彻底和系统。结果是,对有角的形状的区分有很大提升,但对它们的识别仍未取得重大突破。相似的是,绘画水平较前一阶段也有了很大提升,但始终滞后于识别水平。平均来说,此亚阶段大概开始于4岁零6个月。

阿斯特(3;2,非常早熟) 能够识别圆:"一个球。"带缺口的半圆:"一个耙子。"菱形(用大拇指和食指划过两条边,从中间开始以至于两点相交):"一个教堂。"三角形、十字形和四点的星星。她不能识别椭圆(比作圆)和更复杂的形状。但她能更轻松地识别出只包围拓扑关系的不规则形状,例如有洞的平面和开放或闭合的环。对于一个开放的环,阿斯特立即说:"*不,它不是那个(封闭的环),因为它是开放的。*"

尽管阿斯特能成功地做出了这些比较,相对于她的年龄已经很不平凡了,但她对欧几里得图形的绘画仍然属于早期阶段。它的形状是弯曲的,以至于正方形表现为用一个拉长的椭圆来标记矩形的边。

---

① Volkelt, H. and Rabe, J., Einleitung zu Rabe: "Umgang mit Körpern von verschiederen Form und Farbe in frühester," Kindheit, VII /4, 1938, München.

阿姆(4;6)　快速地翻转正方形,用手和手指感受它。给她三角形的时候,她立即感受为三角。"你能画出它吗?——*可以,另外一个也可以画*(站在一个角落里画出一个圆,接着又画出一个像山丘的三角形,最后画了一个菱形。后两个图形与三角形一致,第一个与正方形一致)。"

能很快地辨认出其他的形状(圆、有缺口的半圆平面、椭圆和弯曲的三角形)。对于菱形有些犹豫,但是通过排除法能逐渐辨认出来。第二次画圆时先画了一个环形,然后又立即换成有四个角的图形。

埃里(4;4)　圆:"*它像个方向盘*(正确地画出来)。"椭圆:"*这是个硬纸板做的鸡蛋*(正确地画出来)。"三角形:立即说道:"*像一块小奶酪*(如一块三角形的加工奶酪)。"然后,他探索了它的表面和轮廓(正确地画出来)。遇到菱形时犹豫了,尝试做画但不成功,最后画成了每个顶点都有一个角的椭圆形。他不能区分出十字形和三角形,他画的十字形只包围三角边。梯形:"*它大致像一小块奶酪*(三角形)。"但是埃里注意到它与被展示的视觉模型(它被刻意忽略了)不符,而且当进一步提问时不能识别出它。

开放和闭合的环和有一两个洞的平面的确能够被识别出来,但是后者却被画得很糟糕,像三角形,看上去像把之前的图形简单地加上一两个洞。交错的环能立即被识别出来,而且被画成有趣的圆。

德雷(4;7)　能识别出正方形、圆、半圆和椭圆等,但识别菱形有些困难。他用手指转了很多遍三角形,而且把它画成了有一条边较短的矩形,发表了这样的观点:"*它是个动物,像无轨电车*。"

韦耶(4;11)　能立即区分出正方形和三角形:"*因为它有这个和这个*(他进行了两项有趣的运动,都是以直线进行的)。"给他星星,他轮流摸着顶点,但是不在顶点之间停留,因此在正确的模型和五角星之间选择时会很犹豫。"*我不知道它是啥。我认为它是那个*。——它也可能是那个(五角星)?——*是的*。——是这个吗(圆)?——*不是,因为它有顶点*。——是那个吗(星星)?——*是的*。"但是他不能下决心做出决定。十字形:"*它是星星*。——再试一次。——(他感受了角之间的部分)*它是十字形*。"

杰(5;0)　先把圆安静地放在手掌之间,然后画了一个正方形。接着,他探索了它,然后理解识别出来。三角形、椭圆、半圆和十字形都能被识别出来且画对,但是识别菱形有困难,而且开始被画成一个开放的矩形,接着被画成带着一个尖尖帽子的封闭矩形。

查尔(5;2)　能成功识别出简单图形,但在一系列的探索后不能识别出椭圆:"*它是两个屋顶*。"接着,他画出了同一基点的两个相反的三角形。他对带有半圆的弯曲的三角形感到困惑。

哈斯(5;8到5;11)　作为主体能够重复地观察,就为了比较不同方法的结果差

异。他能从硬纸板做的图形中识别出圆、椭圆、正方形和矩形，以及所有包含包围拓扑关系的不规则形状，而且全都能画对。但他最初没能识别出三角形，而且把它画成一个只有三条边的未完成的十字！接着他又试了一次，而且再次把它画成了有三个角和弯曲边的形状。他先把菱形画成了一个正方形，接着又把它画成了长边中间有两个小图像的矩形，最后画成的图形介于正方形和矩形之间。他把洛林十字架画得就像一个普通的十字架，但却可以正确地识别。

这之后，仍然是5岁8个月大的时候，让他除去粘在木头板上的橡皮泥组成的图形，这引发了儿童活动的简化，紧接着这个活动被确切地表现为绘画。正方形起初被画成直角三角形，接着又画对了。相反，三角形最初被画成正方形，接着又画对了。矩形被画成被一条直线一分为二的椭圆形状，接着又被加了一个三角形。最终的绘画展示了两个相对的三角形。十字形被画成没有协调好的直角。菱形被表现为斜着一分为二的正方形，接着改成位于一角的正方形。

给5岁11个月的哈斯同样的模型，这一次是刻在木头上的，因此它的运动被凹槽指引着。正方形和三角形此时可以被笔直地画对。十字形先被画成一个直角，随后被画成一对直角，因此使其有三个边。矩形被画对了，而菱形再次被画成了一个正方形。

为了更好地理解这些结果，我们着实需要更深入地鉴别，依据触觉探索与我们在第二章讨论的依据常规视知觉所获得的这些绘画间的显著相似性。我们可以观察到：尽管绘画仍然追随在视觉识别之后，例如在触-动知觉以视觉形式表现之后，然而它紧随其后（除了阿斯特这一个例外，阿斯特不管是在识别还是绘画上都很早熟），而且在这整个阶段都不停地进步。伴随着轻微的滞后性的平行现象似乎阐明了知觉活动中想象的形成和形状的“抽象”两个问题。

在表征想象的情况下（我们应该返回到第二章，这与恰当的绘画相联系），很清楚地看到上述绘画过程，没能像知觉活动本身一样充分表达视觉和触觉上获取的信息。换句话来说，像心理想象一样，绘画并不是常规知觉的简单拓展，而是运动、鉴别、重构和比较等的综合，而且伴随着知觉和所谓的知觉活动。我们都知道这和自发的绘画有联系，吕屈埃（Luquet）研究过“失败的现实”和“智慧现实”阶段的这个问题。像心理想象一样，绘画是对物体的内部和外部的模仿，而且并不仅仅是一个知觉“照相”，然而模仿本质上具有延长包围知觉活动的顺化和适应的作用。这解释了包含儿童的触-动觉探索的适应活动和把对象画出来（二者之间存在的时间滞后性可以解释为绘画需要一定的技术）之间的类似性。在这种联系下，哈斯的例子就非常突出了。他的每一幅画在某种程度上都是对他探索活动的直接延续，接着对被使用的不同的技术进行修正。

在“抽象”的情形中关注以下这个问题是很值得的：即使是在这种形状辨别的相对成熟的时期，儿童是如何从他能够提取的物体中提取形状，而不仅仅是在想象中重构，但是实际上是在他自己反应的过程中重构的。形状的提取依照物体，同时来源于活

动。在简单形状的例子中,例如正方形、矩形和圆等,这种活动包含于组合这些同一性中(例如正方形边的相等性、矩形相反的边、圆的半径和直角等)。然而,在这些简单的例子中,这种重构导致了物体一定程度上被模仿,从而造成了直接从物体本身提取表征的幻象。另一方面,对于更复杂的图形来说,重构的成分是直接可以看到的。

最能说明这一点的例子是菱形,因为它引起了识别和绘画上的双重困难。从知觉的角度来看,菱形似乎是一个相对"优良"的形状,因为它是双重对称的。但是使儿童感到震惊的并不是它沿着两条轴对称。在这方面,对儿童来说,有时候菱形是给他们困难对称感觉的一个很好的例子,儿童会以为它调整了本应具备的顺序关系。儿童开始会把它画成圆或矩形,但会用一个点或三角形来修饰(或用一条线,如德雷的"无轨电车"),或在侧面边的腰部加上两条附加线来代表钝角(哈斯),或者像一个斜着一分为二的正方形,或者是一个右边开放的三角形(可能象征着边的倾斜度),最终像两个有相同底边但方向相反的背对着的三角(这实际上是正确的)。

现在这些特别的建构绝不会只导致触-动知觉探索本身。正如我们在第二章看到的:当根据视觉模型来画菱形时,确实可以获得相同的结果。菱形的例子(或者哈斯的三角形及类似的东西)展示了抽象形状范围的东西扩大后确实暗含了其与儿童所建构的格式的相似性,儿童对这些格式的顺化变得足够灵活,以至于可以对外在模型进行正确的模仿。

在2B亚阶段的过程中,分析变得几乎完整了。例如,儿童不再仅仅满足于把胳膊放在一个十字形或星形的末端上,而是扩展到探索交界处,而且注意到它究竟是直角还是锐角。然而,尽管有能力完成,但这种分析仍然是经验性质的,以至于在复杂图形的情况下还不能在获得以协调数据的推理为基础的综合。只有到了7岁左右,运算的发展才导致了对直接探索的演绎推理的出现。以下是来自2B亚阶段的一些例子。

马尔(5;2) 探索了菱形后,轮流描述了每个边:"*这是斜的,这是斜的,这是斜的,这也是斜的。*"他拒绝画出它,但却能从视觉模型中正确地识别出它,接着又正确地画出来。

梅(5;6) 能识别出简单的图形,并正确地画出来,包括十字形(在探索两根架子之后)。在洛林十字形的情况下,他追随着角而且正确地画出来了,除了两条平行的架子被画得一样长。对于菱形,他探索两个钝角和其中一个顶点。他的画有三个钝角和一个锐角,也因此没有呈轴对称。而对于纳粹十字形,他在探索了它的直角后,完成了一幅包含一个长垂直轴和三根横向的直线,这些连在直角上的线都很短。

米奥(5;6) 能够识别出十字形和四个顶点或六个顶点的星形。但是她不能正确地画出后面的两个形状,因为她不能返回到每个顶点的基础上。结果是她画的星星像太阳的象征,比如被无数个点环绕的圆。

韦厄(5;6) 能成功识别菱形(画的不对)、常规十字形和洛林十字形(但是却画出一个角上有一个点的梯形)。

纳特(6;1) 能够识别并画出简单图形,如菱形、常规十字形、梯形和四角星形:“*它是星星,因为它有很多顶点;十字形是正方形。*”但是纳粹十字形被画得像楼梯,每一个边都准备了四个对称的阶梯。

乌尔(6;11) *以顺时针方向翻转卡片做成的图形*:“*我已经搞清楚它了,我像这样转它们而且感受它们。*”菱形:“*它大致像个鸡蛋,但是却很尖。*”他用四个角画出它,每一对都是对称的,但每个边都有些凸起。他能成功辨认出矩形。给他一个半纳粹十字形,他既不能从一些模型中辨认出它,也不能画出来。

这些例子足够说明当缺乏操作指导时,完全的探索相当于什么。儿童探索一切事物,但是一直保持着进展(参见乌尔对其方法的解释),从未返回到对称状态以获得一个稳定的参考点。他用这种方式成功地重构了菱形,正如梅所说的一种“封闭”的四条“倾斜”的边。矩形的识别更加困难,是因为它倾斜的边相距更远(参见韦厄把两条边弄在一起)。对于纳粹十字形,他尝试了但最终完全失败了,因为儿童不能使架子弯成直角,也不能与其他的一个或常规的中心联系起来。一些被试(米奥)甚至不能应付星形,也是出于同样的原因。我们现在返回到第三阶段获得的回应,它展示了发展过程是如何在探索过程中的可逆协调中完成的。

第六节　第三阶段:运算协调

运算可以被定义为一个可以返回到起点的行动,而且它可以与其他也包含这些可逆的特征行动相结合。

即使是出于被触-动觉探索代表的简单行动范围的限制,注意到下面这点也是很有趣的。

随着绘画和表征变得更加确切,儿童开始对来自其开始兴起的知觉活动的过程做出反应。结果,知觉活动变得越来越复杂,直到7—8岁获得了可逆的协调,尽管它本质上还是一个初步的形式。然而,我们的实验显示:在此之前,一点都不能取得可逆的协调。在这个水平上,它以对称的形式回到了分离点,处理方式是对图形的所有部分进行分类,这些图形环绕着部分或更多稳定的参考点。纳粹十字形(儿童似乎并没有意识到其臭名昭著的象征关系)很好地说明了这一点,因为对于这样的图形来讲,为了正确地协调各个部分,很有必要返回探索的起点。

简(7;4) 能立即识别并画出所有简单图形。纳粹十字形:他来回摸了每一个

架子，探索直线部分之间的直角，每次都返回四个架子交会的中心。“*我不知道这是什么，是海星吗?*”接着，他根据记忆画出了它，每个架子都向右倾斜，但是并不能正确地排列这四个架子。

图斯(7;9)　能正确地画出十字形、半十字形等。六角星：探索六个架子，对称地返回中心来协调它们。他正确地画出了它，通过返回中心参照点来回地检查每个架子。

纳粹十字形：“*我不知道它是什么*(相似的探索方法)。*它有倾斜，但我已经忘了它像什么了。*(先画出了一条水平直线，分别在每个终点放置了一个直角，接着继续下一轮探索)不，*是错的。我能感受到它，它一直都是一样的*(他开始画新的一幅图，一点一点接近精确地复制，除了其中一个结束的部分画得不对)。”接着，向他展示一系列模型，他能够识别出所有的形状。他指向纳粹十字形并笑道：“*就是它!*”

拉斯特(8;2)　能成功地识别所有简单图形。直角梯形：开始画得对称，接着精确地画出。纳粹十字形：先画了一个常规的十字形，在考虑弯曲部分之前，他注意到了形状的特征。接着，他在这些上增加了直角，所有这些都以相同的方式进行。

亚奇(8;2)　使用由粘在硬纸板上的火柴棍构成的模型。在探索了每个架子并返回终点之后，他成功地画出了一个架子，指向呈顺时针的纳粹十字形。接着给他呈现一个逆时针指向的架子：“*和之前那个一样，但是相反。*”绘画被正确颠倒。最后给他一个半纳粹十字形：“*我不能说出它是什么，但是我能画出来*(精确地画出)。”他还用对称地返回参照点的方式，画出了一个与之相似但更复杂的图形。

这些反应与之前水平反应的差别是很明显的。探索的过程是依靠像早期阶段一样的知觉活动类型完成的。但是这个活动不是仅仅依靠它最初的起源，而是来源于这时操作的方法，这种方法包含将常规计划中获取的成分分类，而且开始于儿童可以一直返回的固定参考点。现在这个可逆的协调或多或少不过是一种由探索和模仿适应抵达的平衡，一旦它们与这种每个成分的探索都可以同时进行的方式直接相关，那么就与剩余部分连贯成简单的整体。在前面那个阶段，这些运动仅仅是彼此成功地进行，这个系列的早期成分被后来的成分消除了。然而，在当前这个水平，形状的构建相当清楚地和他的知觉以及模仿或形象表征区分开来。之前我们可能会认为所有这些功能都是对之前数据的组装，其依据是预先存在的格式，这个格式包含不同特征给予许多种分类的可能性，这些特征有直线、曲线、角、平行线、顺序和长度的相同或不相等。换句话说，感知到的每个形状都同化到反应格式中，这时需要建构格式。这就是为什么形象想象如此精确地反映了建构过程，就像知觉活动由操作支配的方式一样。

第七节　结　　论

这个简单探究的主要结论是对矛盾的展示,同时还展示了感知和想象形状之间的连续性。感知到一个圆或一个正方形是一回事,而重构视觉想象以至于可以从一组模型中挑出它们,或纯粹触摸后画出它们又几乎是另一回事了。在视知觉的情况下,形状几乎瞬间结构化地被识别出来。这个过程可能并不是与早期的视知觉同时发生的,但是基本上的确是产生于第一节划分的三阶段的第二阶段。与此相对应,对这种形状的视觉想象以存在心理表征为前提,即当物体不在眼前时能想象出它。这使得一种更加复杂的功能干预变得很有必要,它在半年之后才能起作用。因此,想象并不是知觉的直接产物。

空间的建构开始于知觉水平,继续于表征水平。因此对从一种水平过渡到另一种水平的研究对体验表征水平上的空间知觉是很有必要的,也是最基础的。对被称为触知觉过程的细致分析使得我们:(1)能够验证知觉的实际工作方式,使用触觉作为包围识别的过程开始的指标,(2)观察儿童是如何开始把这些触觉转换为图画或心理想象的,而且(3)介绍了空间是怎样被抽象的。

1.关于第一点,对儿童探索物体方法的研究与知觉、知觉活动或感知运动活动之间的区分有很大的联系。由于不能以简单的触觉"集中"把握整体形状,儿童被迫移动他的双手或物体本身来产生一系列的集中。因此,形状知觉识别成了协调这些集中的结果。因此,很明显有两个独立的过程参与。(a)知觉本身,它是纯粹接受性的(并不意味着是完全被动的),而且是由儿童触摸物体的每一个独立中心造成的,或至少是其中的一部分。(b)感知运动或知觉活动,它包含同时进行的去中心化,或更改中心,或将中心的结果转移到另一个身上(或者它包含了"比较"——相互转化,"转化"——对关系的转换,等)。因此知觉活动相当于实际知觉中心的内部协调。

让我们先指出,知觉和知觉活动或感知运动活动之间的这种持续连接,它使得我们能够证明第二节所说的关于知觉和运动之间存在的相互关系。当物体的一部分以手为中心时,例如,用硬纸板做的三角形的一个角,当我们把手放到一个角的旁边,很明显关于这部分表面的知觉在这个角的区域是闭合的,但却在其他方向上是开放的,会自动化地感知到其他的开放部分是延伸的。这是过程化的一个例子,格式塔学派已经很好地描述它了。在不平衡状态下的知觉(角仅仅在一个方向开放)引起了一个与神经流相符的运动,这个神经流是由被刺激的区域和未被刺激的区域电量的差异引起的。但这种相同的运动会在对三角形的角的持续探索过程中达到顶峰,其本身会对后续知觉产生影响,原因是该知觉会把之前的知觉数据和新的视觉角度下的角完成关系的调换。因此,活动协调了相继产生的知觉,而且包含了整体的转换,它保证了从一个到另一个知

觉的转换。

从这一点来看,所有的知觉都包含复杂的感知运动活动。知觉中所出现的特殊的快照或静止,都会在知觉的动态流中被切断,感知运动活动以知觉为基础并始终与之紧密相连。

我们可能还需要指出,由于相同的理由,这种解释对于视知觉的情况也是有效的,它在触知觉和包含相应的知觉活动的探索运动的情形下表现出了这种特点。这两种情况的唯一差别在于:儿童在视觉中心比在触觉中心中更能即刻领会更多的成分。因此,对于像三角形和圆这样的简单图形,视觉可以理解所有的成分和它们与最初中心的关系。但是当形状变得更加复杂时,眼睛就与手一样被迫去探索[1]知觉和感知运动活动发生的结果,用几乎相同的模式来协调所有的中心,而且知觉和动觉成分之间的影响是相互的。的确,很有可能婴儿对简单形状的反应与大一点的孩子对更复杂图形的反应是极其相似的。由于缺乏足够的知觉活动,儿童可能不能立即察觉到一个正方形有相等的角和相等的边。起初,这些相等性极有可能仅仅作为"形状间的置换"的相互作用的结果被察觉到。在下一个阶段里,这些可能变得更及时且仅仅更真实,但是最初考虑它们要更加困难。

而且,我们已经发现,不同于可能相当恒定的知觉机制,知觉或感知运动活动随着年龄的增长发展显著。在第一阶段(持续了4年),在面临需要辨别的物体时,主体几乎都保持着被动状态。他拿着它,通常用双手感受它,翻来翻去,满足于偶然的集中。不存在去中心化,以至于他基本上没有探索它们。在第二阶段(4—7岁),知觉活动变得更加明显,正如与之相关的触-动觉实验所证明的那样。起初,儿童把自己限定在整体的探索中,尤其是拿着物体的两个极端,从而建立起和它们的一些整体关系。下一阶段,可以观察到对特殊特征的分析(角等),尽管还不完整。接着,分析变得完整,它包含了置换、预期等等,尽管仍然缺乏综合方法。类似的,在第二阶段期间,探索一直都不太系统,开始时没有预定的假设,结束时回顾物体所有突出的特征,这些都在犹豫中只朝一个方向完成。这种探索类型的一个例子是把物体朝一个方向转过来转过去。此阶段还会出现从手掌之间的运动到用手指探索整个轮廓的过渡。最终在真正的第三运算阶段(7—8岁),儿童可以系统地进行探索,且持续返回分离点,现在这个被用于做参考点。

这当然不能证明相同年龄水平适用于知觉活动其他类型的进化,尤其是视觉活动(对第三阶段的可能预期)。然而,在这个工作过程中,有证据证明视觉活动范围有相同的发展过程,尽管在不同时期有幅度上的变化。

2.现在,我们回到表象或从知觉到心理表征的过渡的这个问题。在当前实验中,这个过程伴随着从触觉到视觉数据的转换。它发生于儿童试图从触知觉中获取心理表象或包含视觉和运动的图画,触知觉是由按触-动顺序(译者:进行)的知觉活动支配的。

虽然图像不能被认为是从纯粹的感知的接受方面衍生出来的,但是由于它是一个随着感知所指向的"意义"的思维关系而发展起来的表征符号,人们当然可以在图像的

① 参见P. A. Osterrieth, "Le test de copie d' une figure complexe," *Arch. de Psychol.*, Vol. XXX, 205.

构成中发现一个运动元素,它是有别于知觉本身的知觉活动的。

正如我们在其他地方所展示的那样[①],从起源的角度来看,表象是模仿的产物。它实际上是内化的模仿,这种内化的模仿不能表现为外部动作,尽管其最初是与那些动作相联系的,正如在游戏的表象和延期的模仿中。但是模仿基本上延续了适应活动行为的特征,而这开始于婴儿感知运动活动水平。用一个比喻来讲,模仿(最终表象也是)是与"消极"适应保持一致的"积极",例如(儿童)在物体对活动的直接影响之下修正(自己头脑中的)活动格式。这就是为什么在已经参与了生命中最初两年的模仿起源之后,感知运动活动在协调简单知觉时仍然是表象的实际来源,即使是在模仿变成内化时。

就本章所涉及的分析过程而言,表象和运动之间的联系似乎是很清晰的。一方面,孩子探索被给予的模型的方式和他画出它的能力有非常紧密的联系。另一方面,他在绘画中展示的技巧大体上与他在一系列视觉模型中进行挑选而识别出形状的能力相符,尽管简单的识别要优先于绘画。

因此其整个趋势表现为,当只能通过触觉感受形状时,视觉想象形状的能力是包含在知觉过程中的感知运动格式的表达。重复一下那个比喻,就好像组成了对"消极"的"积极"对应,这是由涉及知觉探索的顺化和适应产生的。

如果对视觉模型的识别能力远远超过画出它们的能力,那么我们有可能会选择候选假设,也就是说,来源于知觉活动的表象多到足够指挥触觉探索。这实际上确实发生了,尽管是在一个限制的范围内,就规则而言,它是发生在触觉探索过程中的运动,这个探索控制了视觉表象本身,在绘画的情况下也是这样。

当然,不能用这些发现来说明任意一个视觉表象都一定能被运动影响,这种运动是与触觉相关联的,或不同于纯粹的视知觉。儿童很容易能构想出纯粹的视觉表象,表象的结构仅仅决定于属于视觉感知运动活动的运动(眼动等)。我们可以在以后的时间及实验中再次看到,并不是这些类型的表象——如果它们存在于这种纯粹的形式当中——包含了空间概念的本质。

平面图形的视觉表象,知觉上看到的多维形状,投射、剖面和平面的旋转等,或者甚至是基本拓扑形状的表象(如一个绳结),当它非常准确时,主体能比平常意识到更多的运动。它实际是对与这些形状相关的潜在活动的表象,而不是纯粹的视觉直觉,承认这个事实对于我们解释形状提取过程非常重要。

即使是在日常的表象当中,在没有帮助(作为其必要成分)的情况下想象一处风景、一所房子或其他熟悉的事物是否完全可能的呢?这种帮助来自受知觉控制的格式,如走过的不同路、完成的行动或位置的转换。而且,由于事实上这些表象总是需要多重感知而且涉及复杂的行动,这种帮助变得更加重要。

简单地说,动力活动已经被应用于知觉活动,最终包含了知觉空间的建构。我们再次发现它是创造表征形象的必要成分,并最终成为空间概念表征的必要成分。我们可

① *The Origin of Intelligence in the Child*, 1953(见原文第74页及之后的几页).

以用这种方式理解为什么需要同时存在知觉连续性和表征空间,同时也存在分离这两种结构的鸿沟。这个鸿沟是自然形成的,尽管表征空间从中受益,且它的意象被知觉发展好的形式所丰富,然而它绝不能在自身的水平上重构,初级空间关系以相同的顺序相继进行,即先拓扑关系然后欧几里得和射影关系。

这给我们带来了形状提取的困难。在明智地讨论它之前,我们需要进一步总结动力活动在表象建构中发挥的作用,和它与感觉数据的关系。

与知觉一样,对于表象来说,正是感觉数据在"指示",然而运动和它们的组织(以比较感知运动格式的方式)构成了"指示"关系本身的基础。在知觉的情况下,静态的感觉内容是众多关系的暂时指标,一些是真实的,一些是虚拟的。但是,在那个水平指示和被指示的区别不是很明显,前者仅仅是指标或整体情况的一些方面。

另一方面,在表征层面,指示和被指示的差别很明显,而且这种区别很精确,它区分了表征思维和知觉。除了这一点,感觉数据还被运动影响,因为它是象征符号,而且需要"自由"提示的特征。现在正是表象本身,在某种程度上它作为意识而存在,与此相对照的是动力活动帮助它成为现实。至于动力活动的神经分布因此被转换为表象,与之相当或相似的功能一直是表征关系的实际根源,我们现在要讨论这方面的问题。

3.这些实验中涉及的几何"形状"是被知觉和想象从物体中"提取"出来的,还是从知觉过程中的活动或运动中"提取"出来的?换句话说,是从需要建构表征想象协调运动中"提取"出来的吗?关于运动发挥的作用,我们发现它有助于澄清在实验数据的研究中的收获。我们已经研究得很深入了,可以得出结论:在目前已经涵盖的三个阶段里,孩子们能识别,尤其是能表达出来,那些他们最终能通过自己的行动重构出的形状。因此,形状的"提取"是以协调为基础而获得的,这种协调是对儿童自己行动的协调,而不是或者至少并不完全是对物体的直接协调。

因此,第一阶段唯一能识别和画出的形状是封闭的,环形的形状和那些建立在简单拓扑关系上的形状,简单拓扑关系如开放或封闭、邻近和分离、环绕等。我们已经看到这种关系本质上表现了可能最简单的活动协作,如一步一步追随轮廓、环绕、分离等。

第二阶段我们面临了识别欧几里得形状的开端,这建立在以下这些区分上,直线和曲线、不同大小的角、平行线,尤其是图形相等或不相等的边。现在,明显的表征甚至比知觉更符合这样的事实:个体能够"提取"出这种关系概念,就像是相等是以等价的活动为基础的,直线概念来源于不改变方向的手或眼的追随活动,角的概念来源于两个相交的运动。

这就是为什么很容易就想起了与概念相符的简单的欧几里得形状,因为它们是最基本(除了比它们更简单的拓扑关系)的协作类型的结果,比起像格式塔理论那样纯粹从知觉来解释形状,它更使我们信服。最后,在第三阶段形状和协作活动的关系变得更加明显,不断地返回固定的参照点对于概念的形成很有必要,而且对识别和表征同样重要。然而,形状提取的这个话题远没有被这些简介性的区分研究透彻,我们应该一次又一次地研究它,我们将开始于绘画本身的过程中进行对视觉结构的提取。

第二章　对绘画中基本空间关系的处理

“绘画空间”①

在上一章的第一部分，我们试图展示知觉空间是由三个相继的阶段组成的。第一阶段建立在拓扑关系上，第二阶段建立在测量和射影关系上，第三阶段建立在有关物体相对于其他物体位移的整体关系上。

接下来，我们尽力去展示从知觉向心理表征的过渡——换句话说，转换到不再是知觉概念而是想象概念——说明了对知觉水平已经获取的关系的重构，这伴随着感知到的新的结构和早期知觉结构的功能的持续。这两种结构都把感觉数据当作指示（感觉指示器或绘画本身的象征形象），而且在实际构建它们所涉及的关系（例如对于形状本身）时都利用了对运动和感知运动的同化。

实际上，我们更进一步地展示了建构过程在每个水平上都遵循着同样的先后顺序。它开始于拓扑关系，接下来达到欧几里得关系，视知觉和以触觉为基础的心理表征之间间隔了数年或数月。

现在，这个事件的顺序绝不是必然的。实际上，就表征空间而言，它很少符合普遍被接受的观点，就我们所知，它从未被大众公认。因为这个顺序很容易被颠倒。一步一步地获得知觉达到射影和测量关系水平（大小和形状恒常性）和整体关系（考虑到物体位移不同维度的协调），接着，表征空间开始了欧几里得的整体协调，接着是射影关系（知觉的）的发展，最后是简单拓扑关系的提取。设想表征空间相对于知觉空间以颠倒的顺序发展并不存在内在的矛盾，因为这个过程伴随着正规几何学的历史性进步。欧几里得几何学中的成分仅仅能处理测量几何学和相似性，射影几何学在17世纪的德沙格（Desargues）、18世纪的蒙吉（Monge）和19世纪的彭色列（Poncelet）之前还没有发展起来，位相分析（Analysis Situs）或拓扑学完全是现代发展的产物。

心理表征以颠倒的顺序从实际知觉中发展起来，而通常人们认为的顺序与此相反，并在分析时认为这样才是追随着正规的轨迹。至少还有这样的人，他们能够把智慧从基因顺序中区分开来，而且不再迷惑于仿效初级教材的作者，开始探讨距离和简单的欧几里得图形，它们似乎包含空间建构当中的真实元素。

所以，很有必要探索清楚的是，在间隔了数年之后，究竟空间概念重构是否真的经过了知觉空间建构所经过的阶段。特别是，我们要在实际中核实究竟是不是这个发展

① 与M. A. Morf和Mlle. B. Demtriades合作。

顺序，即先是处于心理形象水平的拓扑关系的重构，然后是测量和射影关系的重新设计，最后是协调和被协调整体透视关系。

现在我们很难核实这一点，这也可以说明为什么人们如此忽略了这个备选解释。很明显，一旦儿童可以自己画画，知觉活动和感知运动智慧的获取物都可以供他使用。在知觉方面，他知道什么是距离，什么包含直线或知觉的或测量的形状，例如一个正方形。然而，到目前为止，他还不能把这些存在转化为思维或想象，此时他所做的这些不再被直接的知觉支持。结果，如果在绘画或把物体视觉化时，对他有用的只有拓扑概念，那么他将用它们来补充已经存在的射影或欧几里得知觉，而且正是这个环境趋向于导致未经训练的观察者误入歧途。为了重构概念空间的真实结构顺序，不仅有必要从表征中分离出知觉，还需要在后者的范围分离出实际获得和应用的关系和想象成分。

基于这个原因，接着第一章讨论的这个问题，以及通过对儿童的绘画的研究，或者更精确地说是对他们"图像空间"的研究，来研究和表征空间中操作的基本关系似乎是有益的。我们已经可以看到儿童通过触觉进行的绘画证实了这样的观点，拓扑关系的获得早于欧几里得形状。但是其一，射影关系在这些实验中不起作用；其二，绘画以触觉为基础，而不是视知觉。我们现在必须研究的这个问题在常规绘画条件下构成了一个新的问题：(它)究竟是在视觉记忆的帮助下自发产生，还是通过复制视觉模型产生的？

我们清楚地意识到已经被瞄准用于绘画的物体，是空间表征发展的标志。斯特恩(Stern)[①]、德克雷利(Decroly)[②]和其他许多人已经展示了绘画的结构并不完全是形象表征的转化，例如相对于三个维度。[③]实际上，相当清楚的是，以已知技术为基础的绘画滞后于形象表征，这种滞后的范围在处理更加难以阻止的复杂整体时要更大。无可否认，以独立绘画为基础来研究儿童空间思维的发展将是一场极端的冒险。但是假设这种分析类型被其他方法验证，尤其是如果人们把自己限制在绘画的大体特征上，这些绘画是以简单的日常形状为基础的，那么毫无疑问的是绘画构成了一个确切的表征类型。"绘画空间"是表征空间的一种类型，而且布伦茨威格(Brunschvicg)[④]深入地解释了以绘画技术为基础的几何的起源。从这个角度来说，我们想要大体概括如下：我们对于空间的无意识的绘画以及儿童复制简单形状，都了解些什么。

---

① Stern, W., "Troisième Congrès Allemand de Psychologie Expèrimentale, " Frankfurt, 1908. In *Arch. de Psychol.*, 7, pp.1907–1908.

② Decroly, O., "La Psychologie du Dessin," *Société belge de neurol.*, 1912.

Decroly, O., "1'Etude du petit Enfant par l'Observation et l'Expérimentation, "*Dcuments Pédotechniques*, No. 2, p. 127, Brussels, 1929.

③ 参见 Pouillard, G., "Essai Psychogéntique sur la perception de la troisième dimension dans l' espace, " *Journal de Psychologie*, 31, pp.88–151, 1934.

④ L. Brunschvicg, *Les Etapes de la Philosophie Mathématique*, 2nded., 1922, pp. 500–503.

第一部分　无意识绘画中的空间

一旦超过仅仅涂鸦的水平，儿童绘画的三个主要阶段的特征就很明显，而且被吕屈埃[①]分为：(1)综合能力的缺乏(synthetic incapacity)，(2)智慧现实(intellectual realism)，(3)视觉现实(visual realism)这三个发展阶段。我们将努力从空间表征的角度去考察它们。

第一节　第一阶段：综合能力的缺乏

在吕屈埃的研究中(之前所引用的书，第154页，图85)引用了一个3岁零6个月的男孩的例子，他画了一个大头人，还在头上加了四根火柴，两根代表胳膊、两根代表腿，而且还有一个与四肢分离的小躯干。头上有两只眼睛、一个鼻子和一个嘴巴，但是嘴巴被放置在鼻子的上面。这幅画的含义是什么呢？哪个是比较经典的综合能力的缺乏呢？什么时候我们可以试图解释3—4岁儿童的空间表征？

它很明显不能教会我们关于儿童知觉本身的任何东西，因为当儿童看着物体时，他们看到了胳膊和腿贴在躯干上，而没有贴在头上，嘴在鼻子下面而不是上面。为什么这幅画没能与知觉相符？在回答这个问题的过程中，吕屈埃抓住了那些自然而然涌入意识的因素，例如不能实现儿童目的的粗陋的运动，和受限制的偶然发生的注意力本质。但是这就够了吗？是否缺乏注意力经常表露出一些功能(表征等)的缺失？问题中特殊的注意力类型预示了哪些功能的集中？

一幅画就是一个表征，这说明它暗含了表象结构，而且没有证据证明构成表象的空间关系和被相应的知觉揭示的关系存在于一个平面上。儿童可能会看到鼻子在嘴巴上面，但是当他试图在脑海中显现这些成分，而且实际上不再能感知它们时，他倾向于颠倒顺序，这不仅仅是源于绘画中技巧或注意力的缺乏，而且更加确切地说是源于不适当的空间表征手段，这需要在垂直轴上重建顺序。绘画有时可能比纯粹的内部视觉表象更复杂，但是很有可能并不是通常的情况。吕屈埃自己提到了一个小女孩，也是3岁零6个月，她用一种三角形代表一个房子，但是她解释说自己试图追随另一形状，而且描述了四个代表矩形的四个边的运动，这个矩形正是她试图去画的。在这个情况下，我们确实发现了表象和绘画之间的鸿沟，尽管儿童可能问自己究竟内部表象中两条边之间是

① Luquet, *Le Dessin Enfantin*, p.154, 1927.

否平行的,或构成直角等,或者究竟它是否仅仅是一个模糊的草图。众所周知,小孩子在可以把很多直的火柴棍排列整齐时,对于获取平行有很大的困难①,而且如果再回想起第一章提到的3岁零6个月的孩子,他不能通过触知觉区分出圆、三角形和正方形,似乎像这样的绘画很有可能显示出的不只是技术上的笨拙。

为了解决这个问题,我们只用实验结果比较绘画的主要特征,这些实验所处理的关系与我们在接下来的一章里讨论到的是同一关系。从最后这个评论中,我们可能得出结论,我们从他们自己的画中什么也了解不到。相反,他们使得我们建立起表征固有的结构的无意识的特征,接下来仅仅表征会被提交,从而进行更细致的分析,这种分析或多或少地依靠人工实验。它完全来源于这一角度,然而我们倾向于研究这一问题,而且绘画的发展将提供一个框架,我们可以通过之后更多细致的分析来填充这个框架。

本文把我们限制在这个构想当中,这个构想可以被技术验证,而不是通过研究绘画得到验证,缺乏综合能力的阶段非常有趣,因为它是一个忽略了欧几里得关系(比例和距离)和射影关系(投射和截面的知觉)的空间表征,而且它已经刚刚开始建构拓扑关系,即使是拓扑关系也仅仅存在于涉及最简单形状的地方。然而,让我们按顺序检验后者(提到的)这些关系。

1.关于"邻近性",这毫无疑问是最基本的空间关系,它明显在每一幅仅仅超越涂鸦的画中都发挥着作用。例如,在建构面孔时,不同的部分被画得彼此邻近,而且没有分散于纸张的四个角落。但是在一个复杂的形状中,例如一个人的表征,有时会以一种常规的方式考虑邻近,它们在细节上并不依附在一起。把胳膊、腿与头连接起来,同时单独去画躯干,这是关于这方面的一个很好的例子。吕屈埃提出了许多其他的案例:连着胳膊的手指,连在头前面的尾巴,等等。

2.毫无疑问要引入"分离"关系,在某种程度上画出来的成分彼此间是有区别的。但是伴随着简单几何形状,我们应该注意到在"分离"以整体的方式存在这些成分时的困难。这可以在第三部分研究到。对于复杂形状,更是如此。

3.然而,顺序关系(我们应该可以看到,包含了邻近和分离的整合)自然仅仅开始于这个水平,至多只针对成对的项目,(因为)需要决定它们的相对位置。一旦这些项目的组合参与进来,它们就停止了协调,这个事实被表述为绘画"综合能力的缺乏"。例如,我们可能会想起左右关系的逆转(在一张狗的肖像画中,尾巴在头那边),或上下的逆转(嘴、眼睛和鼻子的颠倒),或前后的逆转。在觉察不同成分之间顺序上的特点与一个现象相符,我们应该有机会在第三章进行特别的检验;也就是说,在4岁以前,一系列多种颜色的珠子被简单地作为分离的成分再次排列,并不按照它原本的顺序。

4.包围和封闭的关系是简单形状中展示的最清楚的关系(我们应该可以在第二部分

① 见 Wusten, H., "L'évolution des comparaisons de longueurs de l'enfant à l'adulte," *Arch. de Psychol.*, Vol. XXXII(见第五章).

看到一个例子，在这个例子中小圆被放在一个封闭的弯曲形状的内部、外部或轮廓上），但是涉及复杂形状时错误频繁发生。因此，眼睛被放到脸的外面，头或身体的一边的底部（3岁零6个月和4岁零6个月：参阅之前所引用的吕屈埃的文献，第158页，图91），房顶投射在房子内部，而不是在房子外面（如前所述，第162页，图95），等。我们还应该注意到相同年龄段的儿童封闭结点所带来的困难（第四章）。

5.最后，尽管连续性和非连续性可以大概被看出来，此阶段它们在复杂图形上（的形态）不同于其最终发展的形态。实际上，缺乏综合能力的主要特征是形状的一些部分是并列的，而不是连续连接在一起的。因此，扶手悬挂在脚手架的上面，帽子在头上面，等。

简单地说，如果一旦形状的绘画开始出现，就开始清晰定义每个最基本的拓扑关系，那它们绝不会在推广于其他复杂图形时失败。而且，这些仅仅是儿童最可能在自发的绘画中制造的结构：小人、动物、房子等。然而，我们可以理解为此阶段的绘画空间必然缺乏欧几里得关系，如距离、比例以及尤其是三个维度下的部分常轴等，这与知觉关系相同。但是拓扑特征优先于其他特征，这是否真的可以证明绘画空间规律与知觉发展中掌握的所有这些关系本身有相似之处呢（第一章第一部分）？或者这是否可以仅仅归功于动力特征在技术上的不恰当呢？我们应该发现，在对下个发展阶段的研究中，正是这两个假设中的第一个被证实了，尽管并没有完全排除后面那个因素所起的作用。

第二节　第二阶段：智慧现实

我们在第一章看到，在通过触知觉获取形状的这个实验中，对图画的综合非常紧密地跟随着那个探索过程。在这里我们又一次（看到），一旦儿童变得有能力，就会对他注意了很久的特殊绘画类型进行综合，这已经被许多权威描述过了，吕屈埃也分析得相当准确了。我们当然要涉及的智慧现实，它存在于绘画当中，而不是儿童实际看到的物体的样子（这是建立在知觉上的视觉范围），但是（儿童认为）“所有的东西”“都在这里”（如之前引用的吕屈埃著作中的第224页）。结果，把出现在此阶段的图画空间表征的特征归因于缺乏技术技巧或注意力就没有问题了。相反，我们这里有一个格式，它是部分精确的，而且毫无疑问是系统和持久的。那么，它的几何或空间的意义是什么呢？

没有用任何方式扩大他们的能力，或者相信处于第二水平的儿童可以构造或发展出真实的几何学，然而有可能看到那个智慧现实包含一种类型的空间表征，欧几里得和射影关系正是在这种表征里开始出现的，对于它们之间的相互联系来说，到目前为止还是处于早期形式。但是，在前一阶段概述的拓扑关系现在能完全应用于所有形状了，而且在矛盾的情况下比在现在获取的形状中表现得更突出。

基本拓扑关系实际上和所有情况相联系。因此，（1）邻近性是正确的，或者至少是

以此为目的的;胳膊和腿连着躯干,眼睛放在头上,两只眼睛通常被并排展示,即使是从侧面上来看,邻近违反了透视和欧几里得本身的协调。(2)分离得更清楚了,分析分离成分也有了进步。(3)在复杂的绘画中(风景、房子等)发现的相继顺序并不与坐标体系里的每一个维度都一致,但是这追随着一个与实际可能的顺序相同的方向。例如,在房子或花园的平面图中,其中的成分相互追随,就好像这个整体向很多方向扩展或收缩,然而这都是以一个客观的顺序进行的。(4)假设环绕或包围关系很重要,因为在很多情况下内部的东西都被呈现为透明的。因此(存在)胃里的食物、蛋里的鸭子(如前面所引用的吕屈埃的著作,第162页,图96)、地里的土豆(参见第167页,图98)等。(5)最后,持续性被很好地定义,与我们在第一阶段看到的纯粹的外部位置的邻近性相反。

尽管射影和欧几里得关系在此阶段(我们一样可以在第二部分看到有关的欧几里得形状)开始发展起来,到目前为止它们还不连贯的特征与在透视和距离方面还没有结构化的空间表征一起发展。这进一步证明了,只要遵从了上面列举的关系,在拓扑上与灵活且可变形的物体相协调的表征仍然是有必要的。结果,我们在同一幅画上发现了证明这些观点相互矛盾的证据。在吕屈埃举的一个例子当中(前引著作第179页,图111)展示了一个马的轮廓和在它正面且卧在它的边上的马车,马车的轮子旋转着。而且这个组合的不同方面被简单地画在一起,以至于我们可以一下看到所有东西。至于所谓的"旋转",它在此阶段很常见,它与这种类型真正的投射操作关系不大,我们可以在第五章发现,仍然在画包含伪旋转的画的儿童相当不能理解后者。获取射影(7—8岁以后)的精确时间点是在此阶段的智慧现实的这些伪旋转的特征开始消失时。另一方面,在欧几里得关系的情形下,智慧现实很明显标志着直线、三角形、圆、正方形和其他简单几何形状的出现。尽管实际上是不存在确切的测量和比例的,但是在此阶段,它们的结构不能以任何方式导致一个综合的欧几里得的空间组织。相反,智慧现实的独有特征就像远离透视视角的协作一样,尽可能远离这样一种结构。例如,当孩子画了一幅有两只眼睛的头部肖像,或有两条腿的马车夫的轮廓,或同时从不同视角看到的一群房子,他的画作与射影结构和欧几里得结构同样格格不入。物体被扭曲得好像只是平面的、远距离的,而且最后坐标相对于透视不再发挥那么重要的作用。

因此,可以用几何术语把儿童绘画中的智慧现实定义为:尽管特殊结构中的成分来源于即将成为射影和欧几里得的概念,然而它的关系被表达为空间表征。这个表征是处于理解水平的,主要是拓扑的而且包含基本关系,如邻近、分离、顺序、包围和持续性等。在第一个例子中,关于射影,把不同的观点混合在一起必然能够说明之前的确切数量的射影关系的发展——尽管不必要与其他的关系协调在一起。而且这种观点同样适用于这些结构的欧几里得特征——它们同样被分开处理,而且目前为止还没有融合成一个整体。因此,用这种类型的绘画,与模型的相似之处仅仅相当于一种原始的"异形同态";也就是说,一点一点、一条一条地对应,保持没有任何射影或测量关系协调的纯粹直觉和定性的,尽管这些在拓扑复杂性中开始被分出。这就是为什么在智慧现实的

水平,我们尝试探索性地开始精确复制欧几里得形状(本章的第二部分)和开始射影关系的建构(见第六章,投射中的直线),但是到目前为止还没有把绘画中的透视的协调看成一个整体(第八章),没有理解比例(第七章),而且尤其是缺乏坐标系(第八章)和把它应用到复杂的布局中(第十四章)的能力。

第三节　第三阶段:视觉现实

平均在8—9岁,最终出现一种绘画类型,它努力把透视、比例和距离同时纳入考虑。

这个视觉现实有三种特征。第一个特征,相对于"智慧现实"来得要晚。在这方面,在适当的补偿固着和"类型的守恒"之后,吕屈埃有充分的理由来解释智慧现实持续期间,有时令人感到意外的发展特点。事实上,图画结构中的这种顺序似乎表明了射影和欧几里得概念在表征范围里出现得较晚,这与它们在知觉里的顺序相反。这个解释实际上也被其余的研究所证明。

第二个特征是视觉现实的审查似乎不仅没有显示出前述的透视的欧几里得关系(测量、坐标和比例)中的射影关系,也没有显示出相反的,但是这两个系统发展得很一致,而且的确是相互依赖的。我们也有能力用直接的实验去证明这个结论。

第三个特征,也是最重要的一点,是视觉现实和智慧现实完全不同。一方面它展示了射影和欧几里得关系的实质,和拓扑关系相比,后者是一步一步发展起来的,一直依赖于作为单一存在的每个形状,而且与其他形状无关。另一方面,射影关系决定且保存了形状的相对位置,这不同于前一阶段发现的视角、旋转等的混合。最后,欧几里得关系决定并保存了图形之间相对的或坐标上的距离。因此在这两种情况下,综合系统都替换了经验结构,这个发展将被我们其余的研究所证实。

第二部分　对几何图形的绘画

在大致概括了图画空间发展的方式之后,我们现在有必要分析一些简单几何图形的构建,例如圆、正方形、三角形和菱形等。为了达到这个目的,很有必要研究这些形状的绘画方式,这都与它们的拓扑和欧几里得特性有关。对透视的绘画将在第十二章和第十四章进行研究。

对这些图形的实际绘画引发了一系列有趣的问题,尽管我们会把知觉困难和空间表象放到一边,因为它们已经在第一章讨论过了。在处理想象绘画包围的特殊表象类型时,我们将会面临和在触知觉的研究中获取的相同的反应。然而,本阶段我们需要更

细致地审查的是几何关系本身和“对形状的提取”。

从这一点来看，2—7岁的儿童对几何形状的复制结果对于表征空间的心理理论非常重要。尽管与欧几里得形状相似，如圆、正方形、三角形、菱形等，这些孩子并没有在它的绘画中主要表达出这些形状展现的“良好的格式塔”的知觉特征，而是主要表达出了拓扑特征，如邻近、包围、环绕等，正如我们在触知觉的例子中看到的那样。

第四节　方法和一般结果

我们开始要求每个孩子凭记忆画出一个人，都要让孩子感到不拘束，而且根据自己的想法自然地绘画。接下来，我们要求他复制，包括系列模型的整体或者部分。需要指出的是，一些模型强调了拓扑关系，而其他的则是简单的欧几里得形状。将每种类型的关系合并成三组(交错呈现整体或部分的欧几里得图形等)。

(1)一个长约4—5厘米的不规则形状，在其外部接近轮廓的部分有一个直径为2—3毫米的圆。(2)与第一幅一样的那个小圆在形状的内部且接近轮廓的地方。(3)与前者一样，只是小圆跨越在轮廓前后。(4)一个更大的圆。(5)一个正方形。(6)一个等边三角形。(7)一个椭圆。(8)一个长是宽两倍的矩形。(9)两个间隔1厘米的圆。(10)两个相切的同样大小的圆。(11)两个交叉的圆。(12)圆内嵌一个等边三角形，三角形的三个顶点在圆上。(13)一个圆的内部有一个等腰三角形，顶点在中心，其余的两个顶点在圆上。(14)一个直径为4厘米的圆的内部正中央有一个边长1.5厘米的等边三角形。(15)一个边长为4.5厘米的等边三角形内部有一个圆，这个圆和三角形的三条边相切。(16)一个相同的三角形内部有一个直径4厘米的圆，这个圆和三角形的三条边相交，并构成了三个相等的分段圆弧。(17)有一条单对角线的正方形。(18)长对角线为4厘米的常规菱形。(19)一个菱形，它被一条水平的对角线分成了两个相等的三角形。(20)一个水平-垂直的十字形。(21)一个倾斜的十字形。(见图2)

为了恰当地从空间表征中消除技术和动力习惯等成分，我们补充了“再画一个”的任务。给孩子很多火柴棍，儿童可以移动火柴棍来重构直线边的模型。因此，为了组成一个正方形，需要使用12根火柴棍，如果任务太难的话，就减少火柴棍的数量。这个方法通常能更顺利地评估儿童的意图，尽管它在火柴棍的数量和边的数量相符时并不存在优势，而且当它比边的数量多的时候，重构通常变得比绘画更难。

最后，需要指出，对于特别小的孩子来说，他们当中的大部分都只是单纯进行涂鸦，或有非常小的变化，很有必要对绘画进行极端严密且详细的检查，以从中发现视觉模型造成的任何可能影响。也有可能通过指导孩子的运动引入一个动态刺激，然后更进一步来研究在缺乏帮助的条件下的复制。

考虑到来源于实验设置本质的特殊特征，获得的结果与那些触觉实验中的(结果)非常相似。

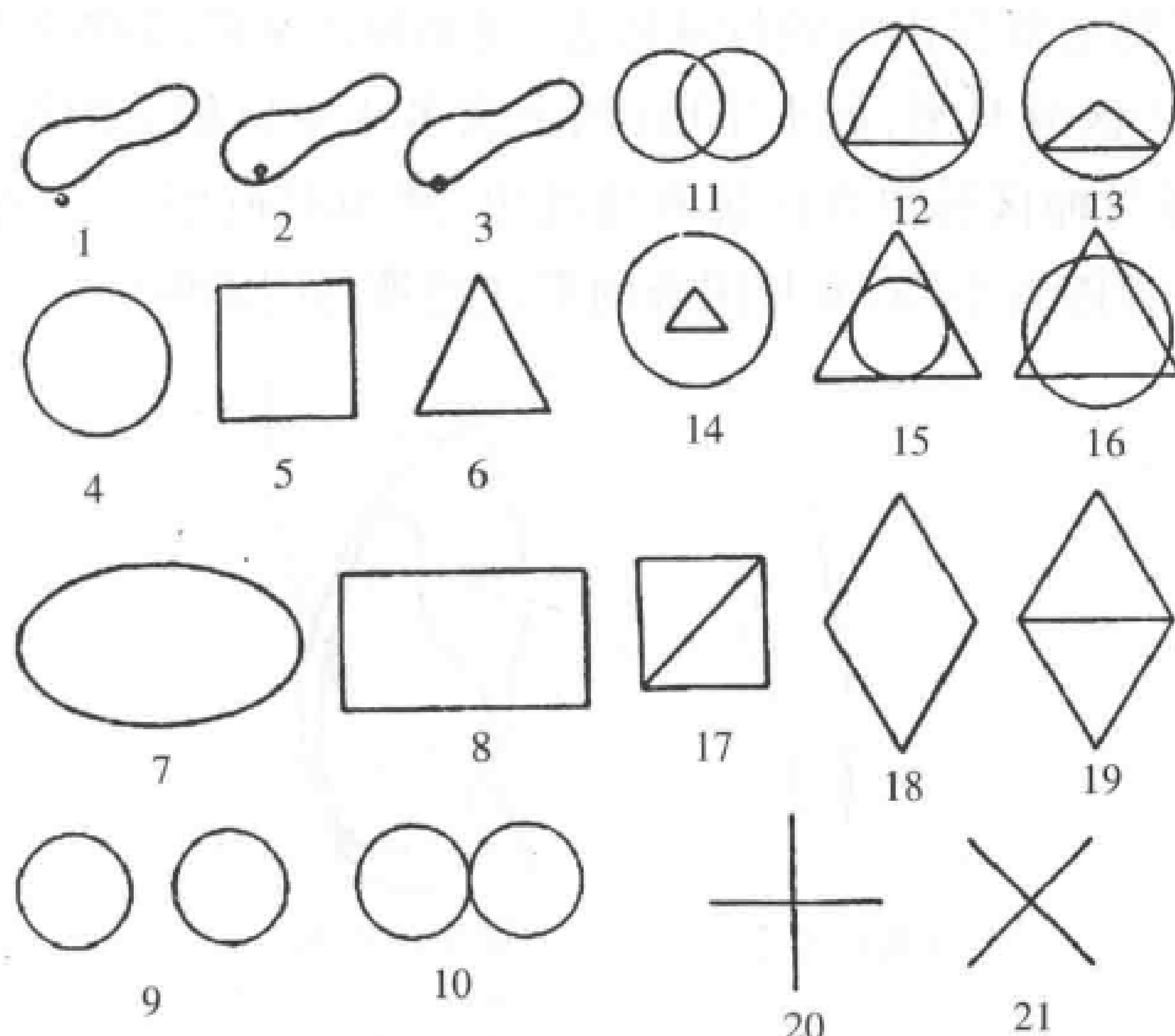


图2 21个绘画复制模型

在第零阶段(此时触觉实验是不可能的),绘画是没有目的且没有实质形状感的,儿童此时的绘画仅仅是涂鸦(见图3),不管复制何种模型,它的形状都没有变化(一直持续到2岁6个月至2岁11个月)。



图3 儿童的涂鸦

第一阶段可以被分为两个不同的亚阶段。在1A亚阶段(持续到3岁6个月至3岁10个月),这些涂鸦开始随着被复制模型的变化而变得不同,可以区分出开放的形状和闭合的形状。因此当儿童无法复制一个十字形或圆形的时候,我们可以根据他究竟在看哪个形状,而确定他创造了哪种类型的涂鸦(见图4)。然而,在1B亚阶段的水平上(平均3岁6个月至4岁),孩子开始显示出真正的绘画,尽管足够令人好奇的是,它只表达出不那么精确的拓扑关系;同时,欧几里得关系被完全忽略了(见图5)。因此圆被画成不规则的封闭曲线,而正方形和三角形不能和圆区分开来。也就是说,它们都被展示为

闭合的曲线,可能伴随着偶然出现的特殊标志,例如伸出来的波浪线代表了角。只有开放图形能够从这些中区分开来,如十字形(两个或多或少地相交的线,尽管画得不完全直)。到目前为止还没能区分出直线边和曲线边,然而对模型1—3的拓扑特征表现得很正确,闭合的形状伴随着小圆,而且闭合的形状也被封闭的圆代表。

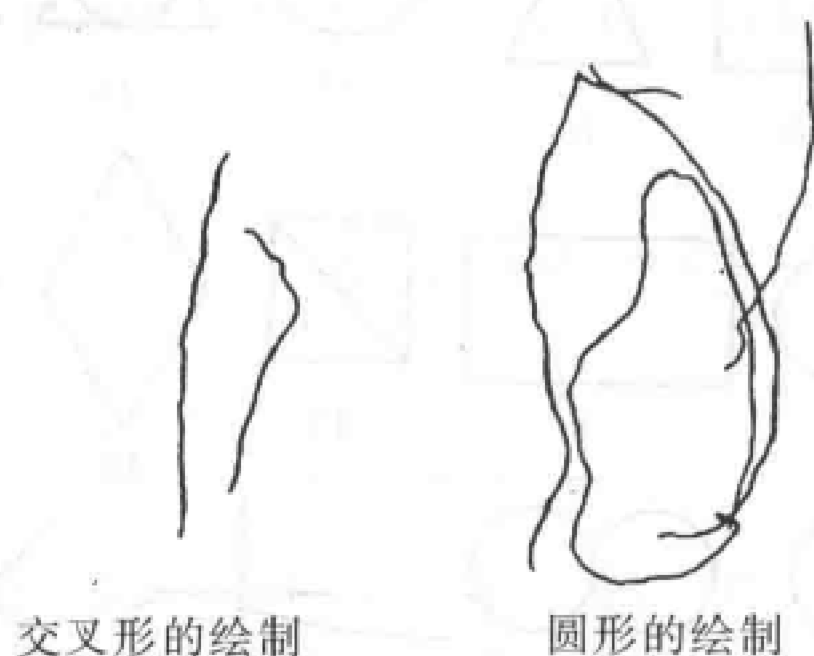


图4 1A亚阶段各种各样的涂鸦

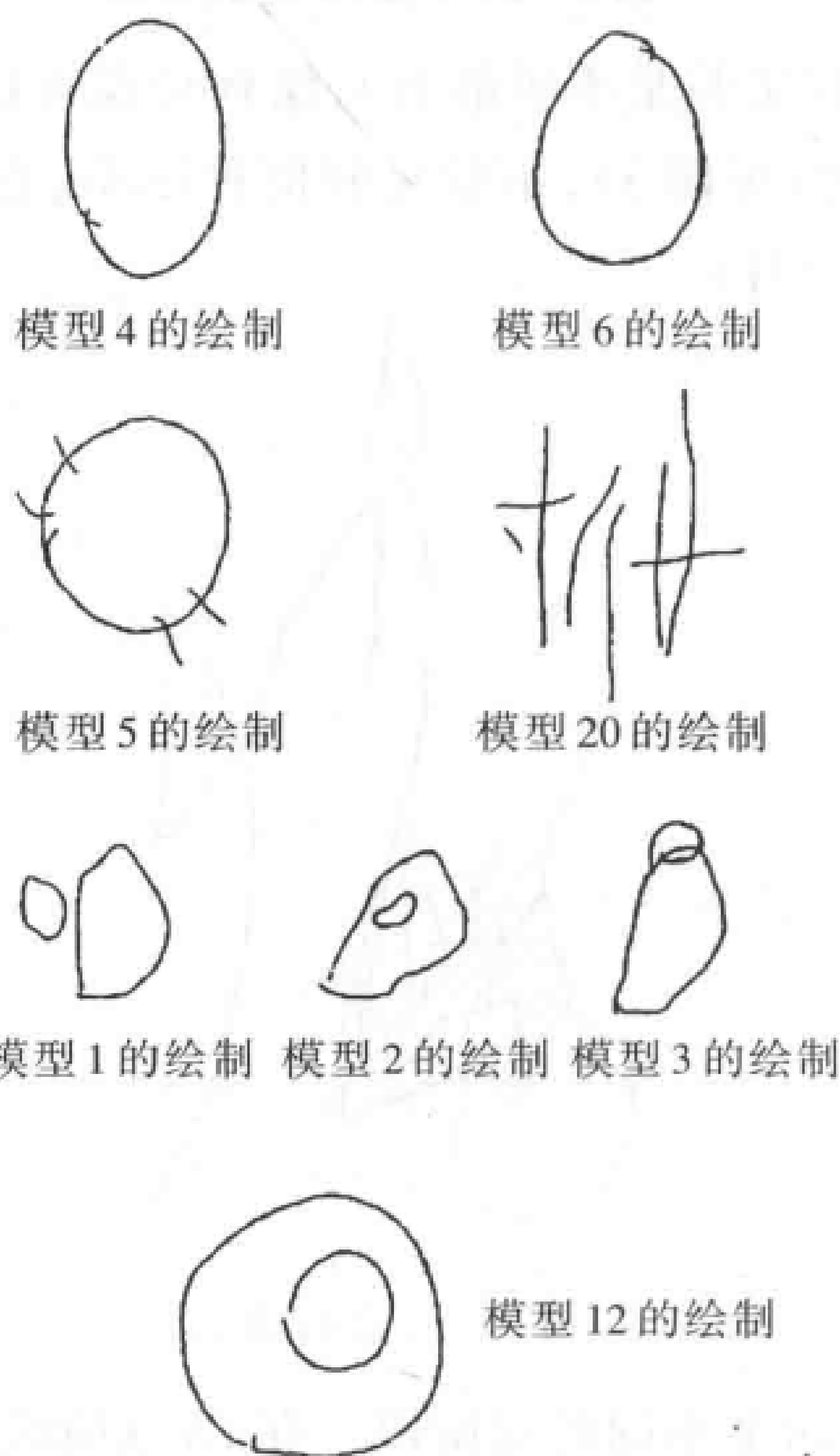


图5 1B亚阶段儿童的图形绘制样式

第二阶段(4岁开始)的特点是区分欧几里得形状的进步。在1B亚阶段和2A亚阶段中间的水平,开始能够区分出弯曲的形状和直的形状,尽管仍不能区分不同的直边的形状(尤其是正方形和三角形),所以这些形状被赋予直边,但是并没有注意到(译者:直边的)数量有多少。矩形大多数情况下可以被画正确(在这个中间阶段,见图6)。

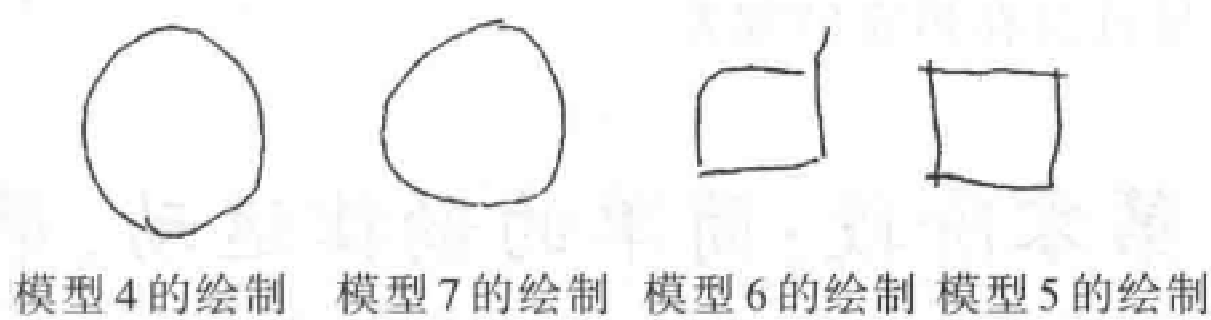


图6 处于1B到2A中间亚阶段的图形绘制

在2A亚阶段(见图7),逐渐能够通过角甚至维度识别出来形状。能区分出正方形和三角形,以及圆和椭圆。能成功地复制正方形有对角线的菱形(模型5和19),尽管不能复制出常规菱形(模型18)。能区分出这两个十字形,标记出发现的斜线。能正确地画出外接的图形的实际形状,但是不能很好地呈现连接点[与正确复制相切的圆(模型10)形成对照]。最后,在2B阶段,能正确画出菱形,而且逐渐掌握了外接图形,除了模型16(见图8)。

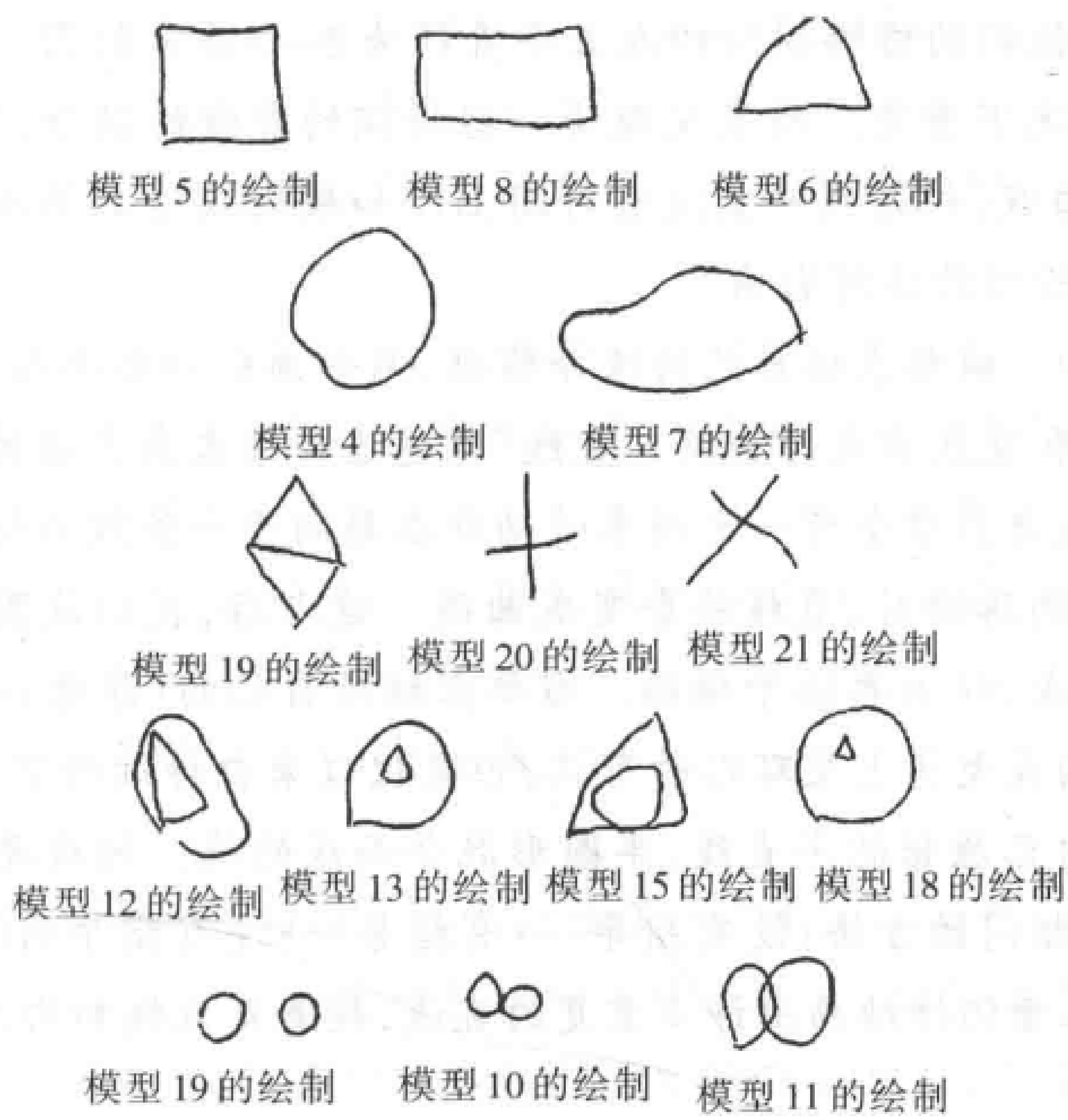


图7 2A亚阶段儿童的图形绘制样式

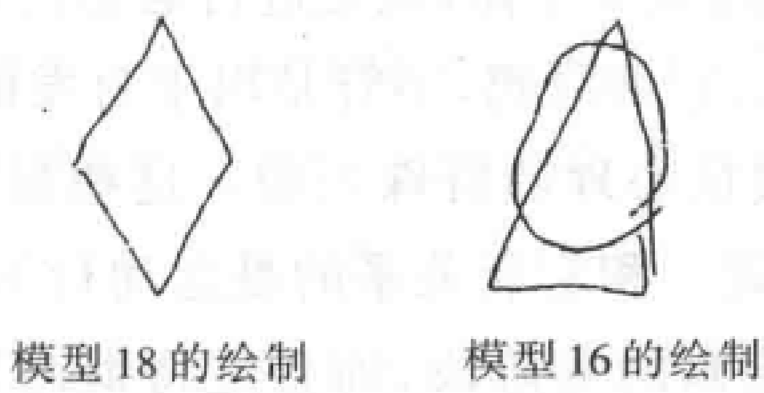


图8 2B亚阶段儿童的图形绘制样式

在第三阶段(从6岁6个月到7岁)克服了所有困难,包括完成像模型16那样的图形绘制。

因此,儿童的发展过程很明显和自发绘画中发生的非常相似,相对于实际图形而

言,画几何形状更容易且存在恒定的偏差。

第五节　第零阶段:简单的韵律运动,第一阶段:辨别的开始(1A 亚阶段),闭合的弯曲形状接着出现(1B 亚阶段)

第零阶段的特征是单纯的涂鸦,不能完全封闭一条线段以构成一个形状,即使在实验者的指导下也是这样。

特尔(1;9)和马尔(2;6)　当被要求复制圆时,仅仅画出了没有形状的涂鸦。实验者指导着他们的胳膊描绘四或五个直径为2—3厘米的圆。接着,要求他们在没有帮助的情况下重复。结果呈现为一些模糊的直线的混合,伴随着有韵律的转弯,还加上了曲线,但是线一直没有封闭上。如果比较这些图画和自发图画,还不能揭露出视觉模型的任何影响。

卢策(2;5)　被要求按自己的选择作画,例如画出一个小人。结果呈现为许多模糊的由曲线和直线构成的涂鸦。"直线"是通过持续来来去去的、具有一定频率的动作画出的,或者当这个有一定频率的动作在趋向于一条线的绘画过程里,而不是一直反复画出的路径时,直线将会变成曲线。这之后,我们试图让他复制一个圆,开始是独自完成,接着再给予辅助。当要求继续自己的(译者:绘画)时,她开始涂鸦,用波浪线构成大体上呈环形的形状,但是仅仅来自持续的重复行为。过了一会儿,她陷入了自己原始的半直线,半圆形混合而成的线。她被要求复制正方形(我们再次尝试了相同的方法:没有指导⟶有指导⟶没有指导的绘画),但是和之前的尝试相同,儿童仍持续画出许多重复的直线,接着是直线和曲线的混合。

因此,这些孩子很明显没有受到几何模型的影响,即使是得到手把手的指导绘画很多次以后。我们并不打算对此喋喋不休,或是进行老套的观察,而是想要指出尽管此阶段的孩子不能复制任何形状,它的涂鸦,不管是出于自发的还是努力的尝试复制形状,都呈现出对更先进的空间表征心理的特殊兴趣。这些起初与任何空间本身并没有关系,即使是以图画空间的形式。和它有关系的是念动行为(ideo-motor)的操作模式,来自那些引发越来越精确的绘画的亚阶段,而且这将最终导致几何形状的实际操作结构。这是一个特殊的例子,就像第一章建议的那样,形状是从主体自己的运动而不是引发它的客体中提取出来的。儿童绘画或涂鸦的基本特征是它简单的节奏。这种对绘画能力非常原始的表达,是手在纸上持续地到处活动的产物,而且正是由于这样一个运动的节奏模式,第一个形状在第一阶段被区分出来。

这点需要被强调，因为每一个心理机制都是依靠规范过程从节奏过渡到“群集”的，在不同类型的群集中，这个过程开始于协调最初节奏和顶峰的各个成分，作为可逆性持续增长的结局。[1]这在构建几何形状中相当清楚。正是以有节奏的运动为基础，涂鸦才构成了直的和弯曲的形状，通过一系列的知觉运动和知觉控制过程，接下来它们会逐渐被区分出来。我们有能力在下一阶段追随这个过程的发展，而且看到这些形态规范的产物最终是如何把自己“分解”为空间运算的，这些运算是依据已被定义好的模型建立的。

这些节奏性的动作有另一个重要的特征，在这一点上我们应该注意。那就是动作已经包含在一个不能被区分的状态，所有这些成分都将会构成绘画的直线、曲线、三角形，甚至是那些还不能从节奏的复杂性中抽离或“抽象”出的这些内容。当节奏性动作包含了简单的朝外和返回的动作时，它创造了一条大体上的直线。一旦不能确切地追随着外部路径返回，或者在从左移动到右后，儿童的胳膊移动到页面下面且再次返回，那么在这些线交叉的地方就会出现锐角、钝角或直角。对于另一个极端，当儿童试图用它的节奏性动作覆盖最大的可能区域时，他以一个形似圆形的模式结束，就像毛线球上的线一样。[2]

因此，儿童可以从这些不同种类的绘画中，提取出真实的直线、不同的角、椭圆和非常接近的圆的片段。卢策这个孩子实际上非常接近在这点上可能的区分，以至于有些时候在手把手地指导画圆或正方形之后，她就完成了画弯曲或直的形状这样的任务。实际上，第一阶段的一个主要特征是，开始是像第零阶段一样的涂鸦，之后同样未能考虑不同的视觉模型，儿童可以以非常少的练习尤其是在实验者的指导之后，以一种倾向于不是复制模型的全部，但是至少是它的某些方面的方式来开启不同的有节奏的动作。

罗儿(3;0) 在他最初的涂鸦中创造了上下和左右的线，构成了不同的角度，就像圆形的运动在第零阶段中所展示的那样。接着，指引他的手来绘制不连续的平行线，先水平再垂直(与最初的线与线的交错形成对照，有节奏性的运动被频繁的间隔明确打断)。水平的线基本上是水平的，尽管不是很直，然而垂直的线并不完全平行，它以不同的角度倾斜，尽管是接近垂直的。对于圆，在练习了一小会儿以后，他进行了纯粹的环形运动，并保持了从起始到闭合点的持续的节奏性。

拓扑形状(1)和(2)(封闭的大曲线，内部和外部有一个小圆)被清楚地区分开来。前者由一条曲线代表，而且在小圆坐落的点上(明显位于边界以外)。罗儿涂鸦了一幅画，位置很准确但却不成形状。对于形状(2)(内部的圆)，整个图形呈现为外部曲线和内部封闭的圆之间不带任何方向的一团混乱的圆周扫描，但却能清

---

① *The Psychology of Intelligence*, 1950, Conclusions.

② 这些及其他韵律被以下文章研究：Krotzsch, “Rythmus und Form in der freien Kinderzeichnungen,” Leipzig, 1917.

楚地区分出形状(1)。

亚奇(3;6)　同样以以下的方式变换着涂鸦。圆以缠绕在它自己身上三四次的一条长线结束,每一个终点都是开放的,但是却只呈现出圆形的轮廓。正方形被呈现为这样一个结构:一开始在视觉现实内是相似的,但是能区分出一到两个缺口和一些稍微直些的线。对于三角形来讲是相似的。另一方面,十字形结束于断线,就像是一道闪电一样,通过扩展韵律运动造出不同形状的锯齿形。

蒙(3;8)　以一个没有形状的涂鸦表示一个人,用一系列的曲线和没连接在一起的类似于线的线组成圆、正方形、三角形。模型9—11(分离、相切或相交的圆)导致了相互交织的窗子的装饰线。但是正十字形再次被表示为锯齿形,开始时像亚奇画出的那样,以交织的线结束。倾斜的十字形导致了一些不连续的线,一些是分离的,另外一些是相交的。

这些早期区分的意义很容易得到重视。为了分析它们,我们必须区分出以下两种方式:第一种是儿童表现出把觉察到的形状区分为开放的和闭合的;第二种是当试图表达每个模型的不同特征时,他打断了自己有节奏性的持续运动。现在,这两个过程不会同时发生,因为在画一个闭合的形状时,儿童首先必须打断他自己的运动节奏,也因而必须识别客观的无意识特征的不连续性。

儿童实际上面临的难题是通过有节奏性的运动来绘制给定的形状,而这个运动倾向于在模糊的锯齿形和弯曲的路径之间摇摆。结果,即使是为了画一个简单的圆,儿童也不得不打断这个持续的节奏,同时利用其弯曲和自然的闭合。这正是罗儿和亚奇在做的事情。他们以一些或多或少缠绕的螺旋形构成他们的圆,在开始和结束部分之间的端点甚至无法会合,在偶然的涂鸦情形下,这种节奏被打断得更厉害。通过打断旋转运动产生圆,且不能够封闭它,这完全是由于绘画中技巧的缺乏。这种缺乏的状况通过画圆、不连续的线(罗儿),以及开放形状的十字形(亚奇和蒙)等不同图形之间的巨大差别展现出来。在涉及后面的这些图形之前,还需要说明的是,儿童把正方形和三角形画得很像圆,尽管他们尝试画得不同,这是通过与圆形的运动相反的往外往内的运动(为直线和角的出现做了铺垫)来进行的。

对于复制平行线的长度(罗儿)和十字形(亚奇和蒙)这样的任务而言,毫无疑问儿童还尝试了提出这些图形的开放特征。与上述提到的不能封闭的模式不同,罗儿成功地创造了一系列像线一样的线条,一些是不连续的,而罗儿和亚奇对于十字形以不同的宽的锯齿状进行向外和向内的运动。

在这些例子中,有可能研究者很明显地看到儿童在努力观察模型以绘制出或封闭(圆、正方形、三角形等)或开放的图形(平行线和十字形),并以一种他自己最初的节奏的动作为基础。

提取形式。趋向于从那些原始的形状中提取出来的这些特征,基本上都是拓扑

的。让儿童印象深刻的特征，首先是这个形状是开放的还是封闭的，而且在罗儿的例子当中（模型1和模型2），还包括在封闭轮廓的内部或外部是否有其他东西。

总之，可以说通过有节奏的涂鸦来提取圆，是和在无意识的绘画中常规路径最有可能的发展相符合的。因此，吕屈埃[1]报告了西蒙·吕屈埃（Simone Luquet）以画圆开始，而且只能在第二次尝试时画出一个人（参见之前引用的文献，第3页）。然而，当这些线被简单地连接起来，它们对于给予的这些形状就可能意味着不再是特殊的例子，这些形状可以被从原始的涂鸦中区分出来，作为首先被辨认出的图形。正是这种根据早期确切图形的不同特征而分别涂鸦的转换，标志着1B亚阶段的出现。

在这个水平，我们发现了儿童绘制出的第一个恰当封闭的圆形、第一个正确交叉的十字形，和对内部及外部关系的一些正确鉴别（模型1—3）。平均在稍早于4岁的时候，儿童开始首次清楚地区分这些，而且这非常符合无意识绘画的发展阶段。在这种联系下，赫泽尔（Hetzer）[2]的统计研究已经显示，儿童在3岁时仅仅能在进行无意识绘画时涂鸦，而且这样的孩子中只有10%（平均），在完成涂鸦时，可以归因为他们表征了图画的意义。在4岁时，事后的意义归因在1/3的例子中可以发现，有1/3在实际进行绘画时能发现一些意义，只有其余的1/3预先注意到意义。但是在5岁时，有80%的孩子能够在绘画之前确定有目的性的绘画意义了。

以下是1B亚阶段的一些例子，以1A亚阶段向1B亚阶段过渡的三个例子开始。

贝尔（3;9） 画出一个圆，获得一个横向范围为4—5厘米的形状，只包含两条线，一个半圆，另外一个起起伏伏，但是与第一个在每个端点紧密配合，因此除了1—2毫米每个端点都闭合了。正方形被画成两个相对的不规则的封闭的形状。三角形先被画成确切封闭的形状，尽管是椭圆形的且没有角，接着在第二次尝试时画成一系列相交但并不协调的线，这些线最终组成了一个封闭的形状。

相反，十字形引发了令人好奇的尝试。开始时是一个封闭的圆的形状（对之前形状的持续行为），结束时是大量的像椭圆的形状，每个对边上都有长长的像线一样的线条来代表十字形的架子。

人被画成一个大的封闭的形状，又用大量的相交的线把它分割为不规则的形状。

杰（3;9） 从研究火柴棍技术的观点来看，是一个有趣的例子。因为，尽管已经3岁多了，他从没有完成过任何绘画，从而在用火柴棍重构图形时发展到一个比用绘画更先进的水平。但这并不是这个例子的结果。画正方形、三角形和圆时，也产生了同样的结果，也就是说，开始时没有形状的涂鸦，逐渐发展为可以区分的封

① Luquet, *Les Dessins d' un Enfant*, Paris, 1913.

② Hetzer, H., Kind und Schaffen, "Experimente über Konstruktive Betätigung des Kindes," Qu.u. Stud. 3. JugdK.7. Wien, 1931.

闭的形状(由于缺乏相应的技术,所以轮廓不是很确切)。对于火柴棍,杰自己不能完成任何直的图形,尽管给他的火柴棍的个数和边的个数相同。例如,在正方形的情况下,他呈扇形地放置四根火柴棍(—\/—),接着在每个直角上放三个,然而不能用剩余的火柴棍封闭这个形状,而是把它们放在了它的外面。接着,他拿起三根火柴棍,把它们排成排,接着把第四根放在直角的顶点上。对于三角形,他把两根火柴棍摆成直角,但是不知道怎么摆第三根。这之后,他用第三根摆成一条直线,接着构成了一个有两个直角(与他在摆正方形时的尝试相同)、三条边的开放形状,最终返回到成直角的两根火柴棍。对于菱形,他用四根火柴棍构建了一个开放的形状,接着又做了一个十字形,接着成为有一个直角和四个组成部分的形状。复制十字形的尝试(在尝试做菱形时偶然发现的)也失败了。它最后呈现为一条直线、一个由三个部分组成的锯齿形和一个半圆。矩形引发了不同的组合,它们都没有闭合上且缺乏直角(尽管包含5—6个部分)等。

然而,在一个示范之后,杰可以模仿实验者运动的细节,他能成功地摆出正十字形、正方形和三角形,尽管他不能摆出矩形和菱形(这一点应该不会令我们感到惊奇)。

允(3;10)　用一条单线表示一个圆的形状,开始把它画成螺旋形,接着在第二次尝试的时候封闭它。正方形、连在一起的圆、椭圆等,都被展示为同一种形状。分离的和相切的两个圆(9和10),制造了两个不接触的封闭的形状,但是对于相交的圆(11),允连续画了两次清楚的相交。有其他形状在内部内切的图形被呈现为完全相同的封闭形状,里面有一个涂鸦,所以只识别了包含关系,而没有识别出邻近关系。有对角线的正方形被呈现为一个用边对边的直线穿过的圆。

最后,十字形被呈现为用不同方式分割的分离线条。因此,斜的十字形呈现为一个长的波浪线,被较直的线条分割为三个部分。

弗拉(3;6)　比前面几个孩子表现得更好,是2B亚阶段的第一个真正的例子。他画的人可以被描述为“新手”类型。那也就是,头上有两只特别大的眼睛,所有其他的东西都用长波浪线表示。对于正方形,他画了一个完整的椭圆(一笔画出且是封闭的);圆、三角形、矩形等的结果是一样的。包含着一个图形的形状(12等),他创造了一个包含更小一些的椭圆的椭圆体。邻近的圆没有被画成接触的,而相交的圆被画成了一系列有清楚联系的10—12个圆。内部或外部有一个圆的不规则的封闭图形(1和2)被成功地复制,然而内部有一个圆在边界(3)的图形引发了原则上正确的尝试,但是技术上却是错误的。最后,所有十字形都有四条清楚的架子,但是完成的十字形(白色背景下的红色的十字形)呈现为一个圆形。

让(4;0)　在无意识绘画的指引下,创造了一个大的涂鸦代表“被扔的煎饼”,接着有七八根毛发粘在上面来表示一只猫,一个常规的圆表示“小婴儿”。最后,他画了一棵松树,树干上有长长的线,树枝上有垂直的线,松针和球果用常规的涂鸦

展示。因此,他能够画出直线和角。

但是画正方形时,让完全失败了。他用一条波浪线代表它(弯曲的锯齿状)。圆、矩形和椭圆都被画成封闭的曲线。只有十字形被区分为两条相交的线。那一对邻近、分离和相交的圆没能被区分开来,但是拓扑形状(1—3)被正确地复制,尤其是跨越形状边界的小圆。

莫茨(3;11) 画了一个人,有清楚的腹部并用四条线代表四肢。他能成功画出圆。正方形最开始被画成圆的,接着开始有一个钝角和锐角。图形1—3被复制得相当正确(包括在边界线上的圆),而且他也能复制相分离或相交的圆。接近的圆开始被画成是分离的,最后被画得连接起来了。和另一圆相切的圆,开始被画成一个封闭的形状,另一个应该包含它的图形实际上在外部且与之相分离;接着,对于范围更小的同一个图形,最后通过分析形状2而尝试成功(范围内部有一个小圆的封闭形状)。

马尔(4;4) 能成功地画出模型1—3,而且能画出圆,用封闭的曲线呈现。但是正方形被用相同的方式呈现。三角形非常相似,但是包含了一条基本上很直的线和两个弯的角。不能区分椭圆和矩形,后者被画成卵形的,但是每个端点都用一条浅浅的线来表示角。菱形被以相同的方式画出来,很像矩形,除了接着画很浅的线来表示钝角。

分离的、相交的和接近的圆被成功地表现出来,技术上说最后一个保持着分离状态,但是被一条线接在一起来展示它是接近的。有对角线的正方形被表现为椭圆形,它有着模糊的角,而且被一条中线一分为二。然而正十字形被复制得相当正确。

弗朗(5;3,发展迟缓) 可以画出一个人,但是胳膊和腿都从头上产生,尽管还展示了脚。正方形和圆被画得很像,但是前者接下来被展现为圆形,先画了两笔后来画了四笔以表示角。三角形是一个分散出很多细线的圆。椭圆和矩形看起来也很相似。分离的圆被正确地画出,邻近的圆被画成是相交的,实际上像一对相交的圆。所有有内切形状的图形,和有对角线的正方形一样,被展示为内部有一个完全一样的图形的弯曲封闭形状。

蒂尔(5;2) 反应很相似,也把正方形画得像圆形。但是他能成功地画出拓扑形状1—3。

这些反应在三个方面极具启发性。其一,关于拓扑关系和欧几里得关系的联系环节;其二,关于依据知觉到的"良好"形式考虑拓扑形状;其三,关于大体上的形状的"抽象"。

然而为了正确地理解这三个问题,有必要开始考虑技术本身,因为它被应用于这些绘画当中。它本质上决定了提取这些形状的方法,而且决定了优先展示一个而不是另

一个形状。技术问题以一种非常简单的方式表现它本身。这是关于打断和消除最初的简单的涂鸦节奏的问题。这意味着把它分解成独立的成分,重新排列这些成分之间的关系,接着在一系列知觉运动和直觉管理的帮助下重新组合这些成分。

贝尔和允这两个孩子正在从1A亚阶段向1B亚阶段过渡,这个例子说明了韵律运动是如何分解的,开始于1A亚阶段,接着在第一次尝试重组时被继续加强。因此,贝尔调整了两条线来构造一个圆,而且把两条曲线合并来构成一个正方形。允逐渐能把一条单线封闭起来构成圆,而且连接一些大体上直的线来描绘十字形。

在每个例子中,运动都被打断,而且整体节奏被一系列独立的节奏所取代。这些独立运动的协调由一系列相继的协调适应决定,它源于一个知觉对另一个知觉、一个运动对接下来的运动,或者表征想象本身的相互作用的活动。因为这些孩子到目前为止还不能表现思维的可逆运算,很明显此阶段控制对实际形状的绘画任务必须移交给知觉活动和知觉管理机制(例如,直接与维持了这个知觉和运动活动的想象相关)。

什么类型的图形是这种机制的主要产物呢?对主体清晰且没有歧义的反应象征了那个结构,例如大的封闭的形状外部或边界上有一个小圆要远远比正方形、三角形和矩形等难产生。他们的反应也展示出,从封闭形状中区分出来像十字形那样开放的形状,远比从弯曲图形中区分出直边有角的形状要清楚。

简单地说,在每个例子中,最初出现的都是拓扑关系,而欧几里得形状仍然不能被区分出来。

能够成功地获得模型1—3究竟是源于其他什么原因呢?这些图形仅仅组成了邻近、分离和包围关系而没有涉及直线或角的结构。在图形1和2中,小圆接近形状的边界,但是被一个小的鸿沟分开,因此要么在图形的内部要么在外部。在图形3中,圆既接近又没有分离边界,因此立刻变成在更大的图形的内部或外部。而且正是接近、分离和封闭这三个特征使得儿童可以立即注意到,且在他们的画作中表示正确,尽管把圆内切于更大的形状上存在技术上的困难(弗朗仍然不能完成对关系的描述,尽管视觉上努力这样做,但是所有这样做的孩子都失败了)。

现在,为什么能复制出模型1—3的同一个儿童却不能区分出矩形、正方形、三角形和圆、椭圆的差别,而且对于直线的形状只能成功地区分出十字形?这可以解释为简单的运动困难吗?因为圆并不符合一个单一的自然运动,因为它是弯曲的,然而正方形和三角形是由更难画的直线组成的。正方形和三角形也需要朝一个特殊的方向精确地定位这些线条,对于一个被给予的角,必须通过合并一系列分离的成分来封闭它,而不是仅仅追随着一条完整的直线。但是首先,我们已经看到圆有时由合成物构成,如贝尔调整了两个分离的端点。接着,我们可以在儿童的涂鸦中发现直线或接近直线的线与曲线的数量是相同的,而且让甚至可以用直角画出一个有树干和树枝的松树,因此解决了构成一个正方形所需要的东西,而他并不会复制正方形。最后,对于线的精细的组合,对模型1—3的复制说明了这是可以做到的。对于把一个小圆放在封闭形状的内部,并

使之内切于边界,这似乎与调整四条直线同样复杂,尽管儿童可以完成前一个任务,而不能完成后一个。

因此,我们可能会认为困难并不仅仅是依靠运动能力,还有心理构建的方法本身。换句话说,在心理操作机制的类型上,这种形状的心理构建是以原初模式中的独立成分为基础的。从这个角度来看,确实是拓扑关系仅仅需要这种构成,就像在更复杂的图形中内隐存在的一样,即使是在射影和欧几里得关系已经被区分开来之后。

因此,一旦节奏性的运动已经被分解为分离的成分,这种心理活动就发生了,把它们连接在一起或分开的心理操作导致了接近、分离、包围、开放、相继顺序和持续性等关系。在这个水平,绘画以最简单的方式表达了最早组成部分的实际内部组织,与涉及方向的更复杂的组织类型不同,例如平行、角、与曲线相对照的直线。简单地说,拓扑关系开始是按顺序出现的,因为它们为行动最简单的可能顺序或组织所固有,正是从这样的活动中形状才被提取出来。

与这一点相一致,与不能区分出正方形、矩形、三角形和圆、椭圆相比,观察儿童成功地画出正十字形是很有趣的。对此的清楚解释基于这样的事实:实际上十字形是一个开放的形状,仅仅是一对相交的线,然而所有其他的形状(包括三维的十字架被弗朗画成圆)是封闭的。对于封闭的形状,认为精确复制圆、椭圆比复制正方形早是不正确的,或者正方形被画成了圆也是不正确的。而接近事实的是,此阶段的儿童不再以任何方式受到圆的测量和射影的特殊性影响,尽管他们对这些图形的知觉自然记录了心理操作的精确差别。儿童对这些图形的表征仅仅保持着拓扑特征,那就是它们都是封闭形状的事实。它是一个"乔丹式弯曲"——也就是说,圆的拓扑等价性——而且这些孩子没能真正地画出一个圆。同样的原因,三角形、正方形等也被用封闭的曲线描述,因此从这个最初的观点来看,它们和圆有着同样的形状。它们逐渐变得和圆不同,正如在马尔的例子中,他用装饰着两条波浪线的封闭弯曲的形状表现矩形(他的菱形也是这样)。弗朗也用相似的方式增加了一条单曲线的环形展示了三角形,然而蒙插入了直线而且用指向它的封闭环形来标记出边和角。即使是常规的正十字形,贝尔在可以用交叉的直线画出正确的开放形状之前也以这种方式绘画(椭圆形有长波浪线)。

包含内切图形的形状表征也以拓扑关系为基础。它们都被画成包含其他弯曲形状的封闭的弯曲形状,而没有考虑正确的大小和形状。对于分离、邻近和交叉的那两个大圆,尽管最后一种被正确地展示,接近性大多被表示为连接分离的形状的一到两个连接点。但是足够奇怪的是,这些模型表现出比模型1—3要难,尽管它们实际上是其类似物,因为当后者在每个例子中构成了一个单一的整体时,大圆给人以两个分离的整体的印象,就像被复制的物体一样。

总之,拓扑关系普遍优先于欧几里得关系,到目前为止儿童还不能有效区分欧几里得关系。因此,我们能够回答之前开始的讨论部分所提出的三个问题中尚未解决的两个。为了处理第一点,很明显在1B亚阶段,正如贯穿第一阶段始终的,图画表征在任何

意义下都不与这个水平的知觉数据相符合,因为这个数据很久以前就已经获得了投射和欧几里得特征。特别是,远非是由知觉“良好的格式塔”决定的东西,图画表征本质上表达了构成图形的基本需求,这一需求是主动的而不是知觉结构决定的。相似的,对于第二点,“形状的抽象”并不仅仅是以觉察到的物体本身为依据完成的,还建立在一个更大范围的行动上,正是这个行动使得物体能够以空间结构的形式建立起来。这就是为什么首先被提出的形状在特征上是拓扑的,而不是欧几里得的,因为拓扑关系可能表达了最简单的基本运动节奏的分离成分之间的协调,与此相对照的是对欧几里得形状的协调,这需要更加复杂的心智操作。

第六节　第二阶段:对欧几里得形状的区分

作为第二阶段出现的标准,我们可能会使用成功地复制正方形,或至少是矩形这样的能力,这些能力通常获得的稍早一些。比奈(Binet)和西蒙(Simon)很早以前就展示了复制正方形构成了心理年龄为4岁的一个测试,而且他们的结论被美国的特曼(Terman)证实了。一旦可以掌握矩形和正方形,他们很快就能掌握三角形(相继顺序通常颠倒),但是菱形直到很晚才被掌握(依据比奈的研究要到6岁,依据美国的特曼的研究发现这可能要到7岁),调查这个原因应该会很有趣。

在它大体的轮廓中,正如在第一阶段,我们发现发展的过程与第二阶段依据知觉制定接下来的水平是相同的。从1B亚阶段向2A亚阶段过渡的标志是,能在或多或少弯曲的形状中简单区分出曲线和直线,然而与此同时不能清楚地区分出正方形和三角形。下面是一些例子,开始于仍然基本处于1B亚阶段的一个孩子。

丹(3;4)　开始以一种新的方式来画人。能成功画出模型1—3和圆(接着他把正方形画得像圆,但是试图像1B亚阶段的莫茨一样复制一个角)。他的三角形有一个完全的角,形状就像一个“鹰钩鼻子”,但是以一条明显的曲线封闭起来;接着用两条平行的直线来画它,而且这些像是用弧封闭起来的。矩形被用相反的方式无意识地扩大,而且以两条接近的直线构成,每一条都弯曲成一个角。用其他直线把这些端点调整合适,一个恰当的矩形就这样获得了。

雷恩(3;10)　能成功地画出模型1—3和圆(一条长长的没有封闭的线,增加了一条窄的短线“封闭它”)。正方形被三条调整的直线和一个直角、一个钝角组成,但是第四条边是弯曲的,或者更像是波浪的。第二次尝试时,给它三条边,一条是弯曲的。结果,它基本上能构成一个三角形,除了把一条边弄弯了。以随便的方法摆放四条直线组成不同的倾斜角度,菱形被画成一个交叉的椭圆形。其余图形被画得和1B亚阶段的尝试一样。

蒙(3;11) 基本上能成功地画出正方形,除了一条边稍微有点弯曲,但是他的矩形只有两条直线边,一个"鹰钩鼻子"一样的形状构成了其中的一个角(把无意识的涂鸦中的角组装起来),而且有一个小小的条带添加在顶端表示第二个角,然而第三个角是圆的。菱形是一个开放的正方形,以类似于三角形的方式被拉长了。

卢(4;6) 逐渐能很好地画出正方形,从画好圆开始。它开始是一条弯曲的直线,被一条抛物线封闭起来。接着,一个弯曲的角与另一个相同的合并起来(因此这个图像有四条弯曲的边),接着尝试画出以弧结束的一条单一直线,而且最终四条大的直线边几乎成直角。先组装一个长长的炮弹以构成三角形,接着用一个弧封闭矩形的一条边。

安布(4;9) 被同时用绘画和火柴棍法研究。开始画正方形时,和之前的孩子显示出同样的区分方式。先画一个不规则的椭圆,接着一次画成一个锐角,用弧形封闭上,封闭效果相当差,最后是一个大体上的直角(用两笔画成)用一个不规则的曲线封闭,倾向于表达两个边与第一对是对称的。安布在使用火柴棍时不能成功。他制造了四边都开放的形状,有些有凹进去的角(锐角),有些有两个钝角,因此四个角中的两个角之间有很大的缺口(一种有未完成的长边的矩形)。当他使用橡皮带时,图形更加不闭合了。对于三角形来说,绘画和用火柴棍构建有很大的相似之处。这些都是四条或五条边的图形(有些时候甚至边更多),封闭得不好,但是有一到两个锐角。有时,它们是有三条边和两个直角的开放形状。另一方面,画菱形与画三角形相似。这是第一次一个角有两条边,接着三角形基本上被闭合了,接着是一个不规则的四边形,而最后是一个不规则的五角星。并不都令人感到惊奇,我们发现用火柴棍法几乎能得出相同的结论。一个由三条棍构成的三角形,在一个三角形和一个五角星中间,跟着是用七条棍构成的形状。

亚奇(4;10) 成功地画出正方形,但不能画出三角形,尽管尝试了很多次,还是要给出四条边,有些边还是弯曲的。他能成功地画出矩形。对于内切的形状开始假设形状并不只是圆的。内接三角形或是用细线连接顶点表示的正方形,或是有点像三边弯曲的图形组成的三角形。

罗克(5;2) 正方形已经被画得非常接近,尽管一个角仍是圆弧状。三角形最初是矩形,然后是一种圆顶的方形。菱形是一个近似的椭圆,然后是一个开放的四边形,最后是一个细长的炮弹壳。罗克说"*很难去画这个点*"。

兹(5;4) 画了一个带头发、躯干、手臂以及脖子和手的完整小人。他画的正方形和矩形是相似的,但是正方形有直角和直边。三角形最初是一个有圆角的矩形,然后是一个由三个开口于同一中心的矩形组成(像是一个带矩形叶子的三叶草),最后成为一种圆顶的形状(十五天后他最终能很好地画三角形)。

谢尔(5;8) 成功地画出正方形,但是开始把正方形画成三角形,两条相反的边沿着两条附加线延长。接着,他把它画成了圆顶。

因此，在标志着接近第二阶段的过渡时期，角和直线逐渐分化，三角形、矩形和一些正方形被成功地表现出来。然而，正方形和三角形在绘画上仍然没能被区分出来。按照亚奇、罗克和谢尔的说法，三角形有时接近于正方形，然而雷恩、德恩有时也认为正方形，或至少是小孩子画的那一个是像三角形的。因此，我们的第一个问题是怎样理解三角形和直线形状是基于封闭弯曲形状发展而来的。第二个问题是解释为什么不同直线形状之间相对来说难以区分。

至于第一个问题，当前结果强有力地确认了触知觉中获得了什么信息；正是对角的分析，而非其他途径导致了直线的发现。最早的正方形或三角形是简单的圆形，其区别是有一个或两个角。现在，在能够调整不连续线条之前，这个角是由两种方式中的一种形成的。或者把弧转化为一个钝角，或者通过两条路径之间的快速往返运动，导致在自发的涂鸦中发现"鹰钩鼻子"一样的东西。角因此从早期韵律运动中被提取出来，的确正如他们自身的循环形状，正是在这个提取的过程中，直线被这样区分开来。然而，在下一阶段，角可能会反过来被两条相交的直线重新建构。

这正是因为单独在绘画中调整直线比提取一个完整的角更难实现，以至于第一个直线形状还很少能从其他形状中区分出来。为了把给定的直线与某个角中的其他直线连接起来，要考虑它们的倾斜度、平行性、直线的数量、连接点及其距离。因此，很容易理解在已经提到的区分的过程中，这个复杂的组织整体比简单的拓扑关系——如第一阶段发现的那些，或是作为一个整体的角——复杂得多。这是为什么雷恩仅仅用两条各包含一个90°角的线组成了矩形。但是，这也是很多形状不完整的原因，因为孩子第一次画的角很少仅仅被曲线封闭，并且与其他线条不协调。

这种协调开始于2A亚阶段，作为大体涉及大小和线段的倾斜度的许多细节的调整的结果，这些细节引起了对正方形、三角形、长方形和矩形之间的区分。

奥尔布(4;1,提前)　立刻精确地画出了正方形，但是对于矩形有一个逐渐的区分过程。他画出了第一个矩形，但其中一条边通过一个开放的锐角延伸到了钝角的外部。接着，画了一个有两个直角的矩形，像前一个图形一样，它的一个锐角和一个钝角各延伸出一条线交会成一个角。之后，画了一个类似的图形，最后画了一个真正的三角形，封闭外部的角，擦掉了其余的部分。椭圆和矩形被正确地画出。内切于圆的图形开始轮廓分明。圆的连接点被展示出，但是奥尔布精确地指出了他的错误。

菱形被画成一个开放的四边形。不能区分出对角线和十字图形，探索着画出带有对角线的正方形。带对角线的菱形被画成有中线的椭圆。

伯特(4;6)　成功地画出圆、正方形和矩形。也能正确地用直线组成三角形，一笔画出一个角，然后用一条直线闭合它。三角形内接于圆(模型12)是在两次尝试后画出来的，三角形内切于圆但并不接触的图形也是这样(模型14)，但是不能画

出模型13,即三角形的底边顶点位于圆上但是顶点位于圆的中心这个图形。对于模型16,三角形的末端伸出圆的轮廓,在第一次尝试的时候就基本上是正确的。带对角线的正方形也是正确的。对菱形尝试了很多次,都没成功。例如,一个用内凹角代替了第四条边的三条边正方形(像一个主教的帽子),然后画了一个倾斜的矩形,然后一个五角星,然后是一个角上延生出一条线的正方形,然后是一个三角形,等等。另一方面,带对角线的菱形被画成一个方形上端嵌了一个三角形,然后两个相对的三角形有同一个底边。两种十字形可以被区分出来。

伯特进行了用火柴棍摆菱形的实验,但是他没有比在画画中更成功。他完成了同样开放的四边形,接着用第五根火柴封闭它,这样产生了一个五角形。但是有对角线的菱形被摆成了两个三角形。

达瓦(5;2) 成功地画出正方形、三角形(尽管三条分开的线后来连接到了一起),椭圆形不同于圆和矩形。但是他没能表示出三角形的例子中任何的连接点(模型12和模型13),对于内切于三角形中的圆也是这样,尽管他画对了形状。他能正确地画出有对角线的正方形并区分出两种十字形。但是在第一次尝试菱形时,画成一个梯形上的开放的矩形,接着画成两个相对的锐角,它们的边界被一对平行线连接(没有这个的话就是正确的了)。在这之后他画了一个锐角试图去定位另一个锐角。“*它应该和上半部一样,但是我不会画*。”带对角线的菱形被画成了一个五角形,并且尝试画另一个这样的菱形。“*它应该像是这样!*”然后画了一个安在一个方形上的三角形,但能意识到失败了,他说:“*它这里也应该是尖的*。”

帕格(5;3) 圆、正方形和三角形都被正确地画了出来。但是菱形是一个正方形,加上细线标示出角。紧跟着是一个开放的方形,然后一个直角被一个锐角大致封闭住,但是差不多是正确的形状。帕格用四根火柴建了一个靠在一个角上的正方形,用八根火柴做了同样的事,但是给了他十二根时,他让这个四边形开放着,而且不再对菱形做相似的事了。

齐尔(5;3) 在成功地画出三角形和正方形后,也把菱形画成了一个不规则的四边形。使用火柴棍,他成功地摆了四个火柴棍,但是不能摆八个或十二个。他把正方形摆成一个圆的角,矩形倾斜着,有一个锐角,没有对称的锐角,而且随便封闭起来。他成功地画出从三角形的中延伸出的圆,而且说它是“内部的和外部的”。

迪(5;5) 把菱形画成正方形。他用火柴棍摆出相同的形状,而且用四根火柴棍再次摆出相同的形状。但是在用十根火柴摆出一个三角形以后,他做了一个依靠在一个角落的像菱形的三角形。

米克(5;6) 把菱形画得像有一个三角形的顶的正方形。在十二根火柴棍的帮助下,他摆出了一个大的以弧形封闭的角。

延特(5;8) 正确地摆出三角形、正方形和椭圆形。不能摆出有一个内切圆接

触到周围角落的三角形。他通过画一个没有接触到周围的正方形替换了它。在一次被中线一分为二的尝试之后,成功地画出有斜对角线的正方形。菱形开始被画成一个被抛物线封闭的锐角,接着又画了一个相反的但不接触的锐角。他能成功画出有斜边的菱形。

延特对于区分正十字形和斜十字形有很大困难,而且只能复制稍微倾斜一点角度的。

杰奥(6;1)　成功画出三角形、正方形和矩形等。他的菱形的一个角是方的。他可以用火柴摆出一个三角形,但是对于菱形他不能闭合上自己开始画的锐角,他说:"*我不能做到*。"

帕乌(6;7)　表现出相同的反应。菱形的建构非常卓越。两个平行边构成一个锐角,然后有两个直角的五边形,然后是一个正五边形。帕乌用十二根火柴构建了一个类似于画出来的由一个点延伸出来的四边形。这些是2A亚阶段的典型反应。在执行阶段,角度与直线边的总体区别是由曲线形状和基本的有节奏运动来区分的。因此,会看到基于不同元素自己来合成的过程。尽管有这样的组成过程,造成形状"抽象"的主要原因并不是它在第三阶段的可修正的运算方式,而只是因为由一系列同时运作的知觉运动和内部想象知觉的调节机制主导的试验性调整。在这些调节机制中,有三种是非常值得一提的。

第一种有关长度和距离。成功绘制正方形并区别于长方形,就像是画一个圆并区别于椭圆形,代表着对长度相等性和不规则性的考虑的开始。这样,正方形有四条完全等长的边,圆有完全相等的半径,而椭圆是被拉长了的,等。这种迟来的绘图关系的出现是值得注意的。尽管在知觉领域已经认识到很久了,但只有在认识到曲线和直线的区别之后,知觉才被应用到图表表征之中(1B亚阶段和2A亚阶段中间的水平)。然而,如果将其归结于绘图的技术困难是错误的,就像触觉知觉中的触觉探索和形状认识的研究一样,只有在2A亚阶段的相同阶段,长度和距离的关系才被纳入考虑。不能认为图表构建中的维度关系仅是被简单的知觉和直觉机制所控制的,更不用说运算测量了。

第二种虽然不总是成功,个体也应该是注意到了欧几里得及几何学形状的连接和分离关系,这就是决定一个图形在其他图形中位置的因素。只要在边界和周围的关系问题上,只有模糊的闭合形状,我们就能看到这些拓扑关系有多么早熟。更不用说的是,在尝试将它们与测量形状联系起来是不会先于它们对欧几里得及几何学形状水平的构建的。这是我们已经在看到的两个圆(模型9—11)的例子里能看到的,也是在不同内嵌图形的组合中会再次看到的。

第三种也是检验这一水平的调节过程中最有意思的地方就是——以前不知道在三角形和正方形的区别中至关重要的——倾斜,特别是在两种形式的十字形、对角线和菱

形的构建中。确实,在2A亚阶段中,儿童既不可以表征两个交叉的倾斜,也不能成功地画出倾斜来。因为他不能成功地画出倾斜来,因此也不能区分三角形和正方形。然而在这一阶段,也就是4—6岁到5—6岁的年纪,个体会克服各种困难掌握倾斜的画法[见根特(Gent)在《5至8岁十字形的样例》(*5—8 in the case of crosses*)等]。事实上,这个倾斜问题会在我们的研究中一再出现,特别是在横轴与纵轴相连接的部分,这一部分的内容会在更晚的8—9岁的时候获得。因此,我们必须在这一问题上做重要区别。当涉及两个完全分离的图形时,判断倾斜的能力(比如说在图形自身之外通过几个参考点找到水平线)都先于运算的出现,而运算能力是在7岁以后才习得的。另一方面,我们这里所说的倾斜和在这一阶段开始构建的图形都只是纯粹内部的一个简单图形,比如三角形中一个边相对于另外两个边的倾斜,正方形对角线相对于四边的倾斜,或者面积计算中的斜边问题(尽管这里我们有两个分离的但却紧密相连的图形)。

尽管像一个图形或者两个图形的边角这样的问题已经解决了,但是对菱形的构建在这一阶段是绝对没有完成的。从图形抽象的角度来看这一问题是非常有趣的。从复制正方形到复制菱形(尽管只需要将一个四边形的对角线变短)最起码需要两年时间(根据Terman,最多3年),事实很清楚地表现出为了构建一个欧几里得及几何学形状需要的不仅仅是视觉映像。这样的一个任务确实需要涉及一个非常复杂的对主体部分的互动。

另外,绘制一个菱形同样需要触觉探索和识别,就像在第一章第五节所展示的一样,这一点在火柴棍构建技巧中也再次涉及(伯特、马格、希尔、迪和米克)。这表明它不仅是绘画中的技巧,还是通常涉及的对形状的提取。菱形所展现的困境的性质是什么?这是个问题,包括封闭图形和描绘直边,调整倾斜度去适应确定的锐角和钝角。但是除了这些,最难实现的是构成菱形的两个三角形之间的对称性。因为这涉及翻转中心轴两边的相关顺序。

现在这些精确关系的结构可以被下一阶段的水平一步一步地追随,这一点我们已经检验得很深入了。在1B亚阶段,在迷惑于游离的开放线条之后,菱形差不多被画成一个封闭的曲线形状。1A亚阶段的孩子正是用这些游离的开放线条从自发的涂鸦中区分出形状的。但是在1B亚阶段,代表菱形的粗糙的卵形上面偶尔也会被画上一条细长的附件来指示锐角。在1B亚阶段和2A亚阶段之间的水平,画菱形时有了一些角和直边,尽管还不能控制它们的斜率。因此,无论是对于正方形、矩形还是三角形,都还很迷惑。然而,锐角及其控制的倾斜度以多种方式表现出来,例如从正方形的一个角上以45°的方向延伸出的直线的长度,或是放在正方形上的三角形(裂缝、帽子等)。另外一种方式,钝角可能被表示为小三角或仅仅是正方形或矩形的两条边上的曲线(耳朵等)[①]。

---

① 所有阶段参见图9。

最后，在2A亚阶段，孩子开始尝试表现倾斜度本身，从而产生了多种梯形、五边形及其他类似的图形，作为这次活动的成果。相似的，图形是开放的，当然不是故意的，但是由于能力的缺乏而不能在维持需要的倾斜度下闭合它们。现在这个阶段漏掉了什么？考虑到其他图形的斜度问题已经被解决的事实，菱形怎样才能被掌控呢？答案是需要对称，它需要顺序的颠倒。戴夫(Dav)谈及菱形的下半部分时说："*它一定和上半部分相同，但是我不能成功地画出来。*"这就是为什么大多数孩子在水平轴上可以成功把握菱形，因为这个轴可以使他们更容易把握倒序，而普通的菱形却在他们能力之外。

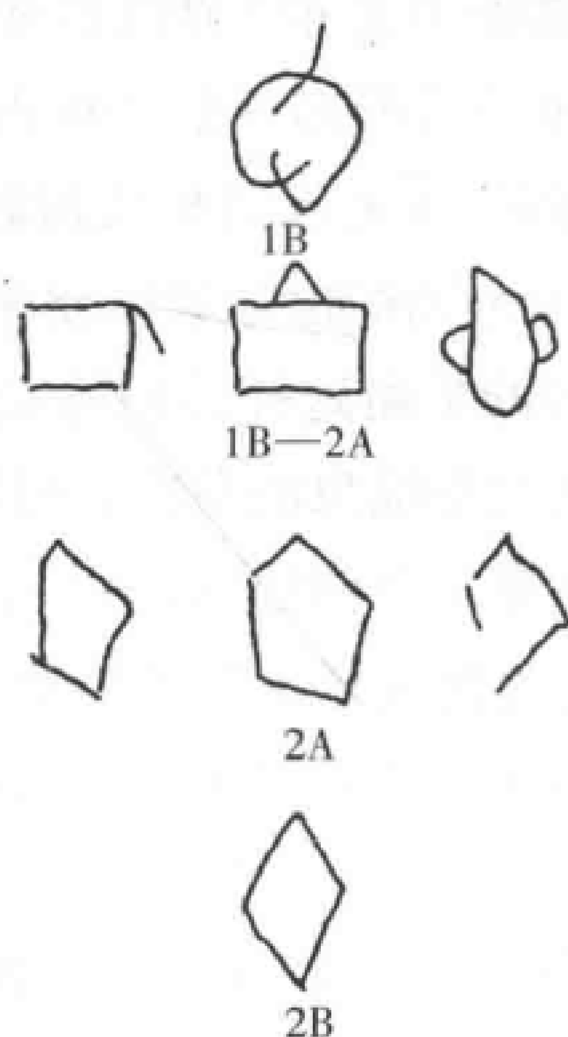


图9 1B到2B亚阶段绘制菱形的进步

在2B亚阶段，菱形的问题最终被解决，接触和分离、封闭图形的内部和外部这些问题也都被解决，即使仍不是立刻组织出来的，而是通过调整的。

乌尔斯(4;10，提前很多) 成功画出所有图形，或立即或稍微等一会儿，对于内切形状则通过试错进行。用两笔立即构造出菱形，每个笔画都包含一个锐角并且和另外一个正确的相对应。她自发的绘画(完整的小人、船、花等)是非常典型的智慧现实。

梅(5;3，也很提前) 成功画出所有图形。菱形由三笔组成，一个锐角，接着是两条直线，它们的端点组成了一个对称轴。

普茨(6;7) 用四条独立的、精心设置的笔画画出菱形。对内切的图形进行了一系列的尝试，并伴随着对问题的正确的口头表述："*这个不对，因为它不能接触到。*""*它们应当被粘在一起。*"但是通过不断的接近，它们最终都被成功地画出来了。

类似于在第一章第五节已经被清楚地证明了的那些探索，尤其是马尔成功地发现

了菱形的四条边的时候说“*它是倾斜的，它是倾斜的，它是倾斜的，这个也是倾斜的*”，根据反向的对称顺序调整倾斜度，这是这些成就背后的原则。但是对于更困难的图形，这仍是一个不断尝试错误的调整过程，而不是有预期的操作行为。

第七节　第三阶段：结　论

我们会回忆起对触知觉条件的探索，它说明了阶段三开始于形状提取过程中的运动可以被定义为运算性的。那就是，足够灵活、可逆地连续返回参照点，随后的建构是建立在这些参照点上的。

简单图形的绘画不能把这种区别清晰地呈现出来，除了那些完全以中心为导向的模型（例如纳粹十字图形，对它的绘画在第一章第六节描述过）。然而有可能的是，就目前的图形来说，明显区别于7岁时，很多孩子可以立刻正确地画出来，他们的建构是可以被提前绘制的心理形象预期（依据电位测量，坐标等）。[1]以下是一对例子。

米尔（6;4）　所有的模型都立刻被画出来，尽管米尔的小人仍然很原始，帽子高高戴在头上，躯干像个三角形，等等。

里克（7;6）　将所有的模型都立刻正确地再现，把小人的全脸和轮廓都展示出来了。

总之，很显然，几何图形的分析远比对像矮人那样的自由绘画图形的分析进行得深入。依据布伦茨威格提出的这个有趣理论，几何绘画的发展使我们能深入研究由图形的提取所展现的现实问题。也即，空间形状思维（the idea of spatial form）的起源是在追踪一个人画物体轮廓的时候被发现的。但是可以断定的是，在绘画中，甚至不仅仅在触知觉中探索触觉和动觉，空间形状的心理抽象不仅仅是通过物体的活动提取物体的形态特征，尽管这样的一个过程事实上在发生，而且像是对相应物理结构的持续刺激。

说这么多，几何形状不单是一个发达的物理形状的追踪，临时也是相应的点对点。形状的提取涉及对物理空间的全部重构，这是以主体自身的活动为基础的。从这个意义上来说，其根源是感知运动，最后心理的表征空间是由这些运动的协调决定的。这是从绘画研究得出来的主要结论，不管是拓扑关系还是欧几里得关系。从刚才概括过程的开始到最后，所有这些结构都源于物理活动的总体协调。

在这一点上，尤其要注意我们当前研究所展示的图形建构或对绘画图形的模仿与

---

① 对明确包含这些因素的复杂整体的绘画见第十四章。

用火柴棍复制这些图形之间的相似之处。尽管第二个方法可能比较容易一些,不像绘画中那样在执行中缺乏技巧,然而相对于排列火柴棍时建构及重构它们,绘画能够在从物体中提取形状时提供一个更直观的想象,这是不言而喻的。然而,这两种技术的比较是有用的,并不只是出于几何的观点,还尤其是与这个问题相关:究竟形状是被直接从客体中提取出来的,还是从主体的行动中提取的?

在所有技术(有时开始于这一个,有时开始于另一个,都需要展开观察,避免遗留问题)的帮助下,对30年代的儿童的系统研究产生了以下这些结论。尽管用不同的技术,在同一个儿童身上发现同样的错误类型是不必要的,然而,不管是对于绘画还是火柴棍技术,不同阶段达到的形状构建之间还是存在紧密联系的。仅仅有一个例子中,一个4岁的儿童之前从没有画过画,对他来说火柴棍构建要优于绘画(即使是在这种类型的例子中,一般二者也是平行发展的,正如1B亚阶段中的杰的例子中展示的那样)。可以承认的是,对于容易封闭的形状,绘画通常稍微领先于火柴棍构建,当需要构建整体结构时,在火柴棍的帮助下接下来更容易成功。因此,在正方形的例子中,封闭图形的绘画缺乏角和直线边,它被看作和保持不封闭状态的火柴棍构建相等,因为这四条线组成的四个边不能一点点地被调整。同样,早期绘画中的正方形与用火柴棍成功构建的正方形是相符的。

三角形的例子有效地说明了儿童在尝试展示为了封闭而倾斜三条边和协调三个角时遇到的困难。用绘画和火柴棍技术,儿童开始不能成功地分出三角形和正方形,但是这种区分开始于有直角而没有斜边的开放的形状(或者有时是封闭的形状)。在绘画水平上,包含直边组成的角的三角形,完成图形时第三条边是弯曲的而不是直的,相应的火柴棍建构或者不能封闭图形,或者不能连住端点,以至于一条边和其他的两条相分离。因此,调整三根火柴棍以构成三角形的任务的难度和画出它相同,而且实际上这两个困难能同时被解决。对于菱形来说,绘画中出现的所有不同的形状可以与火柴棍建构中的对照,它们都揭示了相同的在协调倾斜和对称中遇到的困难。

简单地说,火柴棍法决定性地证明了从绘画的研究中能辨别出什么。而且这个结论是,重构形状并不仅仅是分离不同的知觉品质的问题,也不是立即从客体中提取形状的过程。对形状的重构依赖于把它们放到关系中的主动过程,而且它因此显示出抽象是以儿童自己的活动为基础的,而且来自他们逐渐的协调过程。

而且,建构过程并没有被排除,恰恰相反,直接显示了活动和它们引发的几何形状。但是在几何形状的例子当中,这个过程远远超过了这些适应或提取,因为客体被同化到儿童自己对活动的协调中,而且仅仅是这一点就使得物理形状被重构处理,这是通过与这些活动最先产生的几何形状作类比进行的。

第三章 线性和圆形顺序[1]

我们对绘画和触觉感知的研究表明，最简单的拓扑关系，如邻近和分离关系，是在心理发展的进程中最先出现的。几何学家在按照公理处理空间问题时获得的也是这样的顺序。在心理学领域中，这一论断是正确的，即邻近关系代表了儿童产生空间概念动作的最基本特征。

连续排列和组合引发的相似和不同的关系使儿童的逻辑关系和分类能力得以发展，独立于物体在时空中的顺序和类别。顺序和类别可以由心理对比产生。不同的是，空间结构必须由连接的元素组成，因为产生空间概念的动作必须依赖这些物体，而不是一些分散或分散堆积的物体。在建构或重组时也是这样，按照邻近关系把它们一个接一个地连接起来。但是有时候，一对物体不能被分开，因为它们相互渗透的程度如此之深，以至于不能在它们之间画出一条分界线。在这种情况下，按照“外形”把它们分开，这也被认为是空间的一个本质特征。

在线性序列中（就像看到的那样，儿童在自发的绘画中是从线开始的），A，B，C等分离元素的邻近关系可以为顺序关系提供基础。研究者认为这些在发展的早期阶段是直观的。顺序或序列关系是第三种基本拓扑关系，可能它最适合在研究封闭（enclosure）概念之前来研究儿童的心理发展，因为“之间”这种关系本身也是一种顺序关系，并在某种维度上与封闭性联系起来。例如在序列ABC中，B在A和C“之间”。不可否认的是，一个人可以从封闭图形开始，然后在边界线的参照下把它变成线性顺序，但是封闭整体内的各序列元素仍会构成一个序列。

我们在本章中先研究简单的线性顺序（$ABC\cdots$）和圆形顺序（$ABC\cdots XYZABC\cdots$），甚至用“假结”模型（见图10）把圆形顺序变得更为复杂，以便与下一章关于绳结的研究结果进行对比。我们之前[2]就发表过一些关于顺序概念的研究结果。然而，在那个研究中，我们关心的是在一个绕着中心旋转的管子里的球在运动时的顺序，在一个旋转的圆筒里的颜色的顺序，等等。与之不同的是，现阶段对顺序的研究与运动无关，不是物体相对于儿童的步伐、眼神、思想的相对运动，而是一系列物体的正向和逆向顺序。以下的研究和刚才提到的实验完全不同。

① 与 Mlle. E. de Planta 合作。

② 《儿童的运动和速度概念》，第一章和第二章。

第一节　方法和一般结果

以下的研究主要包括五点。

1.再现一个简单的线性顺序。给儿童看一根杆，上面有七个或九个五颜六色的珠子，儿童需要在同一根杆上或另一根杆上再现这个模型。先让儿童根据颜色对珠子进行分类，确保其可以识别出不同的颜色。我们优先选用大的、易于操作的木质珠子，并且儿童可选择的珠子个数比模型中的珠子个数多，因此在再现时的最后一个元素就不能由剩下的那个珠子决定。

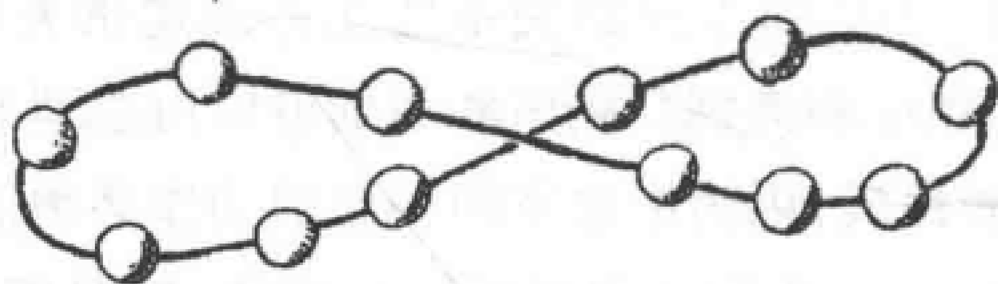


图 10　“假结”模型

接下来，我们呈现了两条“晾衣绳”(两条绳子)，一条绳子比另一条绳子偏几厘米。几件衣服(七件或九件纸做的衣服)被挂在第一条绳子上。在儿童叫出它们的名字之后(在挂起来之前先把它们放在一起。“再给我一件红裙子”，等)，他必须把相应的衣服放在同样的位置(同样，这里的可选衣服比模型中的衣服多)。这种对应要么在正对着模型的情况下，每件衣服都挂在它的对应衣服的下面；或者是隔着几件衣服，这就不能简单地基于外观来对应。同样，让儿童在柔软的电线或结实的绳子上再现彩色珠子组成的圆形，来与桌子上彩珠的圆形顺序相对应。

2.把圆形顺序转变成简单的线性顺序，使杆子上五颜六色的彩珠顺序和七个或九个珠子组成的圆形顺序相对应。

3.再现逆向顺序。在杆子上再现珠子的逆向顺序。让儿童在模型下方，并且正对着模型立即进行操作。一个由奇数元素组成的序列，如 *ABCDE*，在逆向顺序 *EDCBA* 中处于中间位置的物体 *C* 还对应着模型中的同一个物体。同样的是，要求儿童以逆向顺序再现珠子的序列。最后，要求儿童在模型下方，再现衣服的逆向顺序。

4.衣服堆积的正序或逆序。把衣服放在两个篮子中，依照一定的顺序把它们从左边或右边的篮子中取出。

5.再现形状为“8”(图 10)的珠子序列，无论是在可以变成这种形状的绳子上，还是在一根硬棒上(偶尔比模型中的珠子靠得更近一些)。在最后一项实验中，我们会遇到某些问题，并且这些问题在关于绳结的研究中会再次出现。然而，在这里我们处理的是间断的不连续序列，而在第四章中，我们处理的是连续序列。

以上任务的反应基础是三个可辨别的阶段。此处不考虑最初状态(零阶段)，这一

阶段没有对应性,有的只是不考虑顺序的物体的相似。第一阶段的儿童不考虑顺序,可以建立物体简单的直观的相似。第二阶段的儿童可以实现简单的线性顺序对应而非圆形顺序对应。这时可以考虑让儿童尝试建立逆向顺序以及与圆形顺序相对应的线性顺序,即使儿童只能通过尝试和错误来完成。第三阶段的儿童可以轻松地建立对应关系以及系统的逆向顺序。

第一阶段可以分成两个亚阶段。在1A亚阶段,当要求儿童再现给定的珠子顺序或者按照模型中的顺序"把衣服挂起来"时,他只能进行一些相同物体的对应。因此,他把相同的物体(同样颜色的珠子,同样的衣服)放在他的复制品中,而不关注它们的顺序。这个时期大概在儿童3—4岁出现。在它之前(零阶段),2—3岁的儿童会以任意的顺序放置任意的物体,没有丝毫想再现模型的倾向。在1B亚阶段,儿童可以根据邻近关系把物体分成小组,但是他不能协调组和组之间的关系。

在第二阶段(4—6岁),儿童逐渐地建立顺序的对应关系。在2A亚阶段,只局限于建立面对面的物体的对应关系,因而出现各种有对照作用的知觉特征是显而易见的,它们清楚地揭示了这种限制条件的原因。一旦不允许有视觉参照,儿童就不能再现顺序。此外,在此水平上的儿童还不能理解"之间"这种关系。然而,随着2B亚阶段的来临,很明显的是,儿童在建立对应顺序时有更大程度的灵活性,导致复制品和模型不再有同样的知觉外观。结果就是,儿童可以把圆形顺序转变成线性顺序,虽然还不能形成逆向顺序。最后,在2B亚阶段和第三阶段中间,儿童通过尝试错误的方法,以不确定的方式,逐渐地建立逆向顺序。同时,对更复杂的图案如"8",还没有形成准确的对应关系。

从6岁或7岁开始,儿童逐渐进入第三阶段,它是一种运算特征。儿童可以通过逆向思维马上建立逆向顺序,而不再通过半运动(semi-motor)、半智力(semi-intellectual)的尝试错误过程。从图形"8"到线性顺序的转换仍有一些困难,而且在困难被克服之前还出现了两个容易辨别的亚阶段。

总而言之,顺序对应性的发展过程代表了进化过程中平缓的连续的过程,从知觉相似开始,以正向或逆向顺序的操作告终,还带来了在多个水平上的运动的协调,以及或简单或复杂的心理表象。

第二节 第一阶段:通过物体之间的相似建立的不考虑顺序的简单直觉的对应性

当2—3岁的儿童被要求再现某个特定序列时,我们可以看出他们不能理解这样的要求。他们随意地选择物体,随意地排放物体,丝毫没有依据模型选择相应物体的倾向。这是纯粹消极的行为,和通过绘画再现一个物体时的乱涂乱画的行为不相上下。从零阶段开始列举是毫无意义的,但是这里有一个例子介于此阶段和1A亚阶段之间。

迪(3;0) 在珠子实验中,只再现了模型中的两个相似物体中的一个物体。在衣服实验中,在挂起来之前,他想把两件同样的衣服放在一起。当所有的衣服都被挂起来后,迪尝试着把对应的物体挂在低一点的线上,但是毫无顺序可言。在第二次关于珠子的尝试中,在选用的颜色的相似性上稍微有了进步,但是在顺序上还是没有进步。

因此,迪在珠子实验中,仍然处于零阶段,虽然他在衣服实验中达到了1A亚阶段。他可以选择对应的衣服,但是不能考虑邻近性,即使在*AB*或*BA*这样成对的物体中。以下还有一个在此阶段的例子。

埃利(3;7) 知道这些衣服的名字,他自己把衣服一件接一件地挂起来。当要求他在低一点的绳上,面对着自己的模型再现自己刚才挂的顺序时,他拿起了相似的衣服(从12件中选7件),但不是按相同的顺序挂的。"这完全正确吗?——*对*。——有哪儿改变了吗?——*没有*。——在这条绳(模型)上,这条裙子是挨着衬衫的吗?——*是的*。——这儿呢?——*没有*。……——那么接下来在这儿试着挂出和刚才相同的顺序。"埃利又尝试了一次,但是仍然毫无顺序。他只是放对了一对邻近的衣服,但这是纯偶然的,因为他没有把握住其他的邻近关系。

珠子实验:基本上是同样的珠子,但不是以相同的顺序。"它正确吗?——*正确*。——为什么?——*这儿有一颗蓝色的,那儿也有一颗蓝色的……*"他在第二次尝试中没有放对一对邻近的珠子。

与之对比,儿童在3岁半到4岁,出现了1B亚阶段的行为特征,这是建立顺序对应性的起点。儿童把和模型中一样的物体放在自己的复制品中,仍然没有总体的顺序,但是有对部分顺序的尝试。换句话说,儿童想把物体按照模型中的顺序排列,但是只能掌握成对元素间的邻近关系,而不关心邻近的物体到底是如何排列的(*AB*还是*BA*),在加入一对物体时也不知道固定前一对的位置(*ABCD*还是*CDAB*,等)。

西尔(3;6) 自己把衣服一件件挂在一条绳子上,我们把她挂的顺序称为*ABCDEFG*。当要求她在另一条绳子上再现这个顺序时,她拿起了相同的衣服(从12件中选7件),把它们挂起来,没有确定的顺序,她自己表示很满意。当被问及复制品是否在所有方面都是正确时,她发现在模型中,绿裙子(*D*)和红长袜(*E*)是相邻的,但是在复制品中不是这样。她被要求在第三条绳子上修正自己的模型,但是她把顺序挂成了*ED*而非*DE*。接下来,她注意到*B*和*C*是相邻的,她把*BC*放在了*DE*的后面。当被问及在模型中,长袜(*E*)和衬衫(*C*)是否挨着时,她把*C*放在了*D*旁边,产生的顺序是*DCEB*,等。

珠子的排列实验：西尔选对了正确的珠子，但排列顺序是随意的。“现在都是一样的吗？——是的。——为什么？——因为……——请向我稍微解释一下。——那儿，那儿有一个(粉色的)，这儿也是一样。那儿，那儿有一个，这儿也有一个相同的(关注了颜色的相似，忽视了顺序的对应)……——现在完全正确了吗？——对。——粉色的和哪个挨着呢？——绿色的那个。——在你的杆子上呢？——没有。”她又重新做了一遍。新的复制品也没有顺序，但是某些邻近关系是正确的；*EF* 还是 *EF*，但是 *BC* 成了 *CB*，等。物体是成对的，但是对和对之间没有协调关系。

亚奇(4;0) 他的表现稍微好一点，在第一次尝试中放对了一对物体，然后一点点地改进它，虽然最终也没有做到完全正确。衣服悬挂的顺序如 *ABC*……*G*，在第一个复制品中的顺序是 *AEDBFG*(缺少了一件衣服)。“这和模型完全相同吗？——是的。——裤子旁边的是什么？——袜子(他把 *C* 补进去)。——袜子旁边呢？——一件黄裙子。——好吧，把它们按相同的位置排列。——(他再次排出的顺序为 *ABDECFG*，最后一对物体是正确的，*DE* 这一对也是正确的)——蓝夹克(*D*)的位置正确吗(他重新排列后的顺序是 *ABCEDFG*)？——现在起风了，这位女士想把衣服挂在她周围(*A*...*G* 排成圆形后是相邻的)。——你也愿意完成同样的事情吗？——是的(他排成的顺序是 *ACFBDEG*)。”他把珠子排成圆形的尝试没有成功，把圆形顺序变成线性顺序的尝试也没有成功。

逆向顺序实验：“你看，最后一个(*G*)要先放，然后继续这样做(通过手势演示)。”亚奇排列的顺序是 *GFBCDEA*，然后把F放在了 *E* 和 *A* 之间。

昂(4;0) 在再现悬挂衣服的顺序 *A*……*G* 时，他首先排成的顺序是 *ABC*+*EFG*+*D*，接下来改成了 *ABCD*+*GFE*，之后又改成了 *AEBGCDF*，然后是 *ABGECDF*，当他在一个一个地纠正由三个或四个物体组成的序列时产生了越来越大的困惑(在他的第二次尝试中，我们看到了反向的 *GFE*)。圆形顺序 *A*……*GA* 被排列成了 *AH*(不在模型中)*FGECDB*，然后改成了 *AHFEDGCB*。他排成的逆向顺序是 *CDGEFA*。圆形顺序向线性顺序的转换同样也没有成功。

这些基本的反应使我们了解到顺序的产生需要一些必需的心理条件。如果需要再现一系列相邻的元素，儿童首先得找到邻近的元素。事实上，两个顺序之间的对应性，假定在模型上相邻的两个元素 A_1B_1 在复制品中对应的两种顺序可以是 A_2B_2 或是 B_2A_2。模型上有了第三个元素 C_1，模型上有邻近的 C_1D_1，因此在复制品中必须有 C_2D_2 或是 D_2C_2。在模型 $A_1B_1C_1$ 中，*C* 和 *B* 挨着，不和A挨着，因此在复制品中 $B_2A_2C_2$ 或 $A_2C_2B_2$ 就被排除了，只有 $A_2B_2C_2$ 或 $C_2B_2A_2$ 是可能的。简言之，协调的邻近关系本身已经可以决定可能的排列顺序，无论是正向还是逆向，因此在这个序列中引入两种可能方向的概念。此外，顺序概念就预先表明邻近和间隔大小是独立的，特别是，和感知邻近是独立的。例如，在线性序列 *A*...*B*...*C* 中，*B* 总是比 *C* 距离 *A* 近，无论它们之间的间距是多少，因此只

用考虑它们的顺序,而不用考虑它们在欧氏空间中的形状。

至于顺序的方向,忽视射影概念(如在物体的右边或左边)和欧氏坐标,只根据枚举序列中物体的方式,从*A*到*B*或从*B*到*A*。既然枚举需要根据一定的方向,在排列前必须把物体分开。简言之,顺序代表了邻近、分离和移动时恒定的方向。

通过对以上儿童的描述,我们立即发现2—3岁的儿童还缺少的一种基本能力,就是根据一些相同的属性(颜色等)排列相同的物体来再现模型的能力。与此对比,他们仍然缺失的,至少在1A亚阶段,是复制邻近关系,找到模型中的邻近关系的能力。结果就是,埃利找到了所有在模型中出现的物体,把它们按完全不同的顺序排列,接下来,当他注意到裙子不是"挨着"衬衫等情况,他在第二次尝试中也没有得到更好的结果。在1B亚阶段,西尔以相似的方式开始,但是她发现自己没有把*D*和E放在一起。这导致她排出了成对的*ED*和*BC*,但是不能协调它们的关系。亚奇可以马上把物体排成正确的对,但是他也不能协调对与对之间的关系。最后,昂可以给出三个物体(*ABC*或*EFG*)或四个物体组成的序列,但是在协调序列之间的关系时产生了困惑,最后也打乱了它们的内部顺序。

产生这些困难的原因是什么?这和在画复杂的图形如小矮人等时的困难相似。我们在第二章中看到,当儿童可以抽象出一个闭合的形状,但是却不能区分出正方形、三角形和圆形时,他总是在某些形状的边缘附近(内部、外部或者横跨边界)画出圆形。可以说儿童在这一阶段真正掌握了邻近的简单形状或成对事物的心理表征,但是当他画矮人时,他会把胳膊和脑袋连在一起……持续几年都会这样画,不关注精确的邻近关系(综合能力的缺乏)。在绘画或再现顺序序列时出现的问题可以这样解释。

邻近关系是所有关系的基础。然而,在绘画再现或复制线性模型的过程中,相邻元素的分离已经足以改变邻近关系了。这意味着在再现过程中,最初的邻近关系在被破坏之后需要被重新创造。现在,这种分离元素的综合,或者说是邻近性,为原始分析或枚举预设了一个固定的连续顺序,但是这种固定方向的顺序只能通过协调分离元素之间的邻近关系得到。儿童毫无进步,因为他们已经进入了一个循环。

这些反应真正有意思的是,我们看到儿童只在一个方向上取得成功,他们只能通过物体之间的邻近关系来判断,也没有其他的参照标准。第一,儿童不能通过参考系去定位物体,因为他还不能理解线性顺序,也不能把物体之间的距离或长度联系起来。第二,至于射影概念如左边和右边,我们可以清楚地看到,当儿童再现成对的分离的元素时,会把它们摆成*AB*或*BA*,因为他还不能判断它们的方向。德斯可伊瑞斯小姐(Mlle. Descoeudres)[①]指出,通过德克雷利乐透测试(Decroly's Lotto test),儿童直到平均5—6岁才能判别木鞋(木屐)的照片朝左还是朝右;直到6岁左右,儿童才能正确判断旗子的四个方向:左、右、上、下;等等。因此不考虑儿童在语言上判断是左还是右,这些关系对于

① A. Descoeudres, *La Developpment de l'Enfant de 2 à 7 ans* (1922), p. 231.

儿童获得一个固定方向的顺序没有帮助。

因此在再现序列时,儿童从成对物体开始,通过我们在讨论一开始就概述的方法把它们联系起来。但是儿童要想成功,就必须保持单一的顺序,无论是从左到右,还是从右到左。我们后来发现,昂,这个发展最超前的男孩,尝试着把*ABCD*和*EFG*联系起来,首先得到的顺序是*ABCD+GFE*,他不经意间颠倒了后者的顺序。后来,他在改变最后一个物体*E*的位置时混淆了所有元素。

为了把相似的成对元素按正确顺序排列,儿童必须有一定程度的运动协调感,使他能够保持自己的方向感。但是为了达到这种协调程度,他需要逐步前进,还得被迫参照邻近物体和成对物体的外观加以协调。在现阶段,这形成了一个恶性循环,阻碍了儿童发现给定序列的一般顺序。但是在下一阶段,这种困难就被克服了,通过邻近、分离和方向感之间的一般联系,每种关系都能得到另外两种关系的支持。

第三节　第二阶段:有明显对应性时的顺序的直觉表征

4—5岁的儿童在将复制品和原模型相对应的过程中,通过时常检验的方法来理解顺序的概念,但是一旦引入逆向顺序或圆形顺序,儿童就做不到了。当把复制品放在模型的一侧时,儿童甚至不能再现正向的线性顺序。

蒙(4;9)　在杆子上再现模型中珠子的顺序。和第一阶段一样,他刚开始只顾寻找相同的珠子,不考虑珠子的顺序。他把他的杆子拿得和模型近一点,看到相同颜色的珠子不是一一对应的。随后他又重新做了一遍,他让复制品挨着原模型,依次检查了每个珠子。

当在一个直杆上再现一个圆形顺序的珠子序列时,他的复制品中包含了模型中的所有元素,但是顺序不正确。蒙尝试通过把复制品和模型中的珠子重叠在一起来进行纠正,但是他没有成功。珠子项链被展成了一条直线,他也看到了自己的错误。随后,绳子再一次变成圆形,他还是没有成功地再现顺序,除了再现了两对珠子*BC*和*FE*,第二对的顺序还被颠倒了。当模型再一次被展成直线时,它和复制品有一点距离(模型被放得高一点,在左边),蒙把最初的珠子*ABC*的顺序放对了,但是其他珠子的顺序都错了,其中一对珠子的顺序还被颠倒了。

在新一次的尝试中,出现了圆形顺序,每隔一个物体出现一次相同颜色的珠子(*ABACAD*)。"你从项链的什么地方开始?——*蓝色的那个(B),接下来是一个黄色的(A)。这有点难!又一个黄色的(A),然后是一个绿色的(C)*。"他成功再现了*BAC*三个元素,但是随后他又摆出了*AAD*。当把模型和复制品并排放着时,复制品立刻得到了纠正。

再次回到项链形状的问题时,同样的困难出现了。我们试着让他通过手来指出对应性,他一个手指指着杆子,一个手指指着项链。"在绿色和蓝色之间的是哪个(他没有理解问题,因此列举了所有的珠子)?"因为缺少触觉运动和视觉协调,他不能把握圆形顺序(虽然他能在直杆上把握顺序)。

当要求他在三条项链中挑选出两条正向顺序的项链,其中一条是逆向顺序时(当然,每条都由相同的珠子组成,也有相同的邻近关系),因为缺少视觉运动协调,他没有成功地找出来,他觉得它们都是一样的。

佩尔(4;7) 要求在直杆上再现珠子模型。他在第一次尝试中,颜色是正确的,但是顺序不对,除了有几对在不同方向上匹配的珠子,但是它们又不协调。把复制品靠近原模型后,佩尔发现了他的错误,又重新开始,通过重叠的方法成功做到了。他在把圆形顺序转变成线性顺序时完全失败了。

当第二条绳子和第一条绳子靠得比较近的时候,他在第二条绳上成功地再现第一条绳上的衣服的正向顺序,但是却在第二条绳子比第一条绳子偏一点时失败了。他在再现逆向顺序时也失败了。

要求佩尔在珠子项链(正向顺序)中指出:"在哪两个颜色之间是红色珠子(B)?"他依次说出了所有的颜色,说明他不理解这个问题。

利尔(5;4) 要求她把衣服挂起来。在第一次尝试中,模型偏向右侧。利尔放好了*AB*,但是不能继续下去。当她的绳子移动到模型的正下方的时候,她可以放对顺序,虽然在一开始漏掉了第六个元素(七个中的一个),随后通过依次用手指指着检查纠正了这一错误。当把模型移到了偏右侧时,她又开始了新的尝试。一开始她排成的顺序是*ADCE*,接下来把*E*向右边挪,排成的顺序是*ADCFE*。接下来,她说道:"不,它和它挨着。"接着把它变成*EF*。在下一次新的尝试中,她给出的顺序是*ABCFEG*,接着是*ADBCEFG*。"(*A*)接下来是什么?—*噢,是呀,衬衫*(最终她排出的顺序是*ABCDEFG*)。"

"好。现在这位女士把衣服挂成了圆形。你也要这样做。"利尔尽力去再现圆形,但是没有成功地再现顺序。她首先把*A*放在了一端,接下来把*DE*放在了另一端。然后把*C*放在了*D*的前面,把*G*放在了*A*的前面;最后把*F*放到*E*和*G*之间,把*B*放在*A*和*C*之间,最终成功地再现了圆形顺序。接下来利尔被要求在棒的两端被颠倒的情况下以相同的方向再现相同的圆形,来看看她是否能根据顺序再现它,而不只是像她之前做的那样从一端掠到另一端。她首先排出了*BAE*,接下来又从反方向开始,排出了*ABGCE*(因此她从模型的一端移到了另一端)。她从圆形开始,但是却是在切线方向,*ABGFCED*。"但是你必须把衣服挂成圆形。"利尔挂出了(同样是逆向顺序)*ABFCEDG*,后来在实验者的建议下进行了很多纠正,最后她得到了一个正确的但是逆向的顺序,因此恢复了最初的状态。

让她用直线再现给定的项链顺序,她排成的是一系列不协调的对*BADCFE*。她

也不能把圆形顺序转换成线性顺序。

弗朗(5;6) 在两条绳子面对面的时候,他可以很快成功地把衣服挂成直线序列。他也能够再现圆形顺序,但是只要杆的两端被颠倒了,他就只能通过不协调的成对衣服逐步进行再现;顺序*ABGFEDC*最终在实验者的建议之下成功地变成了*ABCDEFG*。在新的尝试中(不同的元素),他给出了*GFCAD*,接下来是*ABFCED*,最后是*ABCDGFE*。

乌拉(5;8) 立刻就能再现出七个珠子的正向顺序。关于逆向顺序:"这次你能从另一端开始吗?——(他看到*G*被放在了之前放*A*的位置)*我不知道该怎么做。我做不到*(他放了*GE*,漏掉了*F*,接下来又放了*D*,和模型中间的*D*相对应)。——*有什么东西在困扰着我*(*D*!接着他从*G*开始,边做边说)。——*现在没有什么困扰我了*(*GFE*)。"但是他再一次在*D*上犯了错误。他也不能把圆形顺序转变成线性顺序。

他成功再现了衣服的正向顺序,接下来开始把它们堆起来,一件一件地松开。他事先被问道:"裤子(中间的*D*)可以放到上面去吗?——*不,因为它和那个(E)挨着*。——那么这个(*E*)可以放到上面去吗?——*不……对,它可能吧*。"关于逆向顺序,他给出了*GFE*,但是当把*D*放在前面时就全乱了。

我们观察到儿童在第一阶段,一旦通过分析(在物体的分离过程中)把邻近关系打乱,在再现邻近关系时保持一个固定的顺序是很重要的。既然每对物体如*AB*可以被排列成两个方向*AB*或*BA*,它们的协调事实上代表了这两个方向的区别,也代表了儿童能够区别出两个方向的可能性。这也就是在2A亚阶段的儿童以非常明确的方式向我们证实的,因为他们可以在某些情况下成功地再现顺序,但是在某些情况下就不能,这样就能把其中涉及的因素分离开来,让我们得以分别来研究它们。

首先,非常清楚的是,这一阶段的独特发现,即当复制品在模型的正下方时,儿童可以再现正向顺序,这是他们新掌握的保持固定顺序的能力的结果。例如,蒙一开始(就像在第一阶段一样)收集了和模型中相同的珠子,没有关注到特定的顺序。接下来他想到把他的杆子拿近模型,发现模型中的顺序和他的不一样。在他的第二次尝试中,他采用了依次检验的方法,把它们和模型中的物体相对应。通过这种方式,就自然地保持了固定的顺序,结果就是只要方向没变,他就可以得到正确的邻近关系。佩尔采用了同样的方法,成功地再现了项链的珠子的顺序以及挂在晾衣绳上的衣服的顺序,但只是在复制品中的物品和模型仅相距几厘米,在模型下方并且和模型相对应的情况下。因此当儿童依据简单的知觉模型来组织物体时,方向感就再一次得到保证。

但是模型需要稍微变得复杂一点——当模型偏向一侧时,导致儿童在模型和复制品中的运动不是很协调——因为不协调的邻近关系马上就出现了,就像在1B亚阶段一样。在这种情况下,利尔给出的顺序是*ADBCFEG*,她观察到了成对的*BC*和*FE*,但是方

向是反的。总地来说,邻近关系得以保证,但是成对的物体之间没有联系,因为缺少在第一种情况下,依据简单知觉模型就可以得到固定顺序的运动。

除了分离——再现序列时重要的一步——在现有的情况下,在再现顺序时,明显有两个相关的因素。第一个是重建在分离过程中被破坏的邻近关系;第二个是进行A-B或B-A的系列顺序的选择,同时还有对这个序列的保持,不在两个方向之间来回变换。然而,在这一阶段,一旦模型和复制品中有了空间距离,儿童就会发现在缺少运动协调的情况下,保持这种方向感有困难。

这一点在复制圆形顺序(由桌子上的衣服组成的圆形)时更加明显,不管是正向还是逆向,又或者是把圆形序列的珠子项链变成线性序列。在后一种情况下,蒙在排列珠子时没有考虑它们的顺序。随后他排成了几个由两个或三个物体组成的集合,但是他不能协调整个序列。利尔尽力去再现圆形顺序的衣服——但是只能在忽视正确的顺序和固定两端的情况下取得成功。一旦要求她再现正确的顺序——由于最初的物体被改变了——她一开始的表现就好像1B亚阶段的儿童再现线性顺序一样,她给出的序列是*ABGFCED*,在这里有成对的相邻的*AB*和*GF*,但是被颠倒了顺序,接下来是一个分离的元素,再接下来是顺序颠倒的成对的*DE*。弗朗的表现几乎也是一样的。

现在我们看一下再现圆形顺序时的困难。在分离物体和保持方向上都有困难,因此出现了类似更年幼的儿童在处理线性顺序时的行为。和直线不同,直线有相对的两端,而圆形没有参照点[①],因为它是一个闭合图形,因此儿童发现在不忽略任何物体的情况下分离物体有困难。打乱了序列之后,他需要重建邻近关系,圆形也带来了额外的困难,因为两个方向都会回归到同一个物体。甚至,从圆形顺序的两端开始进行,从上到下或是逆向顺序,儿童颠倒了顺序,自己都没意识到。这就是他为什么把相邻的物体一会儿朝着这个方向,一会儿朝着另一个方向,就像在1B亚阶段的表现一样。

在这一点上,我们发现,发展滞后的儿童甚至不能通过手指正确对应出珠子项链中的珠子和直杆上的珠子,也不能用眼睛辨别两条项链上的珠子的顺序是否对应(蒙)。因此在把项链中的珠子和直杆上的珠子进行对比,或者是对一对项链进行对比时,儿童仅靠眼睛或是手指的运动不足以保持方向的不变感。

在这些情况下,儿童不能得到逆向顺序不足为奇,即使在两条晾衣绳中的一条叠加在另一条上面的情况下。在正向顺序运算中,即使儿童已经掌握了如把物体以特定顺序放好的任务,逆向运算需要的从运动参照点出发的运动程度远远超过儿童的能力,因为儿童在处理相同顺序的非叠加情况下,都感觉手眼协调有困难。显然,这些儿童不能完成逆向顺序的原因是,它仍然是感知-运动(sensori-motor),这个特征也是他们在知觉和运动活动中固有的不可逆性的结果。发展最快的儿童乌拉,经历了大量的尝试和错误之后,可以成功地反转三个物体组成的序列*GFE*,更进一步时就会出现困难。当他考

---

① 给了两个易于感知的杆时除外。这就是利尔成功做出复制品的原因。

虑到中间的物体D时，在正向顺序ABCD……的中间问题也是D，他失去了方向感，因为接下来是DCBA还是DEFG都有可能。两个相同的中点使他困惑，失去了自己的方向感，就像一个没有经验的划桨手一样，在向前划了几下之后就往回划了。

最后，我们发现在2A亚阶段的儿童在理解“之间”这个概念时有困难。当被问到两个珠子“之间”是哪个时（如A和C之间），应该是B（蒙和佩尔），在正向圆形顺序的情况下，除了枚举序列中所有的元素[①]不能给出更好的答案。至于乌拉，他认为如果把A到G堆成一堆，那么E会在这一堆的上方。他已经开始把物体堆起来，正是在这种实际的动作中，他预知了这种可能性。

第四节　第2B亚阶段：顺序的直觉对应性和圆形顺序向线性顺序的转换以及再现逆向顺序时的失败

儿童在2A亚阶段获得的直观对应是一种刻板的特征，只适用于复制品可以和原模型直接叠加的情况。在此亚阶段，出现了更自由更灵活的超越邻近物体界限的约束的心理过程。一开始，当复制品和模型稍微有偏差，或者把圆形顺序转变为线性顺序时，这种新的发展只影响线性对应性。此时儿童还不能形成线性或圆形的逆向顺序，也不能把数字“8”转变成线性顺序。

若卡（4;11）　能准确地复制出排成一排的八个珠子，通过眼睛挨个看珠子，而不接触它们。他一个错误也没犯。但是在再现逆向顺序时，他只能排成HABC……（这也是在几次尝试之后才排列出来的）。但是他可以毫无困难地通过直线序列再现项链珠子的顺序。

数字8实验：若卡在再现上面的环时的方向是从左到右，到了交叉处又变成了从右到左，忽视了交叉。

衣服实验：此时，他需要预测从篮子里拿出的衣物的顺序。一开始，他甚至说不清楚顺序，只能不按顺序枚举它们。接下来，他把衣服按照A（最下面）BC……G（最上面）的顺序放好，接下来，要求他把衣服放到另一个篮子里，按照G在最下面，接下来是FE……A的顺序放好。他感到非常困惑，认为处于中间位置的D应该在最上面，在上面的衣服还应该在上面（在D的下面），下面的衣服还会在下面。

戴尔（4;10）　能够很快地把项链珠子转换成线性顺序，在珠子之间有间距的时候也能做对。当他面对三条项链的时候，其中有一条的顺序是反的。戴尔认为

---

① 当然，在某种意义上，圆形顺序DEFG也在A和C之间，就像B一样，但是儿童区分不出ABC部分和CDEFGA部分。

它们都是一样的,没有注意到反向顺序。"你看银色的珠子,它在哪儿? ——*靠近绿色的珠子(他指着绿色的珠子),在这个珠子的右边,在那个珠子的左边*。"

衣服实验:能正确地摆出正向顺序,但是在建立逆向顺序时失败了。他不能预测堆着的衣服的正向或逆向顺序。

格塔(5;4)　先看到的是珠子之间的间距很大的正向序列,他首先摆成的是 *ACB*,接下来是 *ABCE*,等。他在面对小间距的时候,毫无困难。

接下来他看到两条项链,其中一条是反向顺序。格塔没有看出来差别。"粉色的旁边? ——*绿色的*(他指向了右边)。——另一个呢? ——*是一样的*(他指向了左边)。"一条项链被反转过来,但是格塔仍然没有看出差别(就像镜像书写一样)。

衣服:当模型偏向左侧的时候,他可以成功地再现正向顺序,但是在再现逆向顺序时,他只能摆出 *GFED*,只能到 *D*,格塔不能继续下去了。

安德(5;4)　在再现衣服的逆向顺序时,也只能到达中间点 *D*,但是他可以成功地把珠子项链摆成直线。"它是一样的吗? ——*是的*(他用手指一一指出了对应关系)。——但是 *A* 和 *G* 在项链上是挨着的。——*噢,对*(他把 *A* 移到了末尾,成了 *BCDEFGA*)。——但是 *B* 也是和 *A* 挨着的? ——*噢,对*(摆成了 *CDEFGAB*)。——但是 *C* 也是和 *B* 挨着的? ——*噢,对*(摆成了 *DEFGABC*)。——*噢,它总是一样的*(他完全明白了)。"

关于逆向顺序的项链:"*这是一样的,只是这个是这个方向,那个是那个方向*(他做了一个反向的姿势)。"

莫尔(5;9)　能够马上成功地把圆形的珠子项链转换成直线顺序,但是他在停下来的时候有点困难。他摆成了 *A…FGAB…FGA*。他也能成功地再现出物体之间有较大间距的直线序列。

逆向顺序(衣服)实验:*GF* 接下来是 *DE*,又修改为 *EC*,然后是 *BC*,等,他经常回到正向顺序。

堆放衣服实验:在把前三件衣服 *ABC* 放好之后,他成功地预测到,既然 *A* 在最下面,那么 *G* 可能会在最上面。但是当把衣服放到另一个篮子时,他不能预测逆向顺序。我们把 *G* 放在了第二个篮子的最底下,他把 *F* 和 *E* 放了进去,但是却不知道 *A* 会是最后一个被放进去的。

洛特(5;10)　在第一次尝试中成功地把圆形顺序的项链转变成了一条直线。"*啊,这完全是一样的*(他自发地进行了检查,把珠子项链展开,和他自己的放在一起)。"

逆向顺序(项链)实验:他从 *ABC* 开始,随后进行了一些尝试来修正他的错误——*GAB*,等,又再一次回到了正向顺序。但是我们帮他摆出 *GFE* 时,他接下来摆出了 *DCB*。然而,当有两条项链,一条正向,一条逆向时,他没有看出差别。我们摆出了 *GF*,洛特接着摆出了 *ED*,在中点 *D* 后,就不知道如何继续下去了,*D* 在正向和逆向顺序时的位置一样。另一方面,他可以再现圆形顺序,无论既是起点也是终点的

A被放在了哪一端。

这些观察对研究心理的直觉表征非常重要，特别是儿童在运动活动中关联观点和发展可逆性时。更广泛地说，在这个水平获得的反应，事实上，标志着运动协调阶段的灵活性。此外，正是这不断发展的灵活性可以解释儿童在形状抽象实验中的进步，以及在少数儿童中看到的一两个预期思维的特征。

不断发展的灵活性首先在再现正向线性序列时出现，儿童在第一次尝试中就可以做到，甚至不通过重叠，也不用通过手指来检查对应关系（若卡等）。但是在格塔的实验中还是出现了一个问题，不过戴尔、莫尔等可以马上解决这个问题。这和物体之间的知觉邻近性有关系。当物体之间的间距较大时，儿童会觉得再现模型的顺序有些困难。很明显的是，在顺序实验的一开始，儿童依靠的是绝对邻近关系（指的是知觉邻近关系），只有到了现阶段，儿童开始摆脱这种困难，考虑相对邻近关系，把B放在C后面，或者把C放在B后面，不再考虑它们之间的间距。

至于圆形顺序，现阶段的儿童可以正确地再现顺序，不论起点和模型的起点在同一端还是在不同端（洛特）。并且，所有的儿童都可以毫无困难地把圆形顺序转换成线性顺序[1]。有一些儿童还会马上发现一条展开的项链就是一条拉紧的直线。但是很明显，虽然儿童知道这种转换关系，但是有时候会不情愿地接受在线性序列中，最后一个物体不能和第一个物体挨着，而在圆形序列中就可以。因此，莫尔不知道如何结束他的建构，他摆出的序列是ABCDEFGABCDEFGA。其他儿童，比如安德——他们遭遇的困难就更加明显了——把第一个物体放到最后一个物体旁边，然后是第二个、第三个……直到他们意识到可以一直这样做下去。

至于按顺序堆放衣服，大多数儿童还不能解决这个问题（除了那些在这个亚阶段末期的儿童，如莫尔），因为它包括90°的旋转，因此左-右关系变成了上-下关系。儿童不仅没有掌握这种变化，还有一个儿童猜想水平序列中间的那个物体，如D，会出现在一堆衣服的最上面。这更加证明了，在逆向思维之前，物体关系也不是不变的。儿童自然也没有理解逆向的堆放顺序。儿童不能理解当把衣服一件件地从一个篮子中拿到另一个篮子中的时候，最上面的衣服会在最下面，反之亦然（如莫尔和若卡，当把衣服按照ABC……G的顺序放好之后，认为中间的D在逆向顺序中会是最后一个）。

虽然儿童可以正确地把圆形顺序转换成线性顺序，但是却不能正确地再现“8”的形状。儿童不能依次考虑每个环，也不能考虑到交叉（见若卡）。我们在第四章解决半交织和绳结的问题时也会遇到这种困难。

虽然渐增的思维灵活性是这个阶段的显著特征，当复制品和模型相分离时，儿童可以再现线性顺序，或者是把正向的圆形顺序转换成正向的线性顺序，然而，旋转或半-交

① 这可能是错误的，然而，在这些结果和那些来自运动中的圆筒的结果之间做了一个比较（《儿童的运动和速度概念》，第二章），这是一个通过不可见的位移来预测顺序的问题。

织的问题却一直没有解决。在这一点上,最突出的困难就是再现线性或圆形的逆向顺序。若卡给出的顺序是*HABC…G*,戴尔和安德从*GH*开始,但是接下来就是不协调的对,每一对都是先根据正向顺序排列的。大多数儿童都可以再现中间物体之前的逆向顺序,但是中间的物体在两个方向中的位置是一样的(当线性序列包含的物体是奇数时)。他们会为这种巧合感到困扰,不知道如何继续下去(如利尔在前一个水平就为此感到"困扰")。

虽然在所有的直觉水平中,儿童不能再现逆向顺序的现象很常见,但是更让人吃惊的是在如给物体排序这样的实验中,大多数儿童都成了在2A亚阶段就出现的准知觉错觉(quasi-perceptual illusion)的牺牲品。当儿童面对两个或三个珠子项链的时候,他们没有发现珠子在排序上的差异。戴尔认为三条项链都是一样的,因为银色的珠子"挨着"绿色的珠子,却没有意识到他指着的绿色珠子是在银色珠子的右边,而现在却在银色珠子的左边。格塔不能理解逆向顺序,即使当项链被反转过来,以正向顺序放着的时候。只有安德意识到了这是两个相反的方向,其他的儿童都没有意识到这种差别,就像在第四章中儿童也没有注意到左反手结和右反手结的区别。

这种错觉好像只能用运动协调的不充分发展来解释,儿童还不能在足够快的序列中描述两个反方向的圆形运动,也不能比较它们。显然,在线性序列中不会出现这种错觉,因为对于直线来说,正向和逆向会通向相反的两端。然而,在圆形中,方向是反的,但每个方向都会包括相同的物体,也会回到相同的起点。结果就出现了这样一种现象,就像在2A亚阶段阻碍儿童从圆形顺序转换成线性顺序那样,在对比两个方向相反的圆形序列时会再次出现这种困难。在做这种对比时,儿童需要首先把它们"分离"成一对对的或是微小的序列,然后再把它们按照逆向顺序重新排列起来。但是即使是一个圆,两个相反的方向也会回到同一个点。在对比两个逆向圆形时,这一点会使儿童很困惑,因此儿童不能保持一个固定的顺序。相反地,他从一对物体开始,一会儿按照这个方向,一会儿按照另一个方向,没有意识到*AB*或*CB*的差异,结果就是不可能进行对比,只能得到一个可辨别的单一顺序的序列。

当给儿童一个正向顺序的模型时,不难发现是什么妨碍了他们再现逆向的顺序。他们自己没有意识到,就回到了更容易的正向顺序,就像当他们看到两个方向相反的圆形顺序时会感到困惑一样。但是从这些实验中,我们可以发现,正是运动协调的不充分导致了这些问题,这和建立射影坐标系(左-右关系,整体视角)和在欧氏空间中建立参照系(水平、垂直、倾斜这三个维度)时是一样的。在这一点上,在顺序发展中遇到的困难也揭示了更普遍的运动和智慧复杂性,镜像书写就是一个尤为著名的例子[①]。

从这一点上,我们可以推断出,技巧运动在直觉思维的发展和空间的心理表征中很重要。它会让人追忆起顺序的最初建构(从1A亚阶段到1B亚阶段,再到2A亚阶段),

① 在这一点上,参见I. Meyerson和P. Quercy的文章,"L'orientation des signes graphiques chez l'enfant," *Journal de Psychol.* (1920), p. 462。

也包括眼睛运动的协调。没有这样的知觉活动(自发的感觉和运动)顺序就不能被建立起来。这也需要手眼运动的协调(用手指依次触摸每个物体),因此知觉活动通过这些操作得到强化。通过这种方式,知觉获得的邻近性需要和分析过程中的分离相对应,它们接下来的对应关系也通过一个固定方向的顺序得到保证,并通过运动活动来获得。

然而,在2A亚阶段,这个过程不足以维持圆形顺序和线性顺序的对应性,因为这里面包含两种不同的感知模式。这个问题在2B亚阶段得以解决,儿童通过一种动作把已经存在的概念联系或连贯起来,比如把圆形顺序展开,把它画成一条直线。这也是一种运动,一种内化的格式(如洛特),这标志着重建和预期的心理过程的出现,意味着儿童有能力超越直接知觉的局限。

但是,这取决于2B亚阶段的发展程度。当需要辨别三条不同方向的项链时,儿童不能正确地作出判断,因为视觉或触觉协调不充分,就像我们刚才谈到的那样。特别是,当他需要再现线性或圆形的逆向顺序时,儿童还是不能解决这种问题,因为此时的运动还是不可逆的。儿童现在还不能达到类似的逆向动作或是通常意义上的可逆性,随着他们的运动程度的逐渐增长和知觉活动的不断扩展,直到可以提供更多复杂的模仿预期和重现,才能实现这种操作。这也是我们在随后的过渡阶段发现的,关键是儿童的知觉可逆性在不断发展,通过一种反作用或是"反省",自我相同运动(self-same motor,译者注:解释反省)在运算思维中达到顶点。一旦运动活动受到运算的控制,它便可以在两个方向上运动。

第五节　第二阶段:顺序的直觉表征和从2B亚阶段向第三阶段过渡的例子以及通过尝试和错误建构逆向顺序

儿童在到达第三阶段之前,一直不能立刻完整地解决逆向顺序的问题。在2B亚阶段到第三阶段之间,儿童只能通过尝试错误的方式来进行直观的修正和调整。其他问题的性质也是类似的,就像以正向顺序排成"8"的形状(与圆形同胚,但是出现了半-交织),仍然得不到解决,至少没有形成一个普遍的规则。

以下是一些过渡阶段的例子,第一个例子中的儿童还处于2B亚阶段。

马尔(4;10,超前发展)　能成功地处理简单的线性序列,刚开始处理的是在某些物体之间有间距的序列,接下来处理的是所有物体之间的间距都很大的序列。她甚至可以毫无困难地把它转换成圆形顺序。随后,在纠正一两处逆向顺序的问题之后,她可以成功地再现圆形顺序,不只是再现一个由七个物体组成的线性序列。但是当把圆形顺序转变成线性序列时,在一端仍有一对物体的顺序被颠倒了

(*GF*)。这也是唯一的例子,在这里,把圆形顺序转换成线性顺序比建立逆向顺序更困难。

迪帕(5;1,超前发展) 在第一条绳上把衣服挂起来。“现在这位女士想把衣服从另一端开始挂。你看这儿(在模型中的*A*的下面),她想挂上绿色的裙子(*G*)。接下来是什么呢?——(他放了*F*,然后是*CDFG*。)——再试一次。——(他的表现也没有更好,给出的顺序是*GFCDEAB*)”

但是他在项链实验中的表现更好。他一开始看到三条相似的项链,其中一条项链的珠子的顺序颠倒了。“它们是一样的吗?——*是的*(指出了正向顺序的项链的正确的邻近关系)。——那一条呢?——……——银色珠子的下一个是什么?——*蓝色的*。——在这儿呢?——*它不是在同一边*。”在迪帕正确地把项链摆成线性顺序后,“现在你要做一件同样的事情,只不过要调转一个方向。——(他用一个手指依次拿起每个物体,成功达到了要求。)”

要求他把一个由九个珠子组成的形状为“8”的物体转换成线性顺序。他按照轮廓进行转换,忽视了交叉。“现在我们想把它再次变成圆形,就像你刚才看到的那样。它会和你摆出来的是一样的吗?——*会的*。——(他被要求来进行对比,他为部分的反向感到震惊)现在我们想把它再次变成‘8’的形状。你要怎么做呢?——*我会和你的一样*(他失败了)。”

西尔(5;4) 在第一次尝试中就正确地再现了一条项链珠子的顺序。当他面对三条项链,其中有一条是逆向顺序时,马上就注意到了顺序的差别。他用一只手指指着,同时把反向的项链和另一条并排放着。“你能在这根直针上把这条项链再摆一次吗?——(他没犯任何错误就成功做到了,只是没有意识到顺序反了。)——现在就像这样,从另一个方向摆呢?——(他没有意识到自己依然是按照正向顺序摆的,但是接下来他自发地把所有的物体都翻转过来,获得了逆向顺序。)”当需要把六件衣服的顺序颠倒过来时,他先给出的是*FECDB*,接着改成了*FCDEB*,最后是*FECDBA*。

霍夫(5;6) 需要再现七件衣服的逆向顺序。他给出的是*GFEDBCA*,接下来通过手指依次进行检查,发现了自己的错误*BC*,但是只能通过从头开始来纠正这个错误。

“我们现在想把衣服放进篮子里,从*G*开始。哪一件衣服会在中间?——……——最上面呢?——(*A*)——很好,中间呢?——(他用手指依次指着衣服)袜子(*D*)。——对了。现在如果我们要把这个篮子清空,把衣服都放到另一个篮子中,那么哪一件衣服会在最上面呢?——(*G*)——最底下呢?——(*A*)——中间呢?——(*D*)”这些反向都是正确的。

在有三条项链,其中有一条是反向顺序的实验中,一开始,他认为它们是一样的,接下来通过手指检验发现了反向顺序。接下来他自发地把那条反向的项链旋

转过来，以获得正向顺序。

格洛(5;10) 在再现衣服的逆向顺序的实验中，一开始是正确的，摆出了*GFED*，当遇到中间物体*D*的时候，想按照正向顺序*EF*继续下去，但是随后注意到*FEDEF*，就把它纠正为*DCBA*。在堆放衣物时，格洛预见到如果A在最下面，那么*G*就会在最上面，反之亦然。"如果篮子被清空呢？——(*A*)*会在最下面*，(*G*)*会在最上面*。——为什么？——*因为你把它们颠倒过来啦*！——那么这个(*D*)呢？——*会在中间*。——如果把它颠倒过来呢？——*还在中间*。它总是一样的。"

乍(6;4) 可以正确地把珠子项链转换成线性序列，可以不是很困难地再现简单线性序列的逆向顺序。然而，他不能在改变起点的位置(端)时，再现圆形顺序，而这通常在2B亚阶段就被儿童掌握了。再现顺序之后，衣服被排列成了圆形，与它们的知觉模型相对应。他被要求重新开始，把*A*放在圆形中低的那端(离他更近)，而非高的那端。乍正确地排出了*ABCD*，但是不能继续下去了。他经历了要根据模型的图案来重新摆放的一系列尝试错误之后又排成了*ABEDCFG*。

芬(6;4) 在衣服的实验中，可以正确地再现出它们的正向顺序，但是他给出的逆向顺序是*AGFEDEG*，在中间的物体*D*上很犹豫，随后纠正了它，完成了整个序列。他看出了那条反向的项链与另外两条项链的区别："*这条的顺序颠倒了*。"当他看到排成形状为"8"的项链的时候，忽视了交叉。当它再次被排列成圆形时，他注意到了他的复制品和模型的差别，随后也想把他的复制品变成和模型中的"8"一样的形状。"*这儿，这是正确的。噢，不，这是不正确的*(指向了某个部分)。"但是他在下一次尝试中仍然没有成功。

科什(6;5) 在一个棒上给出的项链的逆向顺序是*GFEDCB*，接下来他把*A*放在了*G*前面。"是这样的吗？——*噢，不*(把它放在了*B*后面，没有意识到——当项链闭合的时候，这和刚才的情况是一样的)。——你怎么判断这是否正确呢？——(他立刻颠倒了他的棒，这样就正确了。)"

在形状"8"的实验中，他忽视了交叉，但是当模型被再次排列成圆形之后，他纠正了这一错误。

从中可以看出，这些儿童已经达到了第二阶段，同时也处于第三阶段运算的边缘，儿童在再现模型的逆向顺序时仍有很多困难，经过多次尝试或是直观调整之后才能成功。一个有趣的事实是，有时候再现圆形的逆向顺序比线性顺序更加简单(如迪帕)，不论前面他在再现圆形顺序时遇到了多大的困难。这不是一个普遍的现象，比如乍，在改变端点位置(序列中第一个物体的位置)的时候，还不能再现圆形顺序。但是当这种情况出现的时候，对它的解释仍然是运动活动。两个相反方向的圆形序列比线性序列更加相像，前者倾向于越来越接近，后者却逐渐远离。因此可以理解的是，一旦它们可以被辨别出来，圆形比直线会更容易引起不同方向的变换。

西尔的表现方式比较特别，至少在一个方面，因为他能无意识地把正向顺序转换成逆向顺序。当要求他再现逆向顺序时，他做的恰恰相反，只是把他完成的正向序列翻转了一下，来得到逆向顺序，以一种几乎属于运算阶段的方式。这里，我们可以见证一种自发地、逐步地、零碎地从两个方向的运动向真正的逆向概念的转变。还需要说明的是，与他们在2B亚阶段的反应对比就可以发现(见迪帕、西尔和霍夫)，现阶段的儿童基本上都能辨别出项链的正向或是逆向顺序。

至于逆向顺序，此阶段的儿童只能在大量的尝试和错误后，或者在一系列问题的提示之后，才能成功。儿童还不能说出逆向的操作，不像在随后的阶段，可以立刻给出解决方案，并且它也是运算系统的一部分。关于这一点，在看到儿童尝试去再现逆向顺序时很有趣。他们把模型中的最后一个物体变成了复制品中的第一个物体，来回反复，用手逆向地依次触摸每个物体。尽管有主动运动的引导，儿童还会遇到很多困难，即使他们很明白自己在做什么[①]。尤其是，中间的物体，即正向顺序和逆向顺序的交会点，偶尔会引起无意识的顺序的变换，儿童需要克服大量困难才能解决这个问题。在其他时候，一对正向顺序的物体会突然变成逆向顺序……

在另一方面，儿童总是能得到正确地堆放衣物的顺序。儿童不仅意识到最上面的衣服会被放到最下面，反之亦然，这取决于衣服是从线的哪一端开始拿的，而且还发现了中间的物体是不变的，它总是在两个端点[②]的“中间”。

第六节　第三阶段：运算对应性与结论

6岁或7岁的儿童可能会形成关于正向或逆向顺序稳定的理性概念。他们最终会把序列中物体的顺序视作整体的一部分，结果就是可以容易地再现正向顺序和逆向顺序。在前一个阶段，我们就已经发现有一个儿童旋转了这个棒，他在再现正向顺序的过程中，或多或少地也会为建构逆向顺序感到苦恼。但是这样一个例子，只是一种宽泛的直觉概念，忽视了细节错误。

从现在开始，每种运动都和其他的相联系，这种整体的反转也从仅仅是心理动作变成真正的运算思维。以下是一些达到此逆向顺序水平的儿童的例子，他们在遇到圆形顺序如半交织(形状“8”)时仍然会出现一些困难，之后才能形成正确的解决方案。

里斯(6;6)　在晾衣绳上排列了衣服。“你能在这儿把这些反着再做一遍吗，从这个(*G*)开始？——(他马上就做好了)*这是一样的，它们是一样的*。——为什么？——*我没有以相同的方式开始，但是就像这样*(手指向两个方向运动)，*就像我们*

① 儿童所采用的表达方式已经清楚地表明了这个问题的一般性。“正好相反”表明它不具备早期水平。

② 参见《儿童的运动和速度概念》，第一章。

在休息时间玩的游戏一样。——如果你把它再反向呢(反向的反向)? ——*它会像这样*(他指的是正向顺序)[①]。"

在堆放衣服的实验中,里斯能正确地预测出两个方向中的最上面、最下面和中间的衣服。

他也能把圆形项链的珠子正确地转变成线性顺序。"为什么黄色的珠子(在最后)不是这个(第一个)的下一个呢? ——*如果这是一个圆形的话,可能是这样的,但是现在它不是。*"他注意到其中一条项链的顺序是反的,马上就把它反转过来,以表明它和其他项链的顺序是一样的。他毫无困难地可以在直线上再现逆向顺序,但是当把他的复制品反转成正向顺序,并摆成"8"的形状时,他在一开始的时候被交织所误导。"*噢,不! 错了!*(他把它解开,然后进行对比,又再一次把它变成了"8"的形状)*不,它终究是一样的。*"经过了短暂的犹豫之后,他最终理解了。

伦茨(6;6) 很快就能再现出线性和圆形顺序的逆向顺序,但是对于形状"8",他一开始建立了两个分离的圆形顺序,后来通过操作理解了半-交织的关系。

皮斯(6;10) 在再现逆向顺序时的反应是一样的。他根据轮廓再现"8"的形状,随后就大声喊道:"*不,我犯了一个错误,因为它交叉了,而我却是直着向前进行的!*"

这里也有一些儿童可以像再现逆向的线性顺序和圆形顺序那样,立刻就能成功地再现"8"的形状。

莱佩(6;10) 可以毫无困难地再现珠子项链、排成一条直线的衣服以及堆成一堆的衣服的逆向顺序。他在再现形状为"8"的项链的时候,能够按照正确的顺序,也能考虑到交叉"*因为它穿过了上面*"。

格拉(7;5) 在看到三条项链,其中有一条是反向顺序时:"*珠子是一样的,但是它们串起来的方式不一样。在那儿,先是白色的,再是粉色的。在这儿,我需要向后看才有粉色的。*——如果你按照这个方式(我们指的是顺序)再现它呢? ——*会和那个一样。*"

他在一条直线上再现形状为"8"的珠子项链,考虑到了交叉,接下来把它们合起来形成了一个圆形,最后自发地把它扭在一起形成了"8"的形状。

这就是6岁或7岁的儿童的表现(虽然我们也遇到过一个更小一点的女孩,还不到5岁,也能在第一次尝试中成功地再现出项链的顺序和排成一条直线的衣服的逆向顺序,用一只手指指着也能再现出"8"的形状)。他们的表现和前一阶段的表现有一方面很不

---

① 为了体现正向顺序转换成逆向顺序的多样性,将这个例子与处于2B亚阶段和第三阶段中间的一个新例子进行对比。拔(5;10)正确地建立了逆向顺序。"再重做一遍,从那一头开始。——(他也这样做了)*噢,这是一回事!*"因此拔发现了它们是一样的,只是在把它做出来后,事实上他也感到很惊讶,然而里斯就提前知道了这一点。

一样。虽然这两个水平的儿童都能再现逆向顺序,但是现阶段的儿童能马上解决这个问题,而前一阶段的儿童只能通过尝试和错误之后才能成功。在前一阶段,知觉思维不能完全地控制运动,儿童只能在经历了一些错误之后,进行一些预测。然而,现阶段的儿童可以在概念水平实现简单的反转,也会对运动产生影响和指引作用。

我们从这项研究中得到的主要结论是关于顺序的感知和表征之间的主要差别,也会在这一点上结束。后一点指的是顺序的再现,或是以心理图形的形式,或是以实物再现的形式。顺序感知不仅包括对邻近、邻近元素的分离,还有对这些元素之间恒定的运动方向[①]的感知。想象过程或是序列的再现过程除了对应的顺序概念基于的心理格式(mental image)不同以及在再现过程中对应的元素不同,以一种非常相似的方式发生,可以比作成模仿或绘画(就像我们在第二章看到的那样)。这解释了为何要以重现物体之间的对应关系以及重组物体的目的去分析模型。为了达到这个目的,只有知觉相似是不够的。然而,要把物体分离,这不仅会影响从模型到复制品的心理迁移,也会影响领先于它的初步分析(既然它能同时影响一个物体或者一对物体)。

现在邻近关系已经被打破,下一个问题就是把它们重组起来。就像我们已经看到的,方向在这个重组过程中至关重要,因为物体需要在顺序不变的情况下被颠倒过来。这个过程需要被控制,以便恢复和再现已经被打破的邻近关系。这就产生了一个问题,即怎样来保持一个不变的方向。

我们已经给出了这个问题的答案。从第一阶段的后期,一直到第三阶段,也包括第三阶段,正是快速发展的动作或是运动以及运动形式来完成了这项任务,以此来确保我们可以进一步地详细阐述这些观点,以及这些运算本身。在2A亚阶段,是借助眼睛或者手指估计模型的长度的动作,完成了对这些分离的元素依次进行心理转换,直到再现简单的线性顺序的任务。在2B亚阶段,是改变知觉顺序(比如圆形顺序)以及把它转变成线性顺序的动作。在2B阶段到第三阶段的过渡期,是逆向操作的动作。最后,在第三阶段,预期和重建已经充分地联系起来,这些动作也以一种快速的协调的方式组合起来,以及逆向操作,都转变成了一种运算。

因此,顺序概念不只是一种直接从物体中抽象出的结果,也包括了初步的拓扑关系,如邻近、分离等,这些可以通过触觉感知和绘画来研究。在循序渐进的转换(对物体的心理转换)以及替换中,动作更加协调,顺序也可以从中抽象出来。这是通过有顺序的动作重建物体的结果,不只是一个直接抽象出来的产物。通过这些动作的变化来得到物体的基本顺序,实质上这也是顺序的几何概念基础。

① 在元素被明显的间隔隔开的不连续情况下,方向感尤其需要保持稳定以免颠倒顺序。因此邻近关系要和间隔一起考虑。

第四章 “绳结”的研究以及“围绕”的关系[1]

使用*ABC*三个元素来表示顺序关系时，也包括“两者之间”这一关系。因此，我们可以说*B*在*A*和*C*之间，或*C*和*A*之间。在第三章中，我们知道了这种关系（这一关系的不变性对于还没有学会逆转系列的儿童来说仍然无法理解）是如何与顺序概念本身同时发展的。[2]“两者之间”这种关系只是更一般的“围绕”关系中的一个特定例子。当然，这些围绕关系都是基本的空间关系，包括邻近、分离或顺序等。事实上，在空间构建方面这些关系更为重要，因为儿童最有可能直接通过它们来区分和建构三个最初的拓扑维度。

如果把一个点在其他两点之间定义为一维围绕（即一条线），把一个点在一个封闭的图形之内或之外（参见第二章第二部分的图2中的模型1—3，儿童在1B亚阶段可以正确画出）定义为二维围绕（即一个面），那么一个点在一个封闭的盒子之内或之外都可定义为一种三维围绕（即一个空间）。

因此，我们接下来的任务就是使用在分析“顺序”关系时所采用的方法来考察这些围绕（或交织）关系，即“围绕”这一动作的心理模拟；也就是说，在一个元素后跟随或集合另一个元素。为了实现这一目的，研究者可能需要将“围绕”这一概念和行为与由坚硬的固体如盒子等所表现出来的容器的容纳性一并使用。由于固体具有符合欧几里得几何特征的确定形状，因此在第一章和第二章中出现的问题会在这一章中再次遇到。也就是说，在初级的表征关系和发展水平更高级的知觉关系之间存在一种交互作用。

此外，特定类型的行为，例如用一个圈环围绕一根木棍，在感知运动阶段已经有所发展[3]，因而使得这些任务对于4岁或5岁的孩子来说显得太容易。

巧的是，在“围绕”中有一个知觉关系还并未发展的领域，因而非常适于研究表征的主要特征。该领域就是“绳结”，它的额外优势是具有非常精细复杂的几何分析。在我们的记忆中，那些几何学、拓扑或拓扑学最基础的分支并不解决有关直线、距离、角等诸如此类的问题，而只是处理那些灵活的、能够变形的形式，尽管没有中断或是重叠。作为几何学的一个分支，拓扑的基础通过“同胚”或者点对点，双连续对应（对应在直线和相对顺序中保留不变的邻近、分离）操作形成。在这种关系中，拓扑学家所研究的对应

---

① 与Mlle. G. Ascoli，Mme. J. Halperin-Goetschel and M. A. Morf合作。

② 有关这一主题，首先参考《儿童的运动和速度概念》，第一章。

③ 这一过程中也会存在困难。起初儿童只是把绳子放在棍子上，似乎只要把绳子与棍子接触就能把棍子围起来。参见*The Origins of Intelligence in the Child*，p.320.（obs.174），1953。

类型之一恰好是绳结理论。[①]从心理发展的角度来看,“绳结”是儿童在早期阶段所习得的行为。因此,它非常适合心理进化的研究。“绳结”并不起源于知觉测量关系,也不会形成视觉或感知运动的完形,因而“绳结”的变化只会被个体逐步理解,这一事实也使得“绳结”这种研究方法具有更高的价值。

因此,在这一章中,我们建议研究儿童对最简单类型的绳结——反手结(一种普通而简单的单结)的反应[②],特别注意“围绕”的概念(包围或交织关系)以及可以用一条普通绳子形成的简单形状之间的同态对应性或非对应性。例如,一个圈环,一个8字形状的绳结,一个假结,左右反手结以及根据情境形成的或紧或松的绳结。

第一节 方法和一般结果

研究中所使用的方法极其简单。1(A).首先给儿童呈现一个拉紧的普通而又简单的绳结[如图11(1)],问他这是什么,确保儿童理解“绳结”这个词的含义。之后要求他也制作一个相同的绳结。1(B).如果儿童不能完成绳结,就让他使用自己学过的知识围绕一个粗棍子或绕线筒来完成。如果儿童在几次尝试之后都不能成功,就让他观看一个绳结慢慢形成的过程,之后要求他来模仿自己所见的动作。如果他还是失败,就给他展示一条两种颜色的绳子(一半蓝色,一半红色),随着动作的逐渐展开,研究者用一种讲故事的方式来解释打结的过程(“红色穿到下面去,然后再穿上来,之后再穿到里面来”,等),之后要求儿童来完成同样的动作。

2.一旦儿童能够形成绳结,研究者便给他呈现一个形式相同但更松弛一些的绳结,这样绳结就扩大了[如图11(2)],并向儿童提问它是否与第一个绳结相同(“这个绳结和先前的那个是用同样的方式制作的吗?”等)。接下来我们需要确定儿童是否知道如果用力拉动松弛绳结的两端将会发生什么。

3.将这个绳结继续扩大,直到两个“翅膀”或者半圈变得清晰可见,这个形状常用来代替几何课本中的“三叶草”形状[如图11(3)]。再次问儿童相同的问题。[③]换言之,到目前为止,我们主要试图去探究儿童是否理解了形状(1)(2)(3)之间具有的知觉连续性。

4(A).向儿童呈现一个“三叶草形状的左反手结”[如图11(3)]和一个“三叶草形状的右反手结”[如图11(4)],问儿童这两个绳结是否相同。儿童既可以通过眼睛来判断,也可以通过手指从绳子的一端划到另一端来判断。如果在绳子上穿一个珠子,然后

① 绳结是一种没有多个点的封闭曲线,也就是说中间没有断开。参见L. Godeaux, *Les Géometries*, Paris, p.188。

② 参见“英文译者注”。

③ 该问题与问题2相同。——译者注

问儿童珠子的运动轨迹是怎样的，或者假设绳子是管道，里面有一只蚂蚁从一端爬到另一端，那么会使问题变得更为简单。如果儿童仍然不能理解这两个绳结之间的区别，就让他把珠子从绳子的一端推到另一端，或者去复制一下绳结。4(B).尽管儿童在绘画中并不能表现出绳子的某一部分是在另一部分的下面还是上面，但让他们来画出这些绳结以及先前的每一个绳结都是很有用的。

5.使用相同的方法，让儿童来比较一个真“反手结”和一个假“反手结”（当把绳子的两端连起来时，假反手结与圈环同态[如图11(5)和(6)]。

6.用同样的方式，向儿童展示为了方便起见我们是如何界定真假8字形绳结的。假8字形绳结只是一个简单的“反手结”，它的两端被连接起来，摆放成了这种形状，这样绳结把两个看上去相同的圈环分开了[如图11(7)]。当然，真的8字形与圈环是同态的。

7.给儿童展示两对绳子做的圈环，第一对只是叠加在一起，第二对把两个圈环交织在一起[如图11(8)]，然后问儿童如果把两个圈环往不同的方向拉，那么这两个圈环相对的一侧将会发生什么（显然，第一对会分离，而第二对仍然会连在一起）。

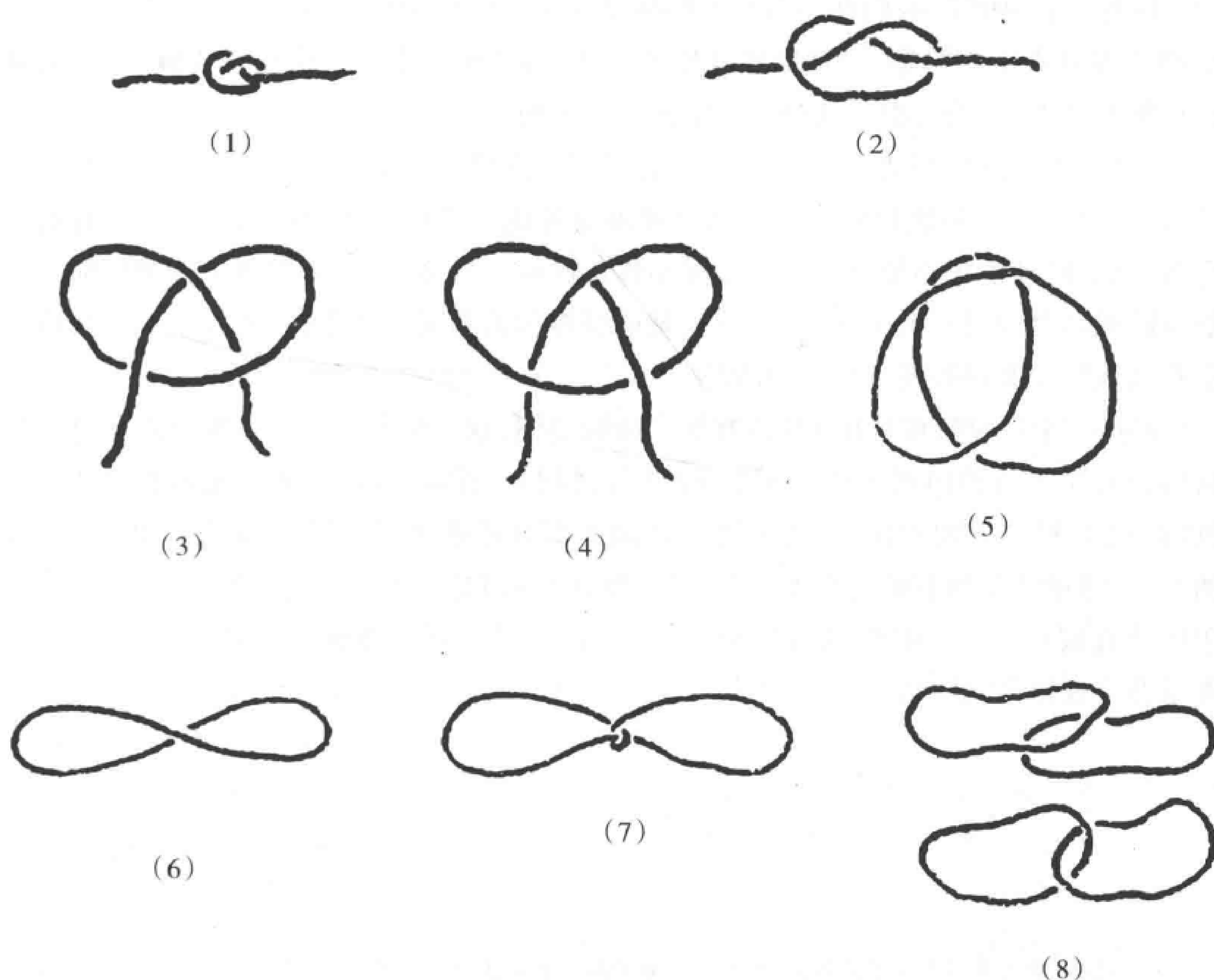


图11　各种绳结

儿童对这些问题的反应可以被分为与前面章节相同的三个阶段。第一阶段(4岁以下),儿童能够学习简单的绳结。在我们所选择的被试群体中,儿童平均4岁左右学会打结。然而,研究年龄较小的儿童如何复制呈现在他们面前的绳结样例显然是一件有趣的事情,因为在这一方面,绳结和第二章的绘画或者第三章的顺序序列是可以进行比较的。研究发现,在1A亚阶段,尽管儿童已经可以观察一个可视的模型或是聆听一段口头的解释,但他们仍然不能复制绳结,因为还不能理解交织的原理。因此,他们或者把绳子的一端围着另一端缠绕,但却没有设法把任意一端插入圈环中,或者把绳子的一端插入一个半圈中而没有加以重叠。这两种情况都不存在必要的"围绕",因而也不能形成绳结。

在1B亚阶段,儿童学会了如何去复制绳结,但他们不能用一根手指追随[1]一个松弛绳结的不同部分,而且也不能区分真假绳结。在第二阶段,儿童可以复制简单的紧结(1),因为他们现在已经能够理解交织,并且可以在圈环没有叠加的情况下区分出完整的圈环和半个圈环。[2]但在2A亚阶段,儿童不能理解两个相似的绳结——一个系得很紧的绳结和另一个左侧松弛并扩大的绳结(2)或是放置成三叶草形状的绳结(3)所具有的对应性。此外,儿童还不能立刻将真假绳结区分开来。

因此,这一阶段,我们在一对拉紧的绳结或是一对松弛的绳结之间可以发现一种简单的心理对应性。但是,一旦情境发生了改变,即把绳结中的一个拉紧或放松,这种对应性就会消失,尽管每组中的两个绳结都是同态的。

在随后的阶段(2B亚阶段)中,儿童意识到在拉紧的绳结(1)和松弛的绳结(2)之间具有同态性,但却不能识别这两种绳结和被放置成三叶草形状的绳结之间所具有的对应性。此外,他们也不能立即对真假绳结作出区分。然而,当儿童发现了拉紧的绳结和松弛的绳结之间具有的对应性时,他们就能够连续追随绳子的路径,而在前一亚阶段他们只能从一个圈环跳跃到另一个圈环。

经过一个过渡阶段(2B亚阶段和第三阶段之间,这一阶段的正确答案只能通过试误后得出),第三阶段出现了(7岁至7岁6个月之间)。在这一阶段,儿童能够普遍认识绳结(1)(2)(3)之间的对应性,这些绳结之间变得可逆进而可运算。接下来必然会出现的是,儿童能够将所有的这些绳结(无论是紧还是松)与那些假的反手结正确区分,类似于区分真假8字形。此外,儿童能够区分左右反手结,并且理解当把绳结拉紧时,它们并不会变成相同的绳结。

---

① "追随"指儿童沿着绳子的轨迹,把手指从绳子的一端移动到另一端。——译者注

② 我们把半个圈环界定为:绳子的一端并未扭到另一端上面时所形成的圈环。

第二节 第一阶段：学会打结

第一阶段持续到平均年龄4岁左右，但也包括一部分年龄在4—5岁的儿童。这些儿童均不能理解绳结是如何形成的。在1A亚阶段，儿童在看到眼前绳结是如何形成的之后，仍然不能打结。下面呈现部分例子。

科尔(3;10) “你会打结吗(在他面前有一条绳子)？——我会。”(他只是把绳子的两端放在了一起)研究者不提供进一步的解释来帮助他改进现状，而只是在他的观看下完成了一个左侧松弛的绳结。“那是什么呢？现在让这颗珠子穿过绳子。——(他让珠子穿过圈环。)——现在沿着绳子移动珠子。——(他将珠子一直沿着绳子移动。)”尽管获得了这样的启示，但他仍然不能复制绳结，只能把绳子的两端放在一起。

梅尔(3;11) 当他把绳子的两端放在一起时并没有停下来，而是继续说：“*你可以像这样把绳子的一端放入绳孔中*。”随即让绳子的一端穿过由绳子弯曲的部分所形成的半个圈环，之后拉动绳子的两端。梅尔惊讶地发现“绳结”消失了，绳子是没有系起来的状态。然后，研究者向他展示了绳子“必须要交叉”。但尽管做了演示，他仍然不能自己来重复这一动作。

加布(2;3) 尽管他的年龄比前两个儿童小，但似乎他的表现更好，他做出了明显的努力来复制圈环，他的面部表情表明他意识到了重复出现的错误，当他碰巧成功时，表现出了明显的满意。起初，他把绳子绕过研究者的胳膊并把绳子的两端放在一起(一端放在另一端的上面)，之后继续形成一个真正的8字形。按照这种过程，他连续几次把绳子绕过自己的胳膊，但都没能把两端连起来。最后，他在桌子上进行了一次模仿圈环的尝试，他把绳子的一端放在另一端上面并用力拉。遭遇挫折后，他意外地获得了一次成功，但他却不能重复这种偶然发现的操作。之后，给加布呈现一个更松弛的绳结，尽管研究者用手指追随了绳结的完整轮廓，但他却不能完成同样的动作，他会在绳结处从一个部分跳到另一个部分而没有意识到绳子的连续性。他也不能对两个绕在一起的圈环和两个上下叠放的圈环作出区分，尽管他进行了几次尝试。

亚奇(3;10) 在研究者向他展示了如何打结之后，他用绳子做了真正的实验并表现出极大的耐心。他起初做了一个圈环，即把绳子的一端放在另一端上面，然后用力拉。之后，他再次进行了尝试。这一次，他把绳子的一端绕过另一端，使它们扭在一起，然后再用力拉……尽管获得了一次偶然的成功，但他却不能成功地解决问题。之后，研究者向他同时呈现两组圈环，一组为交织在一起的两个圈环，另

一对为部分重叠的两个相互独立的圈环。尽管尝试了几次,但他仍然不能通过观察来对这两对圈环做出区分。因此,他也不能在追随一个部分松开的绳结时考虑到绳子的连续性。

安布(4;6) 和梅尔不同,安布并没有尝试把绳子的一端穿过一个明显的圈环,而是进行了几次把绳子绕着圈环缠绕的尝试。因此,圈环变得非常粗,但他并没有把绳子的一端从圈环中间穿过。研究者向他展示了如何完成这一动作,但他依旧没有成功。研究者把一根橡皮管放在他面前(橡皮管比绳子的灵活性要稍微差一些)。"*看这条蛇。它把自己的头放在尾巴上*(做出一种手势),*然后把头滑到尾巴下*(做出另一种手势),*这样就形成了一个绳结*(轻微拉紧)。*下面由你来完成同样的动作*(安布做了一个圈环,但不能继续往下进行)。"

哈恩(5;3) 尽管她的年龄稍微大一些,但她的情况几乎和前面几个儿童一样。她把绳子的一部分放在另一部分上面形成一个圈环(她对绳子的两端都进行了尝试),之后作出了正确评价,"*你做了一个圈环,然后把绳子的一端滑进圈环里。*"但这却是哈恩所不能完成的,她只是把绳子进行了几次缠绕,每次都会形成一个新的圈环,但从来都没有"*把绳子的一端滑进圈环里*"。

这为数不多的反应尽管非常平常,但在研究儿童所使用的基本拓扑观念时却极为重要。首先,显然儿童能够把绳子的两端放在一起(科尔)或者把一端放在另一端上面(哈恩),甚至把一端围着另一端缠绕扭成一个封闭的形状(亚奇)。有关触知觉和绘画的研究已经表明,开放和封闭的关系在相当早的阶段就会出现,因此我们对儿童在1A亚阶段能够立刻形成一个圈环的行为并不感到惊讶。其次,我们发现梅尔试图把绳子的一端滑进圈环里,哈恩描述了这一行为。这是另一种在早期阶段能够理解的关系,因为能够画出一个封闭曲线的儿童也可以在封闭曲线的里面、外面甚至跨过曲线的边界来画一个小圆圈,如第二章所述。

这样,这些儿童熟悉了"围绕"这一概念(在里面或在外面),且封闭与此概念密切相关。因此,问题便是:这些儿童不能完成绳结的原因究竟是缺少什么呢?

如果仅从现象学角度考虑他们的行为的话,答案就很清楚。他们不能形成圈环并把绳子的一端从圈环中滑过(尽管哈恩有非常清晰的行为计划),尽管科尔在没有尝试这一动作的情况下便对自己完成的圈环很满意。梅尔进行了尝试,但却不能闭合圈环,所以绳子仍然没有打结。安布通过多次缠绕绳子弄出了许多圈环,但却没有把绳子的一端穿过线圈。哈恩有系统地进行着,她形成了一个圈环,然后像梅尔一样试着把绳子的一端从绳孔中"滑过去",但每次尝试她都只是增加了一个圈环而已,这和安布的动作一样,但她却没能超越安布的成就水平。

从几何学角度来看,这种失败的行为活动意味着什么呢?很简单,一条绳子可以被视为一种线性序列,它由连贯的部分或是一维的"围绕"组成(例如,如果B在A和C之

间，那么事实上B只是在一维上被A和C围绕）。但用这条绳子系成的绳结是一种三维的“围绕”，这是一种复杂的交织关系。尽管在这一年龄阶段，儿童对三维已经有了一种清晰的概念，但当这种从单一“围绕”到三维“围绕”的过渡通过同一物体实现时，就会给儿童带来明显的困难。加布和亚奇的表现能够证实这种观点。他们在用手指追随松弛绳结的过程中，当遇到节点（绳结的一部分穿过另一部分）时，就不能沿着连续的路线进行。同样，他们也不能在视觉上区分交织在一起的圈环和叠放在一起的圈环。

当然必须考虑到，在处理表征的空间（与知觉的空间形成对比，尽管在心理活动初始阶段的知觉水平上也包括相同的过程）时，2—4岁的儿童除了使用这些同一拓扑的“围绕”外，还不能使用其他方式来建构维度。因为他没有任何参考系或是坐标，即使是横纵坐标（参见第十三章和第十四章）或任何的投射坐标（参见第六章至第十章）。因此，第一个维度由一种简单的线性序列所提供，表现为儿童可以立即掌握直线的中点在直线两端“之间”这一事实（也就是说，在一个维度上用直线两端来“围绕”）。

诚然，第三章中的实验表明“在两者之间”这种关系只有在相对较晚的年龄阶段才会变得真正可运算（至少，在行程的两个方向上具有关系不变性的例子中是如此），并且儿童在理解圆形顺序时会更加困难。然而，通过直接的线性顺序，儿童显然能够马上理解“在两者之间”（单一维度上的“围绕”）这种关系。

儿童开始建构第二个维度，他们没有使用欧几里得平面或是射影平面，而是使用了简单的拓扑平面，例如在一个封闭曲线“之内”就是一种二维的“围绕”。在第二章中曾经提到，儿童能够精确画出位于封闭曲线里面、外面以及跨越边界的圆圈，这就是二维“围绕”的例证。在B位于A和C“两者之间”的这种线性序列下，连接B和点D的那部分（与AC无关）并没有切割这种序列。但是把封闭曲线内的某个点和它边界外的某个点连接起来的那部分一定会切割边界，这个部分本身就是一条直线。因此这种围绕的关系是二维的。

最后，第三个维度的产生源于这样一种概念：把某物置于一个盒子当中，想要了解这个物体，就有必要打开盒子或是穿过盒子的侧面。因此，这个维度的特点是，内部的一个点和外部的一个点是不能连接的，除非通过一条切割表面的直线。

这样，这三种“围绕”中的每一种都会在儿童发展过程中非常早的阶段形成概念，也正是这些关系引起了三种空间维度的建构，它超越了拓扑结构，取而代之的是一种投射结构和欧几里得结构。

所以，并非像这样的三维构成了儿童尝试完成绳结的阻碍，真正的阻碍是在同一个物体中实现从一种维度到另一种维度的过渡。即问题是从解开的绳子（一种简单的线性序列，只有一种一维的“围绕”）转变成圈环形式的绳子（圈环及其内部构成了一种二维的“围绕”），再从圈环形式的绳子最终变为把绳子的一端穿过圈环内部的形式（圈环以及穿过圈环内部平面的绳子的一端构成了一种三维的“围绕”）。我们能够理解那些阻碍儿童做出完成绳结尝试的包含这些维度的“围绕”。对于同一个物体，通过逐渐复

杂的围绕,实现从单维系统到三维系统的转变是很有必要的。简言之,转变的难点在于不能把与每种维度相关的概念联系起来,这些概念取决于"围绕"的概念。概念的连接或接合从2B亚阶段开始出现,因为在这一发展水平上,儿童通过真正的实验课开始学习如何打结。

弗拉(2;11) 尽管还小,但他连续几次成功完成了一个简单的绳结。他通过这种方式学会了打结,在观看他姐姐(3;11)学着如何打结的同时,他把绳子的两端互相缠绕。当发现这样做还是能解开绳子后,他把绳子绕过研究者的胳膊然后又绕过了桌腿,把绳子相对的两端交叉并把它们扭在一起。之后,研究者向弗拉演示如何完成一个简单的绳结,但并不予以口头的解释。他准确地对这一动作进行了复制——从两端交叉的圈环开始,再把绳子的一端放入圈环当中。他在没有任何帮助的情况下又继续连续地完成了几个绳结。然而,在一段简短的时间间隔后,他却不能重复先前的"壮举"。

巴尔(3;6) 我们观察到他在没有他人帮助的情况下,通过自己的努力发现了如何完成一个绳结。为了自娱自乐,他把绳子绕过一个成人的胳膊系起来,试图"用绳子拴住"他。为此,他进行了10次尝试,起初只是把绳子绕着成人的胳膊缠绕。他惊讶地发现,这样做并没有效果,绳子一拉就会松开。之后,在一次幸运的尝试中,他正确地完成了绳结,尽管他并没有意识到自己是如何做到的。他尝试着去重复这个动作,但一直都没有成功,直到他恰巧碰到了答案:"*绳子的一端必须放入圈环中。*"此后,他通过把绳子的两端交叉并把一端穿过圈环,连续几次完成了绳结。尽管如此,他却不能把这一发现应用到像系鞋带这样的其他情境当中。

内尔(3;11) 她是弗拉的姐姐。在研究者向她呈现了一个如何制作绳结的样例后,她把绳子的两端放在一起,但却没有把其中一端交叉到另一端上面,只是把绳子的一端穿过由此而形成的半个圈环。当她看到用力拉绳子的时候,绳子松开了,她说"*你必须绕过圈环*",并接着进行了几次成功的尝试。但是,内尔不能通过观察来对一个未交叉的圈环和一个真正的绳结进行区分。

森(4;1) 在观看了一个样例后,起初,他说"*你必须完成一个绳孔*",并做了一个和内尔类似的开放的圈环,然后他把绳子的一端穿过这个圈环。他再次进行了尝试,这一次,他把绳子的两端交叉,并完成了两个真正的绳结,但他不能靠观察来预测自己接下来的尝试是否会成功。随后,他把绳子绕着一根木棒缠绕了几次并说:"*这样做没用,绳子没有进到圈环的里面。*"此后,他成功了。

迪(4;1) 就像处于1A亚阶段的儿童一样,他一开始把绳子绕着研究者的胳膊缠绕。但在向他演示过之后(对他来说动作太快了,以至于他无法看清绳结是如何完成的),他成功地把绳子的一端滑过圈环。此外,他在7次尝试中,有5次能够通过观察把交织在一起的圈环和叠放在一起的圈环区分开来。另一方面,他不能

用手指追随一个部分松开的绳结的轮廓，即使研究者要求他来想象一只蚂蚁从橡皮管的一端爬行到另一端也没有用。

因此，可以认为，这一水平的儿童通过一系列近似的方法，能够把绳子上相对的两端放在一起，相互交叉，然后把其中一端放入已形成的圈环中。换言之，他们最终实现了从一种最初的线性序列到一种二维的，继而三维的围绕的过渡。然而，他们虽然发现了如何打结的方法，却不能把这种方法广泛地加以应用。此外，尽管儿童通过自己的这些行为（即在观念运动层面）成功实现了这种转变，但这种转变却并没有带来一种精确的视知觉。诚然，迪在通过观察区分交织在一起的圈环和叠放在一起的圈环时，能够在7次尝试中成功完成5次。但他仍旧不能用手指在一个松弛绳结交叉的节点处上下追随，即使他想象有一只蚂蚁在里面爬行（他甚至想通过宣称蚂蚁到达节点时就“死了”来使自己摆脱这种困境，因为不知道应该让蚂蚁走哪条路）。

此外，研究发现，在经过几次尝试后成功完成了绳结的儿童不能只通过观察来区分呈现给他们的绳结和开放的圈环。与动作相比，这种在想象方面不变的滞后现象在第二阶段中将会再次出现，它将有助于阐明直觉形象和运动活动之间的真正关系，这是下一步运算的来源。

第三节　第二阶段：可以实际复制的绳结间的部分直觉对应性

从这一阶段开始，儿童可以在没有任何研究者帮忙的情况下复制一个自己看到的绳结。但在最初的2A亚阶段，绳结只要稍微拉紧一些或是放松一些，儿童就不能识别。此外，儿童常常不能对真假绳结进行区分。

罗特（4;6）　可以在没有任何样例的情况下完成一个绳结。“你是怎样做的？——*我把它*[①]*穿过那个孔，然后绳结就做好了。*”给他呈现一个反手结，这个绳结非常松弛，它的各个部分都可以被清楚地看到。“*不，这不是一个绳结。*——用力拉一下。——*哦，它是绳结。*——这个呢（一个没有绳结的半圈）？——*不，这个也不是绳结。*——用你的手指追随这条绳子。我们假设这是一根管道，一只蚂蚁在里面沿管道从一端向另一端爬行。它只有在到达另一端时才能从管道中出来。那么它会怎么走呢（在接近绳结交叉处时，他出现了错误，从绳子的一个部分滑到了另一个部分）——把这个珠子沿着绳子滑动又会怎样呢？（珠子已经移动了几厘米，他需要依靠自己来继续完成剩余的动作）？——（他再次失败了。）——这个（一个

① 指绳子的一端。——译者注

拉紧的绳结)是一个绳结吗——*是的,绳子的这一端在上面,那一端在下面*。”

瓦加(5;4)　给他呈现一个拉紧的绳结,要求他把这个绳结画下来。他画了一条直线来代表绳子,一个实心的圈环来代表绳结。然后他正确地复制了这个绳结(他先前并没有见过这个绳结是如何制作的)。——“这(一个松弛的绳结)是什么?——*一个圈环*。——把它画下来。——(他画了一条尾端弯曲的直线,且直线的中间部分有一个半圈)——你可以把这个复制一下吗?”——他复制了这个绳结,但他坚持认为这个图形和第一个绳结是不一样的,尽管他也不能对不同之处作出解释。

德加(5;6)　正确复制了拉紧的绳结,然后把它画成了这种形状:一个圈环上有两条呈直角分布的直线。“这个(一个松弛的绳结)呢?——*这也是一个绳结*。——你可以复制一下吗?——(他做得非常成功。)——你用同样的方法完成了这两个绳结吗?——*不是的,这个和先前那个不同*——为什么……呢?再做一次来观察一下。——(他仍然认为这个和之前的那个绳结不同。)——这个(放置成三叶草形状的开放的圈环)呢?——*这是一个绳结*。——你可以复制一下吗?——(他把绳子放在桌上,在形成一个圈环后,把绳子的两端反向折回,但并没有把它们绕过中心区域。)——这样做对吗?——*好像不完全对*。——缺少了什么呢?——(他指了指样例左右两边的“翅膀”。)——再试一次。——(他还是没有成功,他看不出这个形状与先前绳结的对应性。)”要求德加来画一个反手结,他画了一个带有内接角的椭圆(这个内接角的顶点在曲线上而两边则延展出了曲线)。

德加没能区分出左右反手结,同样他也不能沿着连续的路线追随绳子。

博尔(5;6)　他立即复制了拉紧的绳结,并用一种奇怪的方式把这个绳结画了下来。一个圈环通过一条直线来实现两端的交叉,圈环里有一个半圈,它位于直线切割圈环的一点。“你的图画和实际的绳结一样吗?——*绳结并没有系上,我不知道为什么*。——这个(一个松弛的绳结)和先前那个绳结一样吗?——*不一样*(他画了一个角,在角的其中一边上画了一个半圈)。——这个(一个放置成三叶草形状的开放的圈环)呢?——*这是一个绳结,但却和先前那个不一样*。——再把这个图案画出来。”他把这个圈环放在纸上,试图一举把它画出来,但失败了。同样,他也不能用一条绳子来复制这个形状。他在用手指追随绳结的轨迹时并没有成功。

让(5;7)　在他面前有两对圈环,一对是交织在一起的圈环,一对仅是叠放在一起的圈环,第二对和第一对看上去相同,但它并没有把两个圈环连起来。“假如我们用力拉这个(第二对)?——*它会分开*。——那另一个呢?——*它不会分开*。”在他完成了一个绳结之后,研究者给他呈现了一个松弛的绳结。在最初的两次尝试中,他并不能用手指来追随绳子(尽管研究者会向他提供一些帮助性的建议),他的第三次尝试成功了,并且把绳结画作一个没有绳子从下面穿过的普通半圈。研究者向他展示用一条绳子形成圈环的过程,即把绳子两端反向折回但并没有打结。

“*它是单线程的，因为它和绳结不一样。*——如果我们用力拉动这个（松弛的绳结）会怎样？——*它会变成一个绳结；不，它不会。*——这个（另一个更松弛的绳结）呢？——*它不会变成一个绳结。*——如果我们用力拉动它们两个呢？——*它们不会变成绳结。*”

沙尔（5;8） 他复制了那个拉紧的绳结。“这个（松弛的绳结）是什么呢？——*这是一个手链。*——它们一样吗？——*不一样。*——你可以复制这个吗？——（两次失败的尝试后，他成功了。）——你制作这个的方法和另一个一样吗？——*不一样，用了另一种方法。*——这（三叶草形状的绳结）是什么？——*是眼镜。*——它和其他两个一样吗？——*不一样。*——如果我们用力拉它呢？——*也不一样。*”在绳结上穿一个珠子，要求沙尔来指出珠子在通过绳结时的路线。他没有保持路线的连续性。他画了一个没有绳结的普通半圈。

吕德（5;11） 和让一样，她解决了有关两个交织在一起的圆环和两个叠放在一起的圆环的问题，但在追随珠子沿着一个松弛绳结运动路线的时候，尽管进行了几次尝试，但都没能成功。

卢策（6;1） 他看着一个拉紧的绳结说“*这是一个平结*”，并对这个绳结进行了复制。然后他把这个绳结画成了一条直线穿过一个圈环。“这个（松弛的绳结）是什么？——*这也是一个平结*（他正确地复制了这个绳结）。——它和另一个绳结一样吗？——*不一样。*——为什么？——（他用手指了指绳子交叉的节点。）——再完成一个第一种绳结。——（他又做了一次。）——它和另一个绳结一样吗？——*不一样。*——你在编制的时候用的不是同一种方法吗？——*不是。*——那这个（三叶草形状）呢？——*这是一个“鸢尾花”结*（这是卢策理解的一种儿童术语）。——你能复制一下吗？——（他用不同的方式来制作并获得了成功，但他把这个绳结拉得和先前的绳结一样紧。）——*我做的这个和那个*（三叶草形状的绳结样例）*不一样。*——再试一次。——*这个地方的绳子在上面，这个地方的绳子在下面；很难完成。*（这样他毫不怀疑地认为，这个绳结和他先前见到的绳结是完全一样的！）”他不能用手指来追随绳结的轨迹。

弗拉（6;2） 他复制了拉紧的和松弛的绳结。“*它*[①]*和之前的*[②]*不同*（再次复制了一遍松弛的绳结）。——但你制作的方法相同吗？——*不，我在做这个的时候和原来的方法不同。*——这个（三叶草形状）呢？——*我不知道这是什么。*——这是一个绳结吗？——*是的，但没有拉紧。*——和前面的绳结[③]一样吗？——*不一样*（他再次去尝试完成这个绳结，他把绳子放在桌上，把绳子的两端向后折回到半圈里，但并没有把它们绕着中间部分缠绕）。——是这样吗？——*是的。*——看（我们用

① 指拉紧的绳结。——译者注

② 指拉紧的绳结。——译者注

③ 指松弛的绳结。——译者注

力一拉绳子),绳子解开了。”弗拉再次进行了尝试,但依旧没有成功,并坚信这个绳结和先前呈现的绳结是一样的。他不能用手指来追随绳结的轨迹。

这就是在2A亚阶段见到的主要反应类型。儿童在这一阶段的反应与第一阶段相比,具有明显的相似和区别。与前一阶段的儿童相比,这一阶段的儿童能够在没有样例的情况下完成一个绳结,也就是说,他们在完成之前并没有看到过相应的演示。但他们对于自己实际上已经完成的动作不能进行想象。与先前的情况相比,他们已经能够通过观察发现没有围绕的半圈和一个真正的绳结之间的区别(参阅有关让的描述),以及交织的圈环和叠放的圈环之间的不同(让和吕德)。但当他们面对三种性质相同但形状不同的绳结时,即拉紧的绳结(1)、圈环扩大的松弛的绳结(2)以及有非常大的翅膀的绳结(3)(为了清晰起见,我们把它叫作三叶草形状,当然,所有的这些绳子从几何意义上来讲都是反手结),这一阶段的儿童看不出这三种绳结所具有的对应性。另一方面,我们发现处于下一阶段(2B亚阶段)的儿童能够理解(1)和(2)之间的相似性,却不能理解(1)和(3)或者(2)和(3)之间的相似性。

出现这种困难的原因是显而易见的。首先,我们来想一下在任何年龄阶段,绳结都是一种在心理上难以应对的麻烦事物,因为它们无法引发强烈的视觉图像或者产生测量知觉。因此,在尝试想象拉紧的绳结或松弛的绳结所发生的变化时总会存在困难。然而,对于处于2A亚阶段水平的儿童来说,他们所面临的困难远非如此。正是儿童的这些失败反应引起了我们的特别关注,因为在2B亚阶段出现的具有过渡性质的反应之后,这些完全否定的回答就会被取代,大概在7岁或8岁左右,他们真正理解了那些意味着第三阶段到来的问题。

在2A亚阶段中,儿童存在的最典型的问题具有以下两个共同点。首先,尽管儿童可以复制拉紧的绳结(1)以及稍微松弛的绳结(2)(所有的孩子最终都成功了,但他们在完成的过程中有时候会犹豫),但是他们不能识别这两种绳结的对应性。其次,这可能也是第一个问题的一部分,即儿童不能认识到绳子的连续性并追随绳子的轨迹。即使面对部分松弛的三叶草形状绳结(3),当到达交叉部分的时候,他们离开了从下面穿过去的那部分绳子,而继续直接从上面的部分经过,并没有考虑到真正的连续顺序。

这两种反应显然源自同一原因,即,尽管这些儿童能够在动作层面上完成三维的围绕(经过克服第一阶段出现的困难),但却不能在表征层面上完成,甚至也不能在半动作、半表征层面(包括用手指追踪一个已形成的、可视的绳结的轨迹这种行为)上完成。

首先我们来看儿童拒绝承认拉紧的绳结和松弛的绳结(1)(2)(3)之间具有对应性,他们的这种行为很容易理解。儿童认为放置在桌子上或者系在一块纸板上的绳结是一种二维的形状,他们没有把对应性的概念加以扩展来包括真正的三维围绕。此外(这种类型的行为与第一种行为相伴),他用一种完全静态的方式来看待拉紧的绳结和松弛的

绳结,并没有考虑到一种绳结会变为另一种绳结,实现这种变化仅需要拉动绳子,使它变紧或是变松。显然,如果他没有把对应性应用到三维围绕中,一定是因为尽管他能够在动作上(通过复制绳结)完成这种三维的围绕,但当他把这些围绕看作普通的二维围绕时,既不能对这种围绕加以想象,也不能加以区分。由此引发了另一种错误,即不能想象绳结是通过拉紧或放松得到的形状,认为绳结只能是当前知觉到的结构。就后面这一点来说,这些儿童所采纳的态度与同龄儿童在面临数字序列中一对一的对应性问题时所表现出来的态度具有可比性。[1]这一点需要加以强调,因为近期的几何理论中越来越多的研究表明,数字概念和空间概念间所存在的相似性远比目前发现的更多。

因此,我们发现,大概在5岁或6岁左右,儿童可以在一定量的物体以及与之相分离的但数量相等的物体间直观地建立对应性,但这种对应性的建立只有在这些物体被放置成相同的视觉形状时才会出现,例如两行直线,只有当它们相对时才会被儿童认为具有对应性。只改变其中一行连续项目之间的间隔就会使儿童认为不具有相等关系,因为从知觉的角度来说,对应性已不复存在。因此,只要知觉模式发生变化,对应性就会消失。同样,在这个实验中,当拉紧的或松弛的绳结与视觉上相同的样例进行比较时,儿童可以将它们识别。但当用于和样例相比较的绳结变得更紧或更松时,儿童便不认为它们是相同的;换言之,只要用于比较的绳结或样例绳结当中有一个在外观上发生了变化,儿童就会认为它们不一样。所以,尽管儿童可以复制形状(1)和(2),但他们却并不认为这两个形状具有对应性,这仅仅是因为它们看上去不同。至于三叶草形状的绳结,我们发现有些儿童非常确信它与先前的绳结不同,以至于他们不能去复制这种绳结(尤其可以参考卢策和弗拉的例子)。现在的这个绳结实验和整数实验的唯一不同之处在于:在后者中,整个序列的数值取决于一种不连续的对应性,而在绳结问题上,我们关注的是一种双连续的对应性,这种对应性既影响顺序序列又影响连续连接在一起的各部分的围绕。此外,注意这些相互分离却又同源的操作间所具有的类似之处是件非常有趣的事情。

说到存在于围绕中的不对应性,它是这些儿童试图用一根手指追随松弛绳结的轨迹过程中重复遇到的困难的直接结果。在这种情况下,如果不能知觉到相同的绳结围绕所具有的对应性,那是因为儿童不能从知觉上加以识别。尽管可以完成这些绳结,但他们却不能对这些绳结进行想象。

由此引出了"同胚"这一核心问题。在研究儿童实际上是如何形成绳结的过程(第二部分)中,我们发现当他试图通过同一线性物体来实现从一维围绕(绳子的一部分穿过由其他两部分所形成的圈环)向多维围绕的转变时,困难就会出现。但是,当这种矛盾情境(在这种情境中,绳结放置在桌上,稍微松弛一些)出现时,这个问题就能够得到

---

① 参见 *The Child's Conception of Number*, Chapter III and IV, 1952.

解决。儿童学会了制作绳结,却不能识别这个绳结,也不能从三维角度(上下、左右、前后)对围绕进行区分。当他们用手指努力追踪绳结时,并没有追踪不同部分的连续序列(例如,单维的围绕)。换言之,他们忽视了根据相对邻近性获得的连接绳结各个部分的"在两者之间"的关系。我们发现,在绳子的一部分向下穿过另一部分的地方,儿童不能追随真正的连续序列(即真正相邻的部分),他们跳到了绳结的另一部分,而这一部分事实上并未与第一部分相连。因此,尽管儿童可以复制绳结,但他们不仅没有注意到三维的围绕而使用一种二维的围绕来代替(这个观点来自儿童的绘画,在他们的绘画中,绳结只是由一个圈环及横穿其中的一条直线组成),而且也忽略了连续的顺序。儿童用表面上的邻近代替了真正的邻近,因此,他们并没有把绳结上相连的两部分之间的特定区域(沿着单维的围绕)视为邻近区域,而是认为两个部分的距离近便意味着相邻,由此绳结的连续性遭到了破坏。

我们不难发现儿童在知觉和想象方面所表现出的这种不足的原因。这完全是因为儿童不能对拉紧或放松绳结的结果作出预期,这种短暂的、静止的知觉邻近性容易胜过真正的、永久的邻近性(后者并不会受到这些动作的影响)。同样,由于不能预期围绕之间的对应性,因而他们也不能复制或画出这些围绕。反过来,心理图像的缺乏使得儿童不能用手指追随交织在一起的绳子的轨迹。

从根本上来说,这是因为儿童潜在的概念还太具知觉性,它们并没有获得足够的灵活性。更确切地讲,就想象重建中概念的联系而言,儿童的概念依然是一种静态的结构,他们不能理解动态的转变,往往集中于某一特定形状而不能转移。

儿童在2B亚阶段表现出了些许进步,他们能够在绳结(1)和(2)之间建立对应性,虽然这种对应性在绳结(2)和(3)之间还不能建立。下面呈现一些处于2A亚阶段和2B亚阶段之间的儿童表现的实例。

克努布(5;10) 他画了一个拉紧的绳结——一组波浪线穿过一个圆环。"这个绳结和你画的一样吗?——*一样的*。——(向他展示一个更加松弛的绳结)这个和先前那个绳结一样吗?——*不一样*。——试着去复制它。——(他进行了几次尝试,然后完成了绳结)——看,我把这个绳结拉紧一些。现在它和先前那个绳结一样吗?——*不一样……哦,一样的!*——这个(三叶草形状)呢?——*不一样*。——你可以用手指来追随这个绳结吗?——(他正确完成了追随,并且没有中断。)"

尤伊奇(5;10) 他先复制了一个拉紧的绳结,然后又复制了一个松弛的绳结。"这个(松弛的)绳结和另一个[①]一样吗?——*并不完全一样,但是如果我用力拉它,就能得到和另一个相同的绳结*。——那个(三叶草形状)绳结呢?——*它是一个心形*(他尝试着去复制这个绳结,但都没有成功,他形成了圈环,但又把圈环拉开

① 指拉紧的绳结。——译者注

了)。"他可以用手指准确地追随这个(三叶草形状)绳结,但却看不出它与先前的那两个绳结具有对应性。他不能区分左右反手结,也不能辨别真假8字形。

莫茨(6;3) 他复制了拉紧的绳结。"这个(扩大的绳结)是什么呢?——*这是一个没有闭合的绳结*(即没有拉紧)。*想要使绳结闭合,你需要用力拉绳子*。——那这个(三叶草形状)呢?——*它是一个花形*。——它和另一个绳结相同吗?——*不相同*。——你可以把这个绳结复制一下吗?——(他把两个半圈彼此连在一起,但没有把绳子的两端缠绕起来)——你看(研究者帮助他成功地完成了绳结)。——这个和先前那个绳结相同吗?——*不相同*。"但他能够用手指正确地追随绳结。"这个(一个看上去很像真绳结的假绳结)呢?你可以用力拉它来让它变成一个绳结吗?——*可以*。"

雷(6;6) 他对拉紧的绳结和松弛的绳结都进行了复制。"它们一样吗?——*不完全一样,但是如果我用力拉松弛的绳结,它们就会一样了*。——这个(三叶草形状)呢?——*这是一个用不同方式交叉获得的圈环*。——你来把它复制一下。——(立即成功地完成。)——你制作这个图形的方法和制作其他两个绳结的方法一样吗?——*不一样*。"他用手指成功地追随这个绳结,但他却不能对真假绳结作出辨别,他认为拉动缠绕在半圈里的绳子就可以得到一个绳结。

莫尔(6;8) 他复制了拉紧的绳结,看着那个松弛的绳结说:"*它不一样,因为它是开口的,没有被拉紧*。"但尽管如此,他认为"*这个绳结和第一个绳结是一样的*"。"这个(三叶草形状)呢?——*它是一个心形,和前面的两个绳结不一样*。——把它复制一下。——*有点难*(他把绳子放在桌上,扭转了几次,做出了一个非常复杂但却和圈环相似的形状)。*我必须拉动这里,但它本来不应该交叉*。——你来看!(研究者拉动样例模型,由此产生了一个拉紧的绳结)现在,用力拉你做的这个绳结。——[他的"绳结"散开了,所以他再次进行了尝试,但依旧没能成功。偶然的机会,他忽然想到了松弛的绳结(2)]*哦,看啊!它和前面的那个绳结是一样的!*——它像这个(三叶草形状)吗?——不,不像。"他不能辨别左右反手结以及真假绳结。

达恩(6;9) 他立刻对扩大的绳结作出"评价":"*它和那个*(拉紧的)*绳结是一样的,因为如果我用力拉它,它就会和前面的绳结一样*。——这个(三叶草形状)呢?——*不,它和先前的绳结不一样。很相近,但不完全一样*。——不同之处在哪儿?——……——你可以把它复制一下吗?——(他扭转绳子但没能成功,他不理解这个绳结和原先那个绳结是相同的。)——这个(看上去很像三叶草形状的一个假结)呢?——*它和这个*(三叶草形状绳结)*是一样的*。"他用手指追随真假三叶草绳结,但却不能理解它们之间的不同之处。

斯图(7;0) 他完成了一个拉紧的绳结并把它扩大。"它和先前的那个绳结[①]一样吗? ——*当你用力拉它的时候就会变成一样的*。——这个(三叶草形状)呢? ——*不,它们不一样,这个有两个圈环*。——用你的手指追随它。——(他正确地完成了。)——把它复制一下。——(他做了一个假的绳结,与圈环相似。)"

我们对这些反应进行粗略的检查便能够立即看出,在拉紧的绳结(1)和松弛的绳结(2)之间所形成的对应性源于运动预期。克努布在看到研究者的动作使绳结(1)变得越来越紧后,便立即预料到持续这种改变将会产生的结果。由此,他看到了绳结(2)和(1)之间存在的对应性。其他处于这一阶段的儿童也表现出相似的行为。例如,尤伊奇说"*如果我拉动绳子,就会得到一个和先前一样的绳结*"。莫尔、达恩、斯图说"*如果我拉动绳子,它就会变得和先前的绳结一样*"……这是因为,他们用一种运动活动而非知觉的方式来想象绳结(因此,他们能够想象真正的转变而不是仅仅停留在静态模式),这样就能够追随"三叶草形状的绳结"(3),不再考虑表面的邻近性而是在意真正的邻近性和围绕。这些邻近部分(在绳结连续的部分之间,通过手指追随绳子加以区分)以及交织部分都是"连接的"概念的产物。这些概念超出了知觉模式,包括想象的预期及重构(即想象中描绘的潜在动作)。

但是,尽管就保持概念的变化流来说,这种类型的概念是"相互连接的",但它仍然同表象相联系,因而只限于简单的、有限的变化。这种概念并不能被概括并加以运用来对简单绳结所呈现的所有多样形式间所具有的对应性进行判断。能够把知觉模式(2)和模式(1)联系起来,但却不能理解它们和"三叶草形状"(3)之间的类似性,认为形状(3)与先前的形状并不相同。这是因为这些"连接的"概念还不够机动和灵活。因此,只要假绳结在外观上超出了简单半圈(在第一阶段时,儿童就能够偶尔对这一形状与真绳结作出区分)的范围,儿童就会把它与真绳结完全混淆,同样,也不能对真假8字形状作出区分。

总结起来,在第二阶段,儿童的心理加工过程依然具有直觉性。也就是说,他们只能作出部分正确的对应性判断,尽管这一阶段属于从知觉概念(2A亚阶段)向连接概念(2B亚阶段)过渡的时期。在接下来的阶段中,这些连接概念通过思维的可逆形式获得了一种动态的平衡。

---

① 指拉紧的绳结。——译者注

第四节　第三阶段：简单绳结间的运算对应性和区分“三叶草形状”的左右反手结

相互连接的概念的应用在2B亚阶段仍然有限，这种概念在7岁左右开始被普遍运用。这一年龄阶段，儿童在拉紧的绳结(1)、松弛的绳结(2)和扩大的“三叶草”绳结(3)之间建立对应性时毫无困难。他们也可以区分真假反手结。因此，他们用一种活动的、可逆的方式理解了围绕的对应性，并以此来预测各种情况及各个朝向下拉紧或放松绳结的结果。

有些儿童尽管可以完成所有的这些活动，但还不能立刻对左右反手结进行区分(尽管他们在经历了一些尝试和失误后可以完成)，而这一阶段有两个儿童表现得最为优秀，他们能够立即完成。下面这些儿童活动的例子属于第一种情况。第一个例子中的儿童使用了一种处于2B亚阶段和第三阶段之间的具有过渡性质的行为方式。

达尔(6;10)　他看到扩大的绳结后立刻说：“*这是一个稍微松一些的绳结。*——这个(三叶草形状)呢？——*我不知道。*——它和先前的绳结一样吗？——*不完全一样。*——为什么？——*我不知道。*——你看(研究者把这个绳结拉得稍微紧了一些)。——*哦，绳结。*——什么是绳结？——*绳结就是把这两根绳子(绳子的两端)交叉。这一端在上面，然后再向下返回来。同样的一根绳子，它有两端……这一端与另一端交叉然后再把它拉上来(穿过那个绳孔)。*”

贝尔(6;10)　关于绳结(1)和绳结(2)，他说：“*一个小，一个大，但大的那个没有拉紧。*——那如果我们把它拉紧呢？——*它仍然和先前那个绳结一样。*——这个(三叶草形状)呢？——*它是一个心形。*——它和先前的绳结一样吗？——*一样，你必须把它这样拉动(他把绳子的两端往回拉)，然后你就得到了这样一个绳结。*”之后，他展示了第二个绳结可以通过放松第一个绳结来获得，把第二个绳结放松便可以得到第三个绳结。“这两个绳结(左反手结和右反手结)一样吗？——*一样的。*——你可以用手指追随它们吗？——(他用连续的方式追随绳结。)——现在看来，它们是否相同呢？——*相同，但它们又不完全相同。这个绳结的这部分在上面，而那个绳结的这部分在下面，在这一点上它们是相反的。*——你刚才没有注意到这个不同吗？——*我没有好好观察。*——把它们复制一下。——*好的*(他立刻准确地完成了这两个绳结)。——这两个(真假三叶草形状)绳结相同吗？——*不同。*——为什么？——*那个绳结的各个部分都在下面*(因此它不是一个绳结)，*而这个绳结的这部分在上面，那部分在下面。*——如果我们拉动绳结会发生什么呢？——*这个绳结仍然是一个绳结，而那个绳结将不复存在。*——你确定吗？——

(他犹豫了一下,然后做了一个假绳结)是的,如果你拉动这个绳结,就什么都没有了。——那这两个(真假8字形)绳结呢?——这个是一个绳结,那个不是。"

德瓦(7;5)　他立刻看出了(1)(2)(3)之间存在的相似性。"这个绳结和其他两个有区别吗?——没有(他做了一个绳结)。我这样来拉动绳结的圈环(变成了扩大的翅膀)。"关于三叶草形状的左右反手结:"它们是一样的。——仔细看一下。——哦,对,这一部分在这个绳结的上面,而在那个绳结的下面。——这两个(真假绳结)呢?——这个绳结的两端都在下面,而那个绳结有一端在上面,一端在下面。——如果你用力拉绳子呢?——那个会变成一个更紧的圈环,一个绳结,而这个不会变成一个绳结,它只是扭转了几下。"然后德瓦不仅画出了三种类型的三叶草形状的绳结,而且还准确地画出了其他图形。

下面是三个关于儿童在经过最初观察后,区分三叶草形状的左右反手结的例子。

丰特(6;0,发展超前)　关于绳结(2)和(3),他认为:"如果我用力拉它,它就会变成先前的那个形状。——这个(真假8字形绳结)呢?它们一样吗?——不,那个并不是一个绳结。——那这个(左右反手结)呢?——它们不一样。在这个部分,这个绳结往上走,那个绳结往下走。在这个部分,这个绳结从上面穿过,而那个绳结从下面穿过。——这个(真假绳结)呢?——那不是一个绳结,绳子的两端都在下面。"

安德(7;2)　"那个绳结没有系紧,如果用力拉它,它会变小或者变得和绳结(1)一样。——如果把第一个绳结放松呢?——我们会得到绳结(2)。——这个[三叶草形状绳结(3)]呢?——这也是一个圈环绳结(轻微地拉动了一下绳结来证明)。——这两个绳结(三叶草形状的左右反手结)一样吗?——不,这一部分在这个绳结的上面,在那个绳结的下面。——如果你用力拉它呢?——会是两个绳结。——它们一样吗?——不一样,因为它们绳子的路径相反。——如果用力拉这两个(真假绳结)呢?——那个绳结将不复存在,因为绳子的两端都在下面。——这个(真正的绳结)呢?——这是一个真正的绳结,因为绳子的两端有一端在上面,另一端在下面。——如何制作一个绳结?——拿一根绳子,把绳子的两端交叉,让一端通过这个绳孔(他做了一个交织的手势)。——这些(真假8字形绳结)呢?——它是一个真正的绳结,另一个什么都不是,因为它只进行了交叉,而那个真正的绳结穿过了绳孔。"

格尔(7;10)　关于三叶草形状的绳结(3):"它和前面的两个绳结一样,但它还没有拉紧。——(向他呈现三叶草形状的左右反手结。)——它们一样吗?——不一样,在这个部分,一个往上走,一个往下走。——怎样能使它们一样呢?——(格尔没说话,他把一个绳结倒过来,然后把绳子穿上去,再穿下来。)——如果把它们

拉紧，这两个绳结会一样吗？——*不一样，一个在上面，一个在下面*。——那这些（真假8字形绳结）呢？——*那个绳结会解开，这个不会解开，仍然保持原样*。"

这是平衡的最终形式，对应性起初在2B亚阶段短暂地建立，最终形成于第三阶段。显然，这些儿童中（从6岁6个月到7岁6个月，平均年龄为7岁），每个人都能够立刻识别出拥有扩大叶子的"三叶草形状"的绳结与普通拉紧的绳结是一样的，也能够对真假三叶草形状的绳结进行区分（假的绳结本质上与圈环相同）。对于三叶草形状的左右反手结，尽管在要求儿童更仔细地对其观察时，他们可以非常清晰地对其进行辨别并正确加以复制，但是他们中的一些人在第一眼看到绳结时，并不能注意到二者的不同（许多成人也存在同样的问题）。完全处于这一阶段的儿童不仅可以对左右反手结进行区分，同样也能够意识到在用力把绳结拉紧时，依然会产生两个不同的绳结，"*因为它们的绳子路径相反*"（安德）或者"*因为一个仍然在上面，另一个在下面*"（格尔）。

因此，显然儿童现在已经开始把简单的知觉概念作为逻辑思维的基础。通过对拉紧或放松绳结、扩大圈环或把相距很远的部分拉近等结果的预期，儿童把所知觉到的形状保留在脑海中。总之，所知觉的图形位于一种由所有潜在的变化形式所构成的框架之中，包括运动活动或图形的心理表征。

在第二阶段，不连续的概念既静止又不稳定。与此相比，通过发展，这些操作在一种流动但稳定的系统中到达了一种动态平衡的状态。但如何来解释这一发展过程呢？原因便是，随着这一过程的进行，动作已经内化为一种完整的状态，这种状态具有可逆的特征并以此特征所需的特定形式加以保存。

在2A亚阶段，儿童甚至都不能对拉紧绳结（2）来获得绳结（1）的结果进行预期，尽管他们已经在第一阶段学会了自己制作绳结。到了2B亚阶段，儿童已经开始掌握这种预期以及心理重构，尽管他们仍然不能通过把绳结扩大来获得"三叶草形状的"绳结（3），或者对不同类型的绳结作出区分。此外，他们已经学会了用手指来追随绳结的轨迹，这是儿童在2A亚阶段所不能完成的，尽管在该阶段，儿童已经能够复制"围绕"。

简言之，在第二阶段中，源于第一阶段的动作内化为了心理表象，并逐渐连接起来形成"连接的"概念。此后，由于动作完全变成了心理活动状态，一种包括一个正确完成的绳结的三维围绕画面出现了。届时，由绳结收缩或伸张运动的想象所引发的片面的、不完整的概念开始在不同形式间对应性的构建中充分发挥作用。无论这些想象的收缩或伸张如何，从现在起，儿童理解了这些收缩和伸张并没有改变基本的"围绕"操作。无论知觉模式如何变化，在绳结看似发生的改变之下，这种基本的关系仍然保持不变，除非把绳结解开。

这种"围绕"关系的操作不变性形成了特定类型的对应性。这种类型的对应性并不考虑距离或欧几里得几何形状和投射形状（直线、圈环、椭圆、角、平行等），而仅仅保留了基本的拓扑关系，例如邻近、分离、顺序以及围绕。

绳结相连的部分仍然是相连的,分离的部分依旧是分离的,近端和远端的相对距离保持不变,一致的绳结中围绕也没有发生变化。这便是这一阶段的儿童所形成的能够判断两个绳结具有对应性的原理。这种对应性的本质只包括拓扑关系,不包括测量关系或面积(相似性)、类同或投射,它仅仅是一种基于具体的而非形式的或抽象的运算的定性的"异形同态"。

由此便引出了我们在下一章中所要关注的问题。同态对应性具有双连续的特征。同样,对"围绕"的保持——儿童在第三阶段进行比较时所使用的潜在原理——必然意味着被视为界定围绕的曲线是连续且不中断的。

那么,我们必须要回答如下问题:这一水平上的连续性属于哪种类型?儿童如何从简单的、知觉的或直觉的连续性转变成一种能够把邻近、分离、顺序以及围绕的概念整合为一个有组织的整体的概念的或运算的连续性?为了回答这一问题,我们有必要变化一下研究方法,即用想象的直线或曲线来代替真实的绳结和绳子,在7—8岁到11—12岁之间,不仅考察真实的动作,而且也关注从这一阶段开始发展的抽象思维过程。

第五章　“点”的概念与“连续性”的概念[①]

在第三章中，我们知道了：在7岁左右，线性和圆形顺序是如何变得具有可逆性并导致了真正的运算对应性。在第四章中，我们刚刚了解到这种概念[②]是如何使绳结被理解为简单的“同胚”的。现在，我们可以顺理成章地提出这样一个问题：处于7岁或8岁年龄阶段的儿童在不同形状间建立的这种对应性是否不只需要一种原始的、直觉的连续性概念？为了回答这一问题，也为了对这个有关基本拓扑关系的心理的简单调查进行总结，我们打算考察“连续性”这一概念的发展情况，从它首次出现的形式到它在11岁或12岁形式思维出现时的表现形式。

想想数学家们在证明这一概念复杂性时的巧妙，以及那些用逻辑分析揭示虚假外在假设的数学家的名字——维尔斯特拉斯（Weierstrass）、康托尔（Cantor）以及戴德金（Dedekind）。那么，通过研究儿童，尤其是在一项声称研究儿童空间概念的工作中来开始探讨这一问题[③]或多或少有些荒谬。然而，由于我们的部分研究目的是为了说明“连续性”的数学定义远非一种简单的经验事实，它实际上经历了从知觉到具体运算思维的发展，因此把它们运用到这一概念当中似乎与验证我们的理论有关。现在，思维并非从“连续性”的知觉概念直接变为用于阐释这一概念的抽象格式。相反，达到一种能够相互转化的格式类型（这种格式类型可以把线或面降为点，然后再把点重组为线或面）需要一种完整心理结构的发展。

因此，我们很快就会发现，对“点”和“连续性”的概念的验证是一项与先前研究相对应的重要研究，不能把它从初期拓扑概念的研究中略去。邻近与分离的关系事实上只包含非常普遍的概念，这类概念是任何空间运算概念的先决条件，包括拓扑关系本身。相比之下，顺序和围绕的关系产生了真正的运算，例如形成顺序序列的“放置”（逻辑加法）以及建立对应性的运算（由此形成简单的定性的“同胚”）（逻辑乘法）。

然而，这些类型的运算只包括“邻近”的扩展关系，因此就逻辑关系而言，它们只是与顺序序列相类似。我们仍然有必要讨论一下“细分”运算是如何取代最初知觉到的“分离”的，以及对各个分离部分进行的“重组”运算是如何进行的，换言之，有关分离和重组的逻辑运算的相应亚逻辑。

现在，把视为连续的物体降维成一系列连接的点，并在这些点的基础上重建一种运

---

① 与 Mlle.U.Galusser 合作。

② 指运算对应性。——译者注

③ 指“连续性”概念的发展。——译者注

算连续性，这一过程是一种可逆的结合，是分离和重建封闭图形的最高级的运算类型。因此，"连续性"概念的发展必然伴随着顺序和围绕的运算发展，它对拓扑空间质性概念的完整性非常重要。

现在，"连续性"概念的发展并不依赖于我们可以想象到的儿童在学校所学到的程度。事实表明，我们可以逐步发现，"点"与"连续性"概念的发展过程和儿童有关外部世界的概念中用于解决原子及物理物体的概念的发展之间存在一种或多或少的相似性。因此，在观察糖块溶解于一杯水时，儿童从对逐渐变小的但却可见的物体的知觉到形成对看不见的颗粒的观点，最终再到对不可分割的粒子的认识。[1]同样，对于线或图形的观察，儿童经历了这样一个过程：起初他们认为各部分之间是相互分离但依旧可以知觉的，之后它们变成了看不见的部分(比前一部分小但在本质上却是相同的)，最后儿童认为物体已经降维成了无限的、看不见的点。这两种过程的唯一不同之处在于，就儿童的思维方式而言，物理的点或者原子依然拥有面或者体积，而数学的点往往失去了所有的外延(尽管在我们这里所关注的发展阶段中，这只是一种趋势)。

类别的相似性以及前面提到的评论清晰地表明，我们在研究儿童"点"和"连续性"概念的发展时应当采用何种观点。显然，从"细分"运算(这种运算与顺序和对应性的运算类似)观点来看，如同逻辑领域中的运算一般，类运算与非对称关系运算类似。

第一节　方法和一般结果

我们从四个主要的话题入手来提问儿童。

1.儿童如何看待一条线或一个图形细分为无限多的成分呢？为了引出这一主要问题，我们最初提问儿童的问题是一个雷伊(Rey)已经使用过的问题。[2]在雷伊关于智慧的研究中，他希望使用一种运算机制——大小序列，当前研究者结合数字概念的发展考察了这一运算机制。在他的研究中，雷伊认为要把序列和图画中所表现出的有限因素相结合。因而，我们在纸上画一个正方形，然后对儿童说："在正好邻近它的这个位置，画一个所能画出的最小的正方形，这个正方形要足够小以至于没人可以画出更小的(这些指导语可能会被放大，但要避免任何有预示性的手势)。"然后要求儿童画出"这页纸上所能画出的最大的正方形"(另一张纸)。

尽管最初的这些问题并没有和"点"或"连续性"的概念直接联系，但这使得我们能够对儿童最初排列或包含不同大小事物的能力进行估计。关于画出可以看到的或用铅笔完成的最小的正方形这个问题，儿童在头脑中出现的假设(在适当的时候会看到)是

① Le Développement des Quantités chez l'enfant, J. Piaget and B. Inhelder, Geneva. Chapters IV–VI.

② André. Rey."Le problème des quantités limiteschez l'enfant," *Rev. suisse de Psychol.*, Vol.II, pp.238–249.

可以介于最初的正方形和边长为二三毫米的正方形(这是我们在实践中所设置的界限)之间的所有可能的正方形序列。这一过程受到基于序列运算格式预期的影响。在画出最大的正方形时情况也是一样的,如果这个正方形能够围绕最初的那个正方形,那么这时的序列就包括介于这两个正方形之间的围绕。这些基于大小顺序(且类似于顺序运算)的序列或包含运算,事实上与那些把图形或线细分为无穷部分的运算是一样的。这就是我们选用这一问题来开启访谈的原因,儿童对这一问题的回答随年龄的不同而表现出很大的差异。

2.要考察的第二个问题是,细分某个形状(正方形、圆、三角形等)或一条直线,并且观察这一过程能够进行的程度。在这种情况下,儿童可以使用平分的方法。研究者向儿童呈现一条直线,让他们画出一条长度为这条直线一半的直线,然后画出一半的一半长度的直线,以此类推。当他们画到一条不能画得更短的直线时,问他们是否在头脑中也不能继续。"你可以在头脑中完成很多事情,不是吗?如果你的同学在比赛中比你表现得更加优秀,你依然可以在头脑中打败他,即使在现实中你不能这样做,对吗?好的,那么试着去想象一下你并没有停下来,而是将要继续分割这一点点直线。最后将会剩下什么呢?"如果儿童回答说"一条短线",那么研究者就会告诉儿童:"非常好。但继续在你的头脑中分割这条短线,最终会留下什么呢?"

为了帮助儿童理解无限细分的概念,研究者可以让他们把一段橡皮筋切成两段,然后把切下来的半段拉长并再次进行分割。通过这种方式,儿童可以发现,无论剩余的部分有多小,它总是可以被认为能够继续拉长,因而也就可以进行进一步的细分。在考察儿童是否形成了细分次数可以无穷大的概念,以及在鼓励他们始于实践活动的运算方面继续想象通常很有效果。

3.第三个问题与细分最终所产生的物体的形状有关。从根本上说,这个问题需要确认细分的最终形式是否一个点,这个点是否具有形状。因此,如果儿童使用"点"这个词,那么研究者必须问他这个点是否具有形状,如果具有形状,是什么形状(对于年龄较小的儿童来说,正方形最终剩余的点还是正方形,三角形剩余的点还是三角形……)。关于直线,研究者问儿童最终剩余的点是否还有长度或者它根本就没有真正的形状。在这一问题上,我们注意到,儿童通常会说细分的最终结果将是"*一无所有*"。在这种情况下,研究者会问他们"在此之前"将会留下什么,这样就迫使他们再次对点的形状进行思考。

4.第四个问题与使用线或图形的最终成分来对它们进行重组有关。线或面可以被认为是点的集合吗?为了解决这一问题,有必要通过口头提问来让儿童画出一系列的点,然后要求他们在这些点中间插入一些额外的点,或者在两点之间插入尽可能多的点,以此来探究他们是否会认为这些点最后会形成一条线。在实际操作中,我们往往发现尽管儿童不接受线是由一系列点组成的观点,但他们承认多个点会形成一条线。

这四个问题使我们能够区分出三个不同的发展阶段,从第二阶段开始(已经在前面

章节中有所界定)一直到第四阶段的思维可运算性(第一阶段和第二阶段在当前讨论的这一问题上并没有差别)。无论如何,用一种缓慢发展的观点来把持续到11岁或12岁的这三个基本时期加以细分并无意义。

第一个时期(把第一阶段和第二阶段结合起来)持续到7岁或8岁。在第一个问题上,这一时期的儿童既不能画出最小的正方形,也不能画出最大的正方形,这是因为他们缺少一种序列运算格式。当试图去分割线或面时(问题2),他们只能进行数量有限的细分(很多儿童并不能理解"一半的一半"的含义)。对于第三个问题,他们最后呈现了一个大小可知觉的所谓的终极元素,非常令人好奇的是,这些终极元素的形状与最初的形状相同,正方形的最终元素是正方形,线的最终元素是线……最后,(问题4)细分和重组都是不可逆的。儿童并不认为线是点的集合,如果有人贸然把很短的一部分线分割为点,那么这些点注定只能保持不连续的状态了。

第三阶段的儿童年龄从7岁或8岁到11岁或12岁。儿童能够解决第一个问题(最大的和最小的正方形),这是因为他们具有预期格式,这种格式通过对项目序列运算进行分组而形成。由此,儿童在细分的条件下(问题2)更具有灵活性。尽管儿童现在已经做好了承认可以进行大量细分的准备,但他们并不认为细分是无限的。此外(问题3),这些过程[1]从未超过具体运算水平,它们从未超出有限的范畴、可视的或有形的大小。尽管此时儿童不再将最终元素视为和最初整体具有相同的形状(这种情况在第二阶段中出现),但认为这些元素的形状取决于细分的特定模式,并且一直没有把这些最终元素看作脱离平面的无限个点。最后(问题4),在这一阶段,使用整体的组成元素来对整体进行重构被视为与细分相应的可逆过程,但这种认识仅仅是一种直觉的连续性,因此儿童发现自己处于一种困境之中,因为不能调解重新联结的点的不连续本质和由重新联结所形成的结构连续性之间的矛盾。

最后,在第四阶段(11—12岁开始),思维从早期阶段的准知觉概念中解放,早期阶段中,在真实的绘画和问题解决的限制条件下,具体运算受到了禁锢。而在这一阶段,儿童进行项目序列运算时不再具有任何困难(问题1),他们认为细分(问题2)可以是无限的。关于最终元素的结构(问题3),从现在开始,儿童已经可以意识到它完全独立于最初的形状或细分模式。点或"空间原子"不再具有形状或面,最重要的是,无论它们属于线还是其他形状,它们都是同胚的。现在,整体的合成被视为无限细分的可逆产物(问题4),尽管儿童似乎还是会发现在不连续的点和由这些点所组成的连续的整体之间存在矛盾。一些儿童独立认识到线的点序列和被视为无尽的数字序列之间具有术语对应性(尽管在自然情况下,并没有给予儿童无理数概念的暗示来填补这两个术语间的空白)。

---

① 指细分过程。——译者注

第二节 第二阶段:前运算概念

儿童认为,只有能够直接感知到的事物才真正存在,这是最初(接近并包括第二阶段)反应的显著特点,他们认为自己看不到的微小元素是不存在的。尽管如此,在这些限制下,儿童完全缺乏能够促进这些细分和重组过程心理表征运算的机动性。这种运算的机动性能够用一种普遍的方式把它们彼此联系起来。

祖尔(4;6) 问题1,画了三个稍微减小的正方形,第四个比第三个稍微大一些。因此,他既不能对一个非常小的正方形作出预期,也不能通过大小递减的序列得到这样一个正方形。反向进行相同的反应,即画出最大的正方形,他画的第三个正方形比第二个正方形更小。问题2,他同样很害怕对线的平分。关于组成部分(问题3),"如果你把一些点按序依次排列,那么它们会成为一条线(绘画)吗?——*不,不会的*。——为什么?——……"

弗朗(5;6) 起初研究者给他提供了一个边长为4cm的正方形。他首先画了一个大小为这个图形四分之一的正方形,之后又把大小减小了一半,第三个比第二个更小一些,第四个和第二个一样大。关于最大的正方形,他画了一个大小为原图形两倍的长方形,之后把这个图形延长,但只沿着一条轴线上的自由空间延长,并没有成功画出一个围绕整张纸边界的、可以包含目前为止所有绘画的正方形。

在分割一条线时,弗朗不能画出线的一半,也不能在研究者把线均分后,继续画出线的一半的一半。"如果你用剪刀剪它,它会变成什么样子?——*像这样*(他画了更小的但却不规则的部分)。——如果你再分割呢?——(依然把它们画得更小)——再分割呢?——(和前面相同。)——如果你继续分割而不停下来的话,最后将剩下什么?——*一条极短的线*(画了一条2mm的线)。——如果你继续分割呢?——*不能再分割了*。——假设你可以。就像在游戏中一样,当你在玩游戏的时候你可以讲和想任何你喜欢的事情。你可以假装自己是妈妈。现在,我们假设一直把线分割下去,越分越短。最后会是什么情况呢?——*一条极短的线*。——它是什么样子的呢?——*像这样*(指向了2mm的线)。"

克洛(5;6) 关于最小的正方形,他进行了几次减小正方形的尝试,但都没能对结果作出预期。关于最大的正方形,他首先画了一个大小为原图形两倍大的正方形,然后逐渐延长。"你不能再画一个更大的正方形了吗?——*这张纸上没有空间了*。——但如果把其他图形围起来呢?——(他没能理解。)"

关于线:他画了线的一半。"现在画出一半的一半。——(他画了另一条线的一半。)——这个的一半呢?——(画的第三条线还是和原来的一样长。)——再不断

变短吗？——(他试着把线一点一点地变短。)——最后是什么样子呢？——*我不知道*。——把它画下来。——*都很短*。——(他用手指展开比画了2—3mm的长度。)——如果我们把它们进行分割呢？——*仍然会变得更短*。——当它们非常非常短的时候，我们把它们叫作什么呢？——*一个点*。——把这个点画下来。——(他把这个点画成一条2mm的线。)——但是如果我们继续分割呢？——(他再次画了同样的图形。)——它最终是像一条短线还是一个小点？——*像一条短线*。”

之后，要求他对一个正方形进行分割。“你可以把它变得越来越小吗？(在研究者进行的演示中，这个正方形被分成了4个小正方形)——(克洛把这个四分之一的图形再次分成了4份……)——如果像你做的那样继续进行下去的话，最终将剩下什么？——*什么都不剩下*。——非常好。但是在什么都没有剩下的前一刻会是怎样的情况呢？——*一个小正方形*。——如果你再把它分割呢？剩下的将会是一个小正方形、一个点还是一条线？——*依然是一个小正方形*。”用一条线把一个三角形变成更小的、越来越小的三角形。“最后是什么呢？——*一个非常小的教堂尖顶*。——最后呢？——*一个小楔形*(他指了指这个形状的顶端)。”

诺伊(6;1) 可以画出一系列逐渐变小和逐渐变大的正方形，但这种动作是在几次尝试后出现的。关于细分：“分割一下这条线。——(他画了长度为原来一半的线。)——再分割一下。——(他画了长度为原来四分之一的线，然后又画了长度为原来八分之一的线。)——你可以继续分割它吗？——*它太小了，不能再把它变得更小了*。——如果你在头脑中继续进行这一操作，想象你在做游戏时……你发现了什么？——……——(给他画了一系列连续的点。)像这样吗？——*是的*。——如果你把点彼此连在一起，它们能组成一条线吗？——*不，它们不再是点，几乎只能看到一条线*。”

布鲁(6;2) “我想让你在这个点和这个点(两点之间相距5cm)之间放入一些点——(他画了一些等距的点。)——你可以把它们放得更近一些吗？——(他把点的数量翻倍)——如果点彼此接触的话，可以吗？——*不，这样就会变成短线*。”

尤鲍(6;8) 关于点形成线：“你可以在这些点之间放入更多的点吗？——*不，没有更多的空间了*。——但在它们当中的两点之间呢？——*不，这样的话，这些点会接触的*。——之后会怎样呢？——*会看到一条线*。——但是给一条极短的线画一个点是不对的？——*是这样的，因为它是一个点。如果你画一条极短的线，你只能在上面画一个点，而不是几个点*。”因此，点并不是线的极限，线也不是点的集合。

查尔(6;10) 逐渐到达了画出最小正方形的阶段，但在画最大的正方形时，他绕着纸的边缘留下了一个空白空间。“这两点之间可以放入多少个点？——*15个*(他把点插入两点之间)。——为什么离得这么远？——(他又增加了一些点。)——再加一些点怎么样？——*不，已经没有剩余的空间了*。——这里呢？——*这里可以，但是这些点会离得很近*。——然后会怎样？——*它们就不再*

是点了。你已经不能数出它们的数目了。”

“你可以把这个正方形分成一块一块的吗？——(他分了四个正方形。)——可以继续吗？——(他继续着。)——你可以用一种不同的方式来分正方形吗？——*可以，像这样*(沿对角线分)。——如果你继续把正方形分割很长一段时间，最后会剩下什么呢？——*什么都不会剩下。*——在此之前呢？——*一个小方片。*——为什么是正方形？——*因为原来的图形是一个正方形。*——如果把这个圆形分割呢？——(他把圆形进行了分割。)——最后呢？——*什么都没有剩下。*——在什么都没有剩下之前呢？——*是一些小圆片。*——展示给我看一下。——(他画了一些圆形。)”

拉帕(7;0) 关于最小的正方形，拉帕通过逐渐缩减大小，最终画出了一个比样例图形小很多的正方形。关于最大的正方形，一开始他画的正方形几乎都没有比原来的图形大。然后他画了一个可以包含原图形的正方形，之后又画了一个更大的，最后画了一个可以包含第一个正方形的更大一点的图形，但却没有达到可能的最大值。

关于线：“如果你把这条线分割得越来越短，最后会发现什么？——*什么都没有。*——非常好，但是在什么都没有之前呢？——*会有一个。*——一个什么？——……——一个笔画，还是一个点？——*一个笔画。*——如果继续分割，可以把它分得再小一些吗？——*可以*，——如果你继续分割呢？——*什么都没有了。*——在没有之前呢？——*一个小的笔画。*”关于正方形：“最后会是什么呢？——*什么都没有了。*——在此之前呢？——*一个小正方形。*——如果你进一步分割它呢？——*什么都没有了。*——在什么都没有之前，你最后发现的是一个正方形、一个笔画还是一个点？——(沉默很久)*一个小正方形。*”

关于三角形，他做出了同样的反应：“在什么都没有之前是什么？——*一个小三角形。*”

比克(7;3) 逐渐在纸上完成了最小的正方形和最大的正方形。“现在我希望你能画出最短的可能的线。——(2mm。)——你可以把它变得再小一些吗？——*不可以，那样就会变成一个点。*——在这条线(那条2mm的线)里有点吗？——*没有。*——我们一起来试着分割一下这条线(另一条线)。——(他这样做了。)——你可以继续分割很长时间吗？——*不可以。*——为什么不可以？——*因为它将会变成一个非常小的点。*——这不是线被分割后的正确元素吗？——*不，点并不是线！*——如果你要完成一条像这样长的线(1cm)，你需要用多少条短线呢？——(他一边看着线，一边在头脑中计算)*10条。*——这两个点之间有多少个点呢？——*100个*(他画了23个)。——你可以把100个点都画下来吗？——*不可以，点之间的距离会非常近的。*——这样就不对了吗？——*是的，你在画点而不是画线！*”

关于细分正方形："最后会变成什么呢？——*什么都没有了*。——在此之前呢，最后留下的是什么？——*稍微倾斜的小正方形*(因为正方形现在被分割了，比克不能再确定正方形的规则性！)。"

这就是在第二阶段会出现的反应，我们现在必须逐一来考察这些问题。

在纸上画出可能的最大的和最小的正方形，这个问题有很多非常有趣的回答。发展最迟缓的儿童(比如祖尔和弗朗，一般来说处于4—5岁的儿童)不仅几乎不能增大或减小正方形，而且在进行了两三次增大或减小的动作后，他们就失去了方向感，在没有意识到这种变化的情况下开始朝着相反的方向进行。[①]稍微进步一些的儿童能够成功地完成一个递减序列或递增序列，但这一过程非常慢，而且是在连续几次试验后才得以实现(达到边长为2—3mm或覆盖整张纸的正方形需要9—10次尝试)。最后，发展最快的儿童能够更快完成最小的和最大的正方形，但在每种情况下，儿童仍然使用了连续接近的方法而非直接预期最终结果的方法，后一种方法的使用在第三阶段会出现(7—8岁以后)。

尽管这一实验解决的是欧几里得几何图形的问题，处于当前所讨论的拓扑概念范围之外，但它仍然需要一些评价。测量关系实际上根本没有在其中起作用，因为图形的大小仅仅是"直觉的"，因此如果让儿童使用任何类型的、能够被延展或是压缩的封闭图形来替代原有的正方形，那么儿童所需的运算将完全一样，它仅仅涉及质性特征。

这一评价表明在第一个问题上出现的负性反应和在相应阶段(2A亚阶段)的顺序及绳结问题研究中所观察到的反应之间存在直接类比。在顺序和绳结问题中，我们发现4—5岁的儿童不能把在项链中看到的圆形顺序调换为线性顺序，同样也不能把拉紧的绳结、松弛的绳结以及开放的反手结看成"同胚"。因此，在这里，我们发现儿童不能摆脱既定正方形的知觉模式，不能想象把它压缩成边长为几毫米的图形或把它扩大到纸张的边界。在以上的三种情况中，知觉往往都提前阻碍或抑制了任何关于转变的概念。运动活动从属于知觉而非维持知觉对未来的预期(即潜在的知觉)，因此心理表象集中于特定的知觉，而并未关注动作将会引起的变化。

然而，在所有的这三种情况中，当儿童开始对未来动作进行预期时，通过把连续的概念逐渐连接起来，最初的静态行为最终都变得更加灵活，因此儿童便开始远离对运动活动的直接知觉。当再次把当前的实验和那些研究顺序问题的实验相比较时，我们发现在2B亚阶段以及在这一阶段和第三阶段之间的水平上，儿童能够认识到尽管发生了把珠子穿到线上面这样的变化，但是顺序是可以保持不变的。同样，儿童也能够意识到无论绳子被拉紧还是放松，绳结都会保持不变。通过同样的方式，儿童也可以把正方形

① 即原来增大的动作变成减小的动作，原来减小的动作变成增大的动作。——译者注

连续扩大或连续缩小。从最初的水平到第二阶段末期把这些概念逐渐联系起来，儿童在这三种任务中的进步速度大致相同，顺序和绳结问题上的表现略微领先，正方形问题上的表现稍有落后，下面我们将会看到。

那么，第二阶段儿童立刻画出最大的或最小的可能的正方形需要具备什么条件呢？他们需要但却不具备的是一种由柏格森(Bergson)和塞尔兹(Selz)提出的某类“预期格式”[1]。这一格式可以先提供答案，之后再通过探索答案过程中的动作来填充细节。但是这些研究者所提出的预期格式概念，尽管是一种精明的提议，却依然仅限于精确的描述。我们真正所需的是对这种格式是如何建构的理解，以及对这一格式是如何起作用的认识。这些理解和认识只能通过考察智慧的运算机制来获得。

概念的联系或结合最初源于运动活动，它使得动作一旦开始之后，能够预期动作的目标，并通过对过去成功的重复形成格式。此外，运动适应通过外部和内部的模仿来继续和延伸，内部的模仿由动作的符号表征构成。通过这种方式，最初完全是运动特征的预期和重构过程便被赋予了想象或概念的维度。[2]但这些过程并不会自动达到一种稳定的平衡，直到动作(现在动作已内化为符号或表象的形式)变得具有可逆性并进而组成思维运算。因此，预期格式只不过是一种运算的“分组”，把大量的运算按照直接的或逆向的顺序排列。

这样，儿童不能画出最大的或是最小的可能的正方形，直到他到达了能够把正方形集合 $A, B, C, D\ldots$ 排列为质性序列的阶段，例如 $A<B<C\ldots K<L<M\ldots S<T\ldots$，$L$ 既在 $L>K\ldots<C<B<A$ 这一序列中，又在 $L<M\ldots<S<T\ldots$ 这一序列中。事实上，从之前的研究中我们得知，在第二阶段，当使用配对方式来比较大小时，儿童不能进行大小排序，并且在7岁左右才可以对高度进行排序。现在，这一大小序列(它事实上是当前实验中所包含的预期格式的来源)本身源自(在逻辑层面)顺序运算，并且也毫无疑问地源自围绕运算。当进行大小排序，且这种排序不包括测量特征，只包括 $A<B$ 这类质性关系时，便只意味着排列一系列“封闭的”或“包含的”差异。也就是说，建构一系列的包含，例如，A 包含于 B，B 包含于 C，以此类推，而不考虑 A 和 B 或者 B 和 C 之间的测量(或数字)间隔(在这方面，我们可以回忆一下弗朗、拉帕等儿童在尝试着用最大的正方形包围样例正方形时存在的困难)。

因此，显然是运算的缺乏阻碍了大小序列，“分类”(像 $A<B$ 这样的质性关系序列)的缺乏使得这一过程不能被提前构想为一个单独的整体，也就是说，阻碍了预期格式的存在。[3]

这些简单的观察可用于帮助解释儿童对问题2—4的反应。这些反应表明这一阶段

---

① Bergson, B. Essai sur les Données Immédiates de la Conscience. Paris, 1926, 24th edn. Selz, O., “Essai d'une nouvelle théorie psychologique de l'espace, du temps et de la forme,” *Journal de Psychol.* (1927), Nos.5 and 6.

② 有关这一主题，请参考 *Play, Dreams and Childhood*, 1951。

③ 关于“极限”的问题，在本章节中，它只是一个受测量环境限制的质性序列问题，与数学上的“极限”并无关系。数学上的“极限”意味着越来越小的间距，因此会有广泛的数量。

的儿童完全没有运算连续性的概念(与直觉连续性形成对比,直觉连续性的基础是对不能分割的连接元素的知觉),因此他们不能把线或面分解为点,"扎堆"使用某个儿童的表达(尽管他拒绝接受他表达得如此令人钦佩的想法)。

这些反应最明显的特征表现在儿童进行线和面的细分(问题2)时所经历的困难。因此,弗朗不能画出一半的线,并且当研究者把一半的线画好后,他并不明白一半的一半是什么意思,转而指向了另一半的线。然后,当他把这个[①]视为自己的起点时,在他随后的细分中,线变得越来越短。最后,当儿童开始进行或多或少的有规律的细分时(诺伊等),他们很快就细分到了自己认为的最终元素。在线的细分问题上最终的长度为2mm,在正方形的细分问题上最终面积为$2mm^2$。尽管这个所谓的终极元素仍然能够被大家清晰地看到,但儿童认为已经不能再进一步细分下去了,这是最重要的一点,也是需要进一步考察的相当复杂的问题。

首先,我们再次面临思维和知觉之间的联系问题(二者的关系最初是坚不可摧的)。最终的元素必须是可知觉的或者它们不复存在;正如查尔所说:"已经不能去数出它们的数目了(他在识别方面使用了"数数"这一概念)。"关于这个问题肯定会存在怀疑。当问题是使用铅笔可以真正画出的最小元素时,例如最小的正方形(问题1),儿童的答案就会部分正确……但只是部分正确,因为他终究会得到一个点,而这正是他一直拒绝去做的。然而,如果有怀疑,我们就很快地把怀疑消除。情况对于儿童来说已经相当明确,即他可以在"想象中"继续细分的活动,和玩游戏时的情况类似。那么,为什么儿童(他们在象征性游戏中可以在脑海里浮现任何幻想的事物)不能在"想象中"把相当清晰可见的2—3mm的线或是正方形进行分割呢?答案便是"假设"和"想象出来的虚构的事情"之间具有很大的不同,假设演绎推理是一种形式运算系统,这一系统在具体运算的不同"分组"完成之后才会获得,也就是说,直到11—12岁左右才会获得。

但这并不是全部的答案。如果这一阶段的儿童不选择点作为最终的元素,那么他们对问题3的回答表明这一情况是有特殊原因的。在儿童眼中,最终的元素总体来说必须具有明确界定的形状,因为它必须和细分前的最初整体保持一致。因此,对于弗朗来说,线的最终形状是本身无法再细分的"一条非常短的线"。对于克洛来说,线的最终元素是一个"点",但是这个点在形状上被拉伸得"像一段短线",同时,正方形的最终元素是"一个小正方形",三角形的最终元素是"一个小的教堂尖顶"或一个针尖。对于查尔来说,即使沿对角线来分割正方形,他仍然认为正方形的最终元素是"一个小方片",圆形的最终元素包括形状是圆形的"小圆片"。对于拉帕来说,细分线的最终元素是"什么都没有",尽管在"什么都没有"之前仍然有一条线……最后,比克,他起初也认为线的最终元素是"什么都没有",但对于正方形在"什么都没有"之前的最终元素却不能肯定是否为一个正方形,因此他用一个"稍微倾斜的小正方形"来做出折中。

---

① 指一半的线。——译者注

关于最终元素和最终元素的来源整体之间具有相同形状这一问题的解释是比较明显的。儿童不能把一个连续整体无限细分下去和他们认为部分与整体之间具有相同形状,这两个问题源自同一原因。它们都是因为早期思维具有知觉的本质。因为事实上,根据个体不能超越视知觉的限制和通过想象来找出最终元素的程度,我们显然可以看出最初的整体并不能被分解为知觉上为圆形的、不连续的"点",因为一个连续的、非圆形的整体是不能使用具有与之如此不同特点的部分建构而成。因此,如果整体想要保持自身特征的话,那么它就必须由其组成元素来建构,至少在原则上是如此。

最后我们来解释一下这一阶段儿童对问题4(即把部分重组为整体)的回答方式。无疑,我们需要去寻找支配儿童态度的潜在因素,而对整体分析与综合过程的不可逆性以及对二者相互关系认识的缺乏最有可能对初期思维困扰的问题作出解释。

对于第二阶段的儿童来说,他们需要调解好的事情不只有两件而是三件。(1)"*完整的图形*"是连续的,但它的连续性具有知觉本质,因为在细分过程中不可避免地要损失它的特性,因此不能对它进行分析。(2)要求把整体细分为"部分"。儿童很愿意去完成这一任务,但是认为细分整体就会破坏连续性,因此把这种连续性移交给了部分的内在。所以,为了尽可能多地保留这种连续性,儿童拒绝进行非常彻底的细分,并赋予每个元素和整体相同的形状。(3)点被儿童视为不连续的元素,并且它既不与整体相关,又不与整体的同质部分相关。儿童认为点是细分过于彻底的结果,更精确地说,是不合理的、错误的细分结果。

如果让儿童使用部分(2)去重构图形(1),将会出现什么情况呢?只要能够把碎片拼接起来,那么他在完成这一任务时便毫无阻碍。但是我们应当很清楚地认识到,这样的一种反应并不意味着儿童在使用一系列的可逆操作,因为这只是一种简单的、根据经验得到的复原行为。事实上,儿童出于我们刚才介绍的原因有意限制了自己的细分行为,他非常明白如果继续细分的话,可能总会在最后得到点。例如,比克说"*将会是一个小点*",他预见了这一结果。但他却对此无动于衷,因为他有很好的理由——"*点并不是线*"(换言之,点并不是线的构成元素)。使用同形的[1]部分来开始综合,并对最终的重组谨慎地保留观点,这便是儿童的反应。但这一反应并不能被视为一种普遍的可逆的行为,它只是一种简单的复原动作,也就是说,这是一种对事物最初状态的直觉复原。

因此,真正的问题是整体(1)和点(3)之间的关系或是整体的同质部分(2)与点(3)之间的关系,儿童固执地拒绝把点视为整体的元素,尽管研究者迫使他们意识到对"短线""小正方形"或"小尖顶"的进一步细分将会不可避免地涉及成为点的事实。无疑,无论承认与否,儿童都确信这一结果。他们都知道而且经常会说(参考克洛、迪布和比克),如果线或正方形等图形太小的话,它们就会变成一个点。但就他们的思维方式而言,这并不是一种完美的细分结果,它没有达到最终的真实状态,因为点超越了最终状

---

① 指与整体同形。——译者注

态,因而破坏或改变了最终状态。

把这些“亚元素”视为元素或部分的部分似乎是一件相对容易的事情(并且事实上可以构成一种一般的可逆运算)。但事实并非如此,在重构最初的整体,甚至是重构与整体同质的部分方面,这些亚元素被认为是不合适的材料——这里出现了最突出的矛盾。

在这一点上,我们询问儿童“线是否可以不被视为一系列的点”。对于这一问题的回答需要进行分类讨论。如果点是不连续的而且可以被视为点,那就不是一条线。如果这些点看上去是自始至终都连续接触的,那么它们就不再是点了。因此,实验中,诺伊会说:“*不,它们不是点。你几乎只能看到一条线*。”布鲁和诺伊的观点一样。尤鲍认为线的一小部分只能包括“*一个点而非几个点*”,而比克认为当这些点互相接触时,“*它们的距离太近了*”以至于不能保持点的形状,当它们彼此不接触时,“*它们是点,并非一条线*”。

这便是建立在表象和简单的知觉复制基础之上的初期推理的结果。这是一种介于连续性和点之间的完全意义上的二分法;连续性被分解为与整体同质的元素,但这些元素在细分过程中所发生的变化自始至终都会存在一种危险。如果这些元素被分割成点,那将无法把这些点重组起来或是重新建构整体。

第三节　第三阶段:有限的运算综合和连续性的过渡反应

在7岁或8岁左右,儿童能够开始进行具体运算。也就是说,视觉和触觉领域——到目前为止唯一拥有前运算概念的领域——通过具有可逆性质的、可以结合的一般运算加以组织。然而,除了知觉领域,思维的发展程度仍然很弱,儿童的思维只能通过对可触事物以及材料的类比来进行。这一点可以对以下儿童行为反应的本质作出解释,在介于直觉和运算之间的有限领域当中,这些行为完全具有可运算的性质。

拉茨(7;3)　很快就画出了最小的和最大的正方形。然后(问题2)他毫不犹豫地把一条线分为2部分、4部分、8部分……“最后会剩下什么呢?——*什么都没有了*。——在此之前呢?——*一条短线,或者是一个点*。——像这样的一条线(2cm)里面包含有多少个点呢?——……——1000个、100个或更少的点?——*不到100个……50个*。——在什么都没有之前留下的会是一个点吗?——*是的*。——在这条线里只有50个点?——*是的*。”

关于正方形,他立刻进行了细分。“最后会剩下什么呢?——*一个点*。——什么形状?——*没有形状*。——和线里面的点的形状一样吗?——*它毕竟会有一个小的形状,将会是一个极小的正方形*。”关于三角形,他把三角形细分为更小的形状

相似的三角形。“最后呢？——*是一个点*。——它有形状吗？——*没有形状*。——和线或正方形的点一样吗？——*和线的点一样，因为正方形的拐角仍然是一个小正方形*（他展现了自己细分正方形的方法），*但是三角形仍然会在上面*（侧面）*有两个东西，像一个尖尖的点*。”①

安德（7;3） 通过两次尝试成功地画出了最小的正方形，并且立刻画出了最大的正方形。他使用连续二分法把一条线进行细分。“*我不能再继续细分下去了，太小了*。——但如果你在头脑中进行这种细分的话，会变成什么样子？——*会越来越小*。——最后呢？——*会变成一个点*。——像这样的一条线（1cm）里面有多少个点呢？——*10个*。”然后他继续分割正方形。“最后是什么呢？——*一个点*。——和线的点一样吗？——*不，因为它*②*是一个正方形*。——那这个点看上去是什么样子呢？——*像一条短线*。——线的点呢？——*像一个点*（也就是说，每次都减少一个维度）。——但如果你继续把正方形分割到最后，你看到的不会是一个点吗？——*不，是一条短线*。——这个正方形里面有多少个点呢？——*有40个点*。——为什么呢？——*我数过线里面的点*（因此，4×10，因为线里面有10个点）。”关于三角形：“最后会剩下什么呢？——*一条线*。*除了一条短线什么都没有了*。——三角形和线一样都是由点组成的吗？——*它是由短线组成的*。——为什么呢？——*因为你像这样得到笔画*（他指了指减小为相同形状的三角形）。——最后会是什么呢？——*一个小三角形*。”

松（7;11） 先画了一个边长为2mm的正方形，然后又画了一个边长为1mm的正方形（问题1）。他能够立刻画出最大的正方形。“如果你画一个比这个（边长为1mm）更小的正方形，你会发现什么？——*什么都没有了*。——在此之前呢？——*一个楔形，一个点*。——它有形状吗？——*是圆形的*。”对于边长为1mm的正方形，他认为包含2个或3个这样的点，这一过程并不是通过铅笔来完成的，而是“在他的头脑中”完成的。对于边长为3cm的正方形，他认为“*至少有20个这样的点*”。“如果你把它们变得更小呢？——*我觉得会有100个点，或者很可能还多*。”

关于线：“最后是什么呢？——*是一个点*。——它有形状吗？——*稍微偏圆形*。——它和构成正方形的点一样吗？——*不一样，因为它是纵长的*。——如果你把它分割呢？——*将会变成一个更小的点*。——和正方形的点一样吗？——*不一样，它会稍微长一些*。——如果你在头脑中继续分割，最后得到的是什么呢？——*是一个小笔画*。——如果你把它进一步分割呢？——*一个点*。——有形状吗？——*它是长的*。”

关于三角形，最后的点“*有点尖*”。

莱佩（7;11） “你看这两个点，在它们之间可以放入多少个点呢？——*可能可*

① 与“un point”不同，原文中的“comme une pointe”意味着像一个尖顶或是一个箭头。

② 指原来的图形。——译者注

以放入20个，不，15个(他把这些点画了下来)。——它们一定会互相接触吗？——这个随你。——(他把这些点分离开来。)——不可以再增加了吗？——不可以，否则它们就会超出线了。——但如果它们很小呢？——可能可以放入100个或者115个。——如果你像这样分割一条线，结果会怎样？——(他继续把线进行二分)会是非常短的线。——如果继续分呢？——像这样的一个破折号(一个延长的点)。——如果它有弹性呢(如果分割或延展一段松紧带)？——你最多可以分割30次，甚至可能分割100次。我不知道，或许你可以。"但它们[1]总是保持"短线"形状。然而，他认为用直线分割圆形最终会得到非常小的长方形。

皮耶(7;11)　第一次尝试就画出了最小的正方形。"如果把它继续变小的话，最后会是什么？——一个点。"他对线进行了一种自发的二分。"最后是什么呢？——也是一个点。——和正方形的点一样吗？——不一样，正方形的点是正方形形状的，这个[2]的点是一个小小的破折号。——如果你把它分割呢？——它仍然是破折号形状。"

布利(8;6)　"你可以在这两点之间放入其他的点吗？——可以放入100个。——要是紧凑一点呢？——200个。——彼此间距离更近一点呢？——400个，也可能500个。——如果你把它们彼此相邻，这样可以吗？——可以。——你还能数出点的数量吗？——可能数不清了。——然后呢？——小点彼此相邻(他把这些点画了下来)，当有空隙的时候，你可以再增加一些点进去。你可以在点之间增加更多的点，但这样就会变成一条线。——很多点放在一起就会变成线？——(他犹豫了。)——一条线有很多个点？——(没有回答。)——把这条线分成两半(以此类推)，你可以长时间做下去吗？——可以。——最后呢？——画出来的形状像一个点。"

一个三角形最后会产生"一个画出来像角一样的形状"，线最终会变成"一个平躺的点"。

帕特(8;11)　立刻说出了最小的可能的正方形"是一个点"。"一个点有形状吗？——它可以有很多形状，圆形的，正方形的。——只来想象一下一个正方形的点。你可以在头脑中想象把它分割吗？——可以，它会变成一个非常非常小的点——它有形状吗？——你看不到。——那就是它没有形状了？——它还是有形状的。"关于线："最后会是一个点。——它有形状吗？——它是长方形的。——如果你再把它分割呢？——一个正方形。——再分呢？——长方形。——最后呢？——什么都没有了。——突然就什么都没有了吗？——将会有一个非常非常小的长方形。"

"像这样的一条线里面有多少个点呢？——非常多。——它们相互接触

---

① 指分割后的形状。——译者注

② 指线。——译者注

吗？——*是的，否则就无法组成一条线*。——但在任意的两点之间会有空隙吗？——*没有，你可以放入大量的点，因为你可以把它们放到中间*。”

弗雷德(9;9) 关于线的细分：“最后会怎样呢？——*什么都没有了*。——在此之前呢？——*一段极短的线*。——你能把它分割吗？——*不能*。——当它是一条短线的时候你便不能分割了吗？——*哦，是的*。——再分会怎样？——*什么都没有了*。——像这样的一条线(1cm)里面有多少这样的小部分呢？——*不到100个*。——你可以继续对这条线进行分割，直到剩下的是点为止吗，或者一直是线吗？——*可以……是的……不，它会一直保持短线的形状*。”

布罗(10;3) 最小的可能的正方形“*像一个点*”。“真的是一个点吗？——*不，点会更小一些*。——那它是什么呢？——*它的中间可以进行填充，它不再是正方形了*。”关于线的细分：“你可以继续把这条线长时间地分割下去吗？——*不可以，除了一个点什么都没有了*。——在这两点之间你可以放入多少个点呢？——*30个*。——没有了吗？——*是的*。——可以再多一些吗？——*不，那样它会变成一条线*。——但是一条线和许多个点不是一样的吗？——*不一样*(他犹豫了)……——如果你把它们都放进来的话？——*就会变成一条线*。”

吉恩(10;4) 最小的可能的正方形是“一个点”。“它是否有形状？——*圆形的*。——如果你不停地分割这条线呢？——*最后将什么都没有了*。——在此之前呢？——*最后是笔画*。——你可以分割它吗？——*是的*。——然后你得到了什么？——*点*。——这条线里面有多少个点？——*大概有200个*。——任意两点之间呢？——*是线*。——如果你把它分割呢，会有点吗？——*是的，太小了，你什么都不能做*。——在线里面除了点就什么都没有了吗，或者还有什么其他的东西？——*有一条长线*。——如果你继续在头脑中分割的话会怎样呢？——*可能会有9000个点或者更多*。——正方形呢？——*有100个点*。——这些点有形状吗？——*圆形的*。——它们彼此接触吗？——*是的*。”

尽管在研究中很难做到既不给儿童建议答案，又不约束或迷惑儿童作答，但我们在对第三阶段所收集到的儿童答案进行选择时还是很公平的，因为这些答案很重要。

从第二阶段开始，儿童已经掌握了序列和细分的运算，这两种运算在7岁或8岁实现了功能上的可逆性。由此可以解释为什么儿童在解决最大或最小的可能正方形的问题时毫无困难。此外，出于同样的原因，儿童现在已经准备好对线和面进行一系列的二分，他们非常明确只要可以看到或感知到材料，自己就能毫无障碍地继续这一活动。同样，在到达知觉极限时，他们知道自己可以很容易地把部分复原为最初的整体。简言之，只要有一系列在有限范围内涉及可能身体动作的具体运算，那么这一阶段肯定比前一阶段有进步。

但是，如果我们勇敢地超越这些限制会怎样呢？当我们走出视觉和触觉的领域，会

出现什么情况呢？换言之，在内化为表象的可能的动作（这些动作组成了通过可逆的分析与综合的相互作用所完成的具体运算）领域之外会是什么呢？在解决这一问题时，先前的困难再次出现了，并且原因相同，即具体运算并不具有假设-演绎的特征。只有形式的、抽象的思维才可以沿着无限的方向进行运算，从而才能进行一种真正的连续性分析。事实上，纵观第三阶段的整个发展过程，显然儿童试图去调解基于材料层面发展起来的运算和前运算（在可视的模式上模仿不可视的东西）之间的矛盾，但由于缺乏运算机制而不能解决随之而来的矛盾。

在这方面，首先值得注意的一点是，儿童在考虑可能进行的细分时所给出的非常小的数量（问题2）。例如，拉茨认为分割一条2mm的线将会得到50个点，分割1cm的线将会得到10个这样的点，分割边长为1cm的正方形将会得到40个这样的点。这种适度估计是对点集合以及拓扑数学理论的极度简化，它会随着儿童的成长而出现相当惊人的增加。8岁6个月的布利认为有一条线包括400或500个点。将近9岁的帕特认为点的数量“*非常多*”，10岁4个月的吉恩认为会有“*9000个点，甚至可能更多*”，这很好地说明他们可以进一步去认识无限。但在这一阶段，没有一个儿童拥有无限的概念，这也正是随后出现困难的原因。

只要开始考虑最终元素的形状（问题3），研究者就会发现儿童对第二阶段中普遍存在的、感到非常困惑的概念的大量澄清。然而，儿童当前所提出的解决方案仍然没有超越有限的边界，因为他们缺少形式机制。第二阶段的儿童能够意识到三种不同的形式，即连续的整体、与整体同形的元素以及点（尽管这些点与完整图形具有相同的特征，但并不总能在非常彻底的细分中出现）。

然而，在第三阶段，儿童只能识别出两种形式，即整体和它的组成部分，他认为这二者可以通过可逆的分解运算和聚合运算来产生彼此。但这些部分实际上是由哪些元素组成的呢？大多数情况下，儿童认为终极元素是一个点，但这个点的特征与前一阶段的认识相同，即具有与整体同质的可视部分的特点。也就是说，点的面积和确定形状依赖于整体及其细分方式。

因此，拉茨认为源自正方形的点“*没有形状*”，但尽管如此，它还是具有“*很小的形状*”。而且，使用最初图形的某个维度在头脑中形成相应的元素。因此线的最终元素的形状是一个点，正方形的最终元素的形状是“*一个破折号*”。松认为属于正方形的点是圆形的，属于线的点是“*纵长的*”。皮耶提出了“*正方形的点*”这样一个概念。布利认为是“*一个拉长的平躺的点*”。帕特自然地认为一个点可以有“*很多形状*”，即使在“*你看不到它的时候*”（当这个点变得太小以至于看不清时）仍然具有形状。只有10岁4个月的吉恩在发现点是圆形的之后，像同龄的布利那样（布利说“*中间可以进行填充*”）开始认为这些点“*太小了以至于你不能再继续分割下去了*”，这样就离第四阶段近了一步。但事实上所有的这些儿童离获得无限细分的概念还有很长的距离。对于他们所有人来说，最终元素是点。尽管在第二阶段中儿童认为这些点与整体同质的元素形状不同，但

现在这些点有了明确的形状和有限的数量。

儿童在当前阶段的主要成就是使用整体的组成元素来对整体进行综合(问题4),这种行为发生在7—8岁到10—11岁之间,在此期间,儿童对最终点的数量的估计逐渐增加。从这一阶段初开始,儿童对整体的综合便不再具有任何困难,似乎对运算本身有了更清晰的理解,因为不再像第二阶段那样,对真正的元素和点感到困惑。由于元素事实上是一个有自身形状的点,综合只不过是分析的相反过程,所以很容易对构成面的一个或两个点进行可逆性思考。

所以,将近7岁的莱佩认为如果有太多点的话,“*它们将会超出线*”,为了避免发生点过于拥挤的危险,他把这些点分离开来,尽管他很诚恳地承认事实上这些点会互相接触,甚至认为如果这些点非常小的话,那么线里面可能会有100个或是115个点。但随着点的数目的增多,儿童开始发觉用这些分离的、不连续的元素来重构连续的整体会更加困难,同时也更加意识到元素和整体两者之间的矛盾。现在这种矛盾尽管在另一个水平上出现了,但它使我们想起第二阶段中所出现的类似困难,因为当这些点无法被感知且倾向于无限小时,它们便会引发如何调解自身和整体连续性的问题。

因此,8岁6个月的布利已经认为在相距2cm或3cm的两点之间可以有400或500个“彼此相邻”的点,“*当有空间的时候可以往里面加入一些点……但是它会变成一条线*”。这些简单的话语具有深刻的含义。一方面,儿童通过增加点的数量倾向于超越可视的物体;另一方面,布利使用了“但”这个词而非“和”,以此来表达从点到线的过渡。当被问及线是否和一系列的点相同时,他没有回答,因为连续整体的概念似乎毕竟不同于有限元素的非连续性(这是一种完全正确的推测,直到需要进行抽象运算时,他才想到答案是无限的)。帕特比布利的回答更进一步。对于他来说,会有“*很多点*”,这些点必须彼此接触,“*否则就不会变成线*”。有空隙的时候,个体可以“在中间”插入更多的点,这种想法已经非常接近理论上的解决方案了……点尽管“*非常非常小*”,但它们却有着“*相同的形状*”(线的点是一个“*非常非常小的长方形*”)。最后,布罗和吉恩表现出了这一阶段上少有的犹豫。布罗说太多的点“*会变成一条线*”。此外,按照吉恩的观点,两点之间“*是一条线*”,因为考虑到所有的点就会有其他东西,“*它是一条长线*”。同样,线和面是由成千上万个彼此接触的点组成的,这些点“*太小了,你什么都不能做*”,也就是说,不能对它们进行表征。

总之,在这一阶段,儿童可以进行一种可逆的活动,即把部分综合为整体并把整体分析为部分。但这一运算是“具体的”而非“抽象的”,因为它依然具有有限性和可感知性(或者说具有类比性和可感知性)而非无限性和纯理论性,因此在连续的整体和不连续的部分之间存在一种潜在的且暂时不能解决的矛盾。

然而,在点和线的关系问题上,儿童在当前阶段与在第二阶段所表现出的态度存在两方面的差别。首先,先前阶段的态度仅仅相当于把可视的不连续的点(只要它们彼此接触便不复存在,因为它们会变成一条线)与可视的连续的线进行对比。而第三阶段的

儿童所感受到的矛盾与超出可视范围的点的增加有关,因此是智力的而非直觉的,是思维的而非感觉的。其次,最主要的区别源于点和线的冲突,第二阶段的儿童认为点并非线的元素,而第三阶段的儿童的主要发现(甚至是假设)正是从点元素到线的可逆重构。这使得儿童有必要通过协调这两种相反的形状而非否认其中之一来解决矛盾,而这种否认正是第二阶段所采用的解决方法,在该阶段中点被认为是细分的不可逆结果。

这一冲突的主要特点是不言而喻的。运算的自然发展使连续性问题本身处于重要地位,它与数学发展史中对这一问题的解决方式类似。

第二阶段儿童的知觉连续性事实上是缺乏对相邻元素的分离。根据庞加莱的著名分析,连续性的印象依赖于以下矛盾:在三个相邻的元素A,B,C当中,A与B以及B与C之间不存在差别。从知觉方面来说,$A=B$,$B=C$,但是A与C不同,因此就会出现$A\neq C$。我们立刻会想到苛勒(Köhler)用相同的方式解释了差别感觉阈限(通过韦伯定律形成),这相当能够说明,不能对A与B、B与C以及A与C加以区分时这些关系的心理意义。

使用从第一章到第四章的术语,我们可以说知觉的或直觉的连续性是一种对邻近(发源于知觉的"邻近")和分离(分析所分离的空间元素,无论相邻与否)的综合,[①]但这是一种不完整的综合,因为与实际情况相比,A和B被认为更加邻近。确立这一观点之后,我们可以继续认为概念的连续性开始于"分离"被概括为"运算的细分"的阶段,因此"分离"不再局限于知觉的区分。

现在,我们必须找到一种邻近与分离间的新的综合,这种综合只有在所有相邻的元素都通过分析而变得分离(或变得可分离)之后才会完整。这是连续性概念的必要条件,但非充分条件,因为除此之外,在每个点的直接环境中,无论多么小,总会至少存在一个属于该整体的其他点,这一点也非常必要。因此,连续性成了邻近、分离、包含(点的围绕)以及顺序(被视为越来越小的围绕,由此组织成一系列的围绕)关系的综合。

然而,关于我们现在所讨论的行为反应,首先它是最明显的分离关系的发展,正是这一活动引发了接下来的其他活动。儿童起初把点彼此分离,这些点在知觉方面难以识别(尽管儿童认为这些点与可视的点类似)。随后儿童才会使用顺序和包围(参考布利和帕特,他们在两点"之间的空隙"插入点,或在其他点的"中间"插入点,等)。这些儿童所体验到的矛盾完全源于这样一个事实,即对他们来说,在细分过程中出现的越来越远的分离似乎必须要破坏邻近性,甚至是一种永久的连续性。他们对连续性的第二个条件的理解还并不完整,即尽管在增加分离的点的数量,但是也有必要保证在想象的点的环境中至少有一个邻近的点存在,无论环境有多小。

那么,在形成有序的包含或是围绕的过程中邻近关系和分离关系为什么没有被联系起来呢?答案同样是,儿童还不能进行思维的抽象运算(这种抽象运算能够使其进行

---

① 两个元素可以是邻近但不分离的或者是邻近且分离的,分离与非邻近性不同,因为分离仅仅取决于通过某种分析类型(知觉的或是逻辑的)进行区别的环境。

无限细分)，这是因为他不能想象充足的数量(即无限个点的数量)。在缺乏无限个点的情况下，所产生的空隙事实上不能被填满。这一阶段的儿童非常清楚这一点，但他们却无能为力，因为他们不能形成无限运算细分的概念。通过假设–演绎或抽象运算来实现这种综合是第四阶段、也是最后一个阶段的任务。

第四节　第四阶段:思维的抽象运算和连续性的综合

截至第三阶段，儿童已经在具体运算层面上掌握了邻近、分离、顺序以及包围的概念，但却不能用一种对理解连续性至关重要的方式把它们结合起来，这是因为儿童还不能进行无限细分(分离)的抽象思维运算。这种情况同样发生在把围绕(包围)中的可能无限多的分离元素组合起来的逆运算中。

我们已经呈现了大量研究实例，儿童大约在11岁或12岁开始使用抽象的或者假设–演绎的思维。也就是说，二阶运算系统，只是被视为可能的或者假设的运算系统，通过涉及具体运算的抽象命题来运作。只有儿童达到这一水平时才能用这种方式把连续性看作无限个元素。这些点只是假设的点，儿童既看不到又摸不到它们，但却能在头脑中实现无限的分离与结合。

然而，从10岁开始，儿童已经开始展现出介于第三阶段和第四阶段的行为反应，下面列举一些例子来说明。

阿尔夫(10;2)　关于最小的正方形(第一个问题)。他画了一个非常小的点。“当你分割一条线的时候，最后会剩下什么？——*一个点*。——你可以在头脑中进行分割吗？——*可以，线会变得越来越短，最后什么都没有了*。——你可以在这些点(彼此邻近的点)之间放入更多的点吗？——*可以，如果你马上画一条短线的话就可以实现。因为一条短线就是放在一起的大量的小点*。——你可以数出它们的数量吗？——*不可以，因为它们都是彼此接触的*。——有多少呢？——*成百上千个*。——两点之间有多少个点呢？——*它们之间什么都没有*(即它们相互接触)。——正方形中有点吗？——*有*。——它们有形状吗？——*圆形的*。——线里面呢？——*也是圆形的*。——正方形(边长为3cm)里面有多少个点？——*成千上万个*。——这张桌子里呢？——*几十亿个*。——你可以继续数多久？——*我觉得我可以一直数下去*。——最后的数字会有增加吗？——*不，永远不会，因为还没有人能够数到尽头*。”

马格(10;3)　关于细分：“*你可以继续分割200次、500次、1000次。最后你不知道有多少个点*。——这两个点之间有多少个点呢？——*100个，或者最多500个，但我数不出来，因为这些点将会彼此接触，会变成一条线*。”

迪斯(10;3)　他认为在一条长2—3cm的线里面有“*几百万个点*”,“*这些点互相接触,可能也不完全这样*”。但如果个体往里面增加更多点的话:“*点之间将没有任何剩余空间*。——已经达到最多数量的点了吗?——*可能是的;不,我不这样认为,因为这条线很短*。”

米(10;10)　“有多少个点?——*不知道有多少个点,因为用眼睛数不出来*。”关于细分:“*最后的元素将是一个点,因为线是由点组成的*。”

斯泰(10;7)　认为个体在每次细分后都会发现点,因为“*你不可能在分割后什么都不剩下*”,并且“*一个点要比一个圆*(一个可视的圆点)*更小*”。

帕乌(10;2)　起初他认为一个边长为1cm的正方形中“*有2000个圆点*”,这与一条线中的圆点数量相同。“*这些点相互接触,因为它们太小了*。——会有空余的空间吗?——*会有,但是你可以一直增加更多的点*。——多少个点?——*你可以一生都数下去,但却不会数到尽头*。——如果你数这个正方形里面的点,可以数得清吗?——*可以,因为它有边界*。——这个桌子里的点呢,它们的数量能数得清吗?——*是的。数字是没有尽头的,但是一个物体*(*真实的事物*)*是有尽头的*。”

下面是一些处于第四阶段的明显例子。

贝特(11;7)　“沿着这条线可以画出多少个点?——*说不好。你数不出有多少个点。你可以把点变得越来越小*(与越来越小的包含相比较)。——这个圆形里有多少个点?——*这个说不出来*。——大致有多少个呢,10000、100000、1000000?——*说不出来,点太多了,无法说清楚具体的数目*。——请你画出最短的线是什么样子的。——*我画不出最短的线,因为线可以不断变短*。”

祖姆(11;7)　关于线的细分:“你可以继续进行多久?——*可以永远进行下去*。——为什么?——*因为总会剩下一小部分*。——在剩下的一小部分里面有多少个点呢?——*太多了,数不清*。”

迪卡(12;9)　“你可以在这两个点之间增加更多的点吗?——*你想增加多少就可以增加多少*。——你可以把这条线继续分割多长时间?——*可以无限地分下去*。——你最后会发现什么?——*各种类型的点。最后它们都混合起来了*。”

达恩(11;7)　“如果你继续分割呢?——*依然是点*。——点是什么样子的?——*像空中飘浮的灰尘*(比较,原子论)。——一段短线中有多少个点呢?——*数不清,它们的数量无限多*。”

因此,显然在这一水平上,儿童的思维变得具有假设-演绎性,运算摆脱了物质内容的束缚,开始只根据形式结构来运作,这一水平的儿童超越了可视的细分以及可知觉的点的概念,把分析和综合机制延展到物理限制之外。仅仅这一点便促进了连续性的运算综合。

我们似乎用了一种有些宽泛的表述，来描述这些10—12岁的儿童所表达的部分（可能仅仅是部分）自发的且并不非常一致的观点。因为在儿童犹豫或是卷入矛盾及退行之前，几乎完全没有必要来提问他们。我们并没有打算让儿童相信点凝结理论（the theory of point condensation），也没有提及任何预示维尔斯特拉斯公理（Weierstrassian Axioms）的信息。

然而，有一件事情似乎一定能够证明，使用运算连续性的概念是合理的。在某一点，儿童突然意识到运算本身的动力机制是一种无限的、抽象的结合过程，随后的细分和重组不再是对有限的、物理的物体进行简单增加的运算，而是成为处理无限多个“包住”或“露出”系列的运算。此外，抽象运算的优点恰恰在于，它是“运算基础上的运算”，是释放思维全部力量的具有决定性的转折点。

下面举一些例子来说明。贝特拒绝画出最小的可能的线，因为“*你可以一直把线变短*”，祖姆认为细分可以“*永远*”进行下去，因为“*总会有一小部分剩下*”，这两个儿童都拒绝估计点的数量，因为点“*数不清*”。达恩说“*你总是可以继续增加更多的点*”，迪卡认为“*你想增加多少个点就可以增加多少个点*”并且“*可以无限地分下去*”。所有的这些儿童都看到了这样一个基本的事实：无限小并不意味着一种静态的剩余，而是表达了一种无限细分的过程。

关于重组，我们没有再发现和处于第三阶段的吉恩相似的情况（即“点”是一回事，“线”被认为是一种连续的整体，是另一回事）。相反，像这样重组的点和线是同一个事物，因为“*短线就是大量放在一起的小点*”（阿尔夫），并且可以一直把新的点插入空隙当中（帕乌）。因此，当迪卡说“*最后它们*[①]*都混合起来了*”的时候，他头脑中已不再是知觉上不加区别的物体（$A=B$，$B=C$且$A\neq C$），因为“混合物”所包括的点的数量“*你想要多少就有多少*”。而它[②]是由所有相邻的点所组成的同态的、连续的整体。

这种综合的基础（在第三阶段还没有被发现），除了其已知的成分还有什么呢？本质上来说，是无限继续运算的能力，是对第三阶段仍然接受的物质限制的反抗。但现在这一动态过程沿着两种同源发展路线展开，这两种路线的最终结合产生了真正的连续性。邻近和分离的概念不再像思维与知觉相联系时那样彼此对立。换言之，当细分过程变得具有可运算性时，直觉分离被基于邻近概念本身的逻辑的、概念性的分离所替代。同时，每个点的直接环境现在完全被其他点所占据，直到像迪卡所说的“*点之间不再有空余空间*”。这一细分过程可以一直继续进行，“*直到数字的尽头*”。贝特表达了同样的观点，他并没有对点之间的空间进行填充，而是把“*越来越小的点*”或“*可以不断变短*”的短线进行了内在细分，这是一种把一个物体“包含于”另一个物体的系统，与迪斯和帕乌所说的插入更多的点形成对比。

简言之，相邻或“围绕”序列（线是单维的，点“之间的”空间；面是二维的，点“周围

---

① 指“混合物”。——译者注

② 指“点”。——译者注

的"空间)本身是填充在思维上与其接近但相分离的点。因此,细分和包围的融合使得四种关系的综合或结合成为可能,这四种关系分别为邻近、分离、顺序和包围,且儿童在第三阶段已经能够掌握这些关系,但由于缺乏无限细分和包围的观点而不能把这些关系整合为一个整体。

尽管连续性的逻辑框架已经通过这些抽象运算方式形成,但显然这种逻辑框架只是一种质性的、大致的轮廓。儿童依然缺乏无理数的概念,而这一概念正是连续性概念的基础。对于这些儿童来说,点与整数序列相对应,尽管他们在这方面做了一些有趣的保留,例如帕乌说"*数字没有尽头*",而一些真实存在的或者占有物理空间的事物"*会有尽头*"。但他们对于已经计算的点之间所填充的特殊数字类型却没有概念。此外,他们似乎没有关于极限理论或凝结点理论的提示,而这两种理论将会使包围序列得以广泛量化,使之与其当前逻辑的、精细的条件相反。同时,个体可能会对自己是否真的不具有大量数量的概念,或者他们只是不能阐述产生疑问。因为这只是从贝特认为的"*越来越小*"的关系向广泛量化关系迈进的一小步。

总之,连续性概念的发展(我们所观察到的第四阶段的儿童所发生的变化)产生了对从第一阶段到第三阶段所发展的拓扑关系的综合。运算细分包括一种对相邻点的概念性的分离,而不是一种知觉的或直觉的过程,由此便在一种整体的、统一的连续性概念下调解了邻近和分离这对相对概念间的矛盾。由于连续性填充在每一个点的直接围绕中,它使得顺序和包含运算找到了一种同样可以应用于线、面以及三维空间的一般形式。通过这种方式,先前直觉的概念(这种概念与边界、开放以及封闭关系一同出现于相对早期的阶段,已经得到了注意)获得了一种理性的基础。

结果便是,尽管与其他关系的发展相比,连续性发展的完成有些晚——由于连续性包含对其他关系的综合,因此这种情况是不可避免的——但它使拓扑概念(儿童空间概念的基础)的发展更加完美,由此也为我们当前的研究画上一个圆满的句号。

第二篇 射影空间

概　　要

已经检验过其主要特征的拓扑关系，与我们将要在第二篇和第三篇中进行研究的射影关系和欧几里得关系的最重要区别在于：不同图形和物体彼此联系的方式。

组成图形或图案的不同部分之间的邻近性、分离性、顺序性、闭合性和连续性关系都是根据人为经验建立起来的。这些图形任意地缩小和扩大都是相互独立的，所以在其形状发生改变的时候，不能够保持这些特征（例如，距离、直线、角度等）的守恒。因此，这种类型的关系不可能形成一个通过透视图和坐标轴把不同图形联系起来的综合系统，正因如此，它们注定保持着心理学上的原始状态。

这种原始状态拓扑空间中表现出了其本质特征的个别图形是纯粹内部的，与之相反的是那些可以使其与其他图形构成联系的空间关系。因此，这里没有一个特征被一个能够包含所有可能图形的空间所拥有，由拓扑运算组成的两个或更多图形之间唯一的联系是简单的一对一的和双连续型的一致性，即图形之间的"异形同态"或结构等值的基础。也就是说，它只为基于每一个具象的客体都被孤立考虑的立场而给予运算的分析提供基础，而不是那种综合系统，即在整体上，一个图形便可以协调所有的图形，在组成上依据整体的共同空间结构。

在射影空间和欧几里得空间方面，我们遇到了一个新的且不同的难题，即依照通常的透视或射影系统以及坐标轴，物体定位和它们彼此联系的结构外形的问题。因此，射影或欧几里得结构在组成上更加复杂，它在儿童发展的晚期阶段才逐步形成。

由于它们承担了直线、角度、曲线、距离的守恒——在整个变换的过程中始终不变的关系——这些结构总是直接或间接地指向一般的组织系统。同时，甚至当仅仅分析一个被抽象过程孤立的图形时，情况也是一样的。

我们将要研究其发展状况的射影空间，在心理学上开始于人们不再孤立地看待物体或图案，而认为它们与"视角"有关的时候。这要么是主观的看法，即在这种情况下，包含了一个透视的关系，要么是其他物体（前者会投射在上面）。因此，从一开始，射影关系就假定内部协调的客体在空间上是彼此分离的，而不是通过拓扑关系对孤立客体进行的内部分析。

这是我们将在以下章节中试图研究的问题，投射线和透视（第六章），影子的投射（第七章），透视的协调（第八章），几何学的截面（第九章），旋转和面的展开（第十章）。

第六章　投射线和透视①

直线的概念产生于儿童试图在射影视角或坐标轴系统中将物体联系起来的初次探索。严格地说，拓扑学理论中的“一条线”根本就不包括“直线”。要把由拓扑承认的唯一的一种线，即普通的线转化为直线，则需要一种说明。这种说明要么是一种系统的观点，例如一条线的不同元素彼此遮挡而形成的一种透视；要么是一个位移，距离和测量的系统。因此，画出或想象一条直线就需要事先假定一个射影空间或欧几里得空间，在真实环境中，这样的概念远不是初级性质的，尽管这样的观点已在几何教科书中被表达出来。然而，这不是非常重要的，因为像对他们自己学科逻辑基础的无知一样，它们的作者对心理遗传学同样一无所知。

儿童在很早的时候就已经感知到了直线，但是确切的是在几岁开始能够用眼睛和手做出直线形状的运动，这个问题尚无明确的答案。然而，就像我们在第一章（第一部分）中看到的那样，能够感知到一条直线是一件事，而要在想象中勾勒出它则是另一件事。也就是说，图形的构造和重构之间存在着巨大的差异。具体地说，第二章中对图画的研究表明，复制正方形、长方形和与此相似的图形或重造一条直线的能力，是在儿童已经学会复制出那些看似更复杂，其实只包含拓扑联系（例如，闭合，周围二维的物体，或者边界交叠）的图形之后才获得的。直线的构造可以被定义为：在不同点之间通过沿着直线路径插入一系列点的方式的连接。在本章，我们将要讨论儿童最早在几岁出现了这种能力。

本章的研究目的是通过“设定目标”或“瞄准”来描述直线概念的发展状况，并研究简单透视图是如何被构造的。现在，后面的部分完全是关于直线形状的守恒，尽管它的长度、倾斜度、平行性等发生了改变。因此，尽管直线是一种通过透视变换而不受影响的基本形状，但现在投射直线是我们研究的重点，不仅是它本身，而且还包括它与基本透视的关系。

---

① 与 Mlles G. Ascoli, J. Nicolas 和 Ch. Renard 合作完成。

第一部分　投射直线的构造

在这一标题下,我们将仅研究那些通过"设定目标"的操作而构建起来的直线。虽然篇幅有限,但这里有一个难题值得我们用一节来说明。因为在知觉上,儿童很早便能识别出直线,但想象或构建出一条直线的能力却出现得很晚,因此有必要阐明知觉与表象空间之间的巨大差异。

第一节　方法和一般结果

在下面的实验中,我们用到了一张正方形或长方形的桌子和一张圆形的桌子,在桌子上面摆放着一些插在橡皮泥底座上的火柴棍。儿童被提前告知,每一根火柴代表一根电线杆,同时这些"电线杆"必须沿着一条笔直的路排成一条完美的直线。开始的时候,第一个或最后一个标杆(相距20、30或40厘米,不同的实验会有变化)先摆放好,它们与桌子边缘的距离是相等的。因此,儿童能够很简单地在这两个标杆之间插入剩余的标杆,做出一条与桌子边缘平行的直线,尽管并没有提醒儿童做出来的直线要与桌子边缘保持平行。这个实验的结果表明,儿童在实际操作中会不断地通过参考桌子的边缘来做出一条直线。同时,通过这一结果,我们可以很明显地看出,这(桌子的边缘)给了儿童很大的帮助。当儿童完成了这个任务后,位于两端的标杆将会改变位置,因此,在它们之间构成的直线会与桌子的边缘形成一个倾斜的角度,它既不是平行的(与桌子的边缘),也不是对角线(桌子)。这样要求儿童做出的直线就会与正方形的两条邻边形成一定的角度。

在圆形桌子的实验中,位于两端的标杆已被摆放好,因此儿童在它们之间做出的直线要么是一条直径,要么是圆上的一条弦。在这种实验情境下,桌子的边缘就为儿童做出直线提供了很少或几乎没有任何感知觉的提示或参考。

除了这些组合,儿童会看到如下的演示(圆形桌子上的实验效果更好),一些标杆被摆成曲线形或锯齿形,然后要求把它修正为一条直线。假如儿童不能够自己发现这种"设定目标"的方法,也就是说,不能依靠自己主动地探究发现这种方法,那么为了能够让其用眼睛把它们排成一列,就要把他带到与标杆在同一条直线的位置上。他被带到桌子旁边的不同位置(到另一边或与直线在同一方向上等),随后被问到每一个位置(观察所摆放标杆)的优点和缺点。

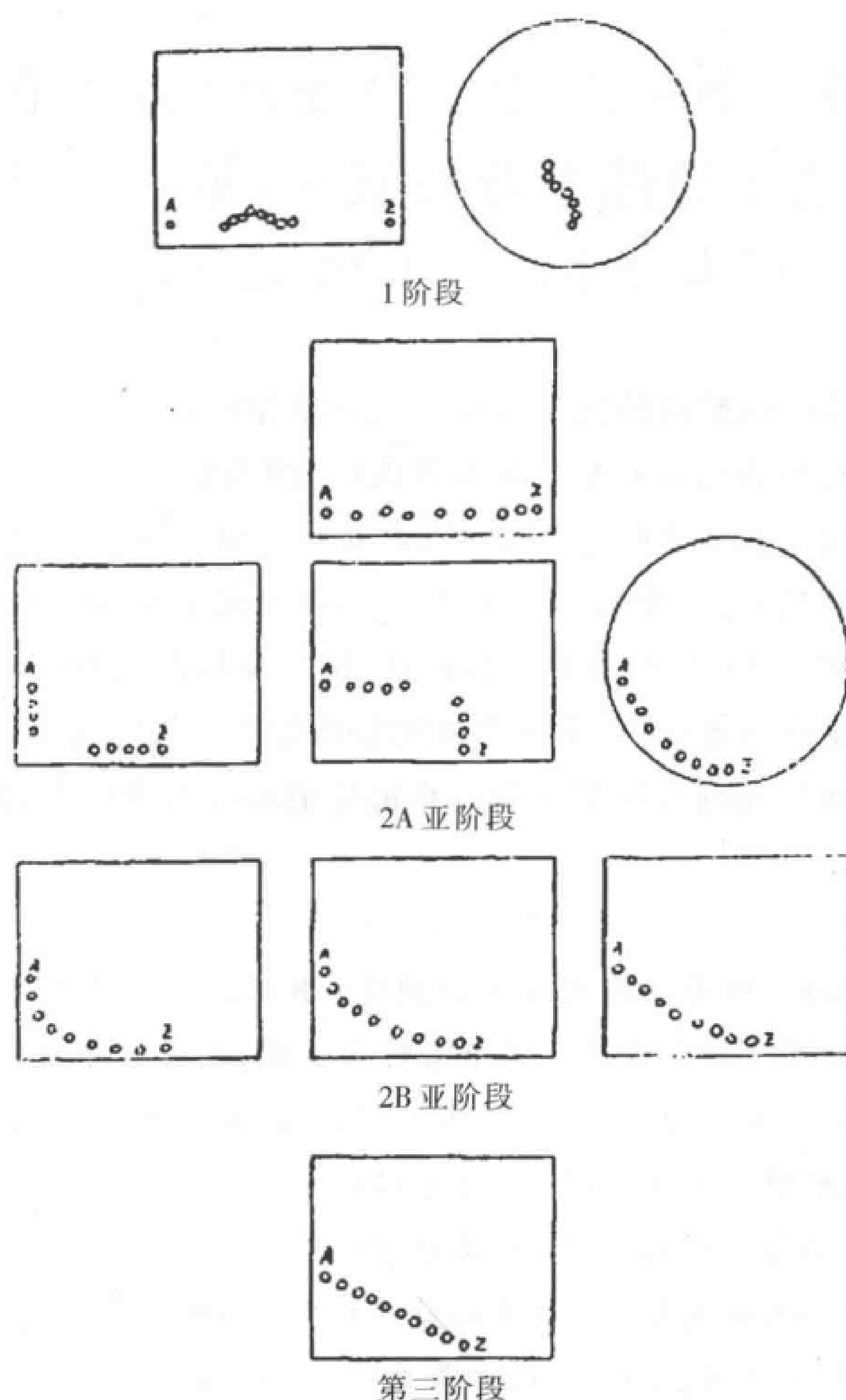


图12 投射直线构造的各个阶段

在这些问题的基础上，我们可以大致划分出以下的发展阶段（见图12）。在第一阶段（4岁以下），甚至当要求做出的直线与桌子的边缘平行时，儿童均不能够做出一条直线。而当给儿童提供一个模板来模仿时，儿童同样画不出构成正方形或三角形的直边。

第二阶段（大致4—7岁），当要求做出的直线与桌子的边缘是平行关系时，儿童大致可以正确地做出这条直线，但当它与桌子的边缘成一定角度时则又不能正确地做出这条直线。在这一阶段，我们可以再区分出两个亚阶段。首先，2A亚阶段（大致到6岁），儿童发现很难摆脱桌子边缘产生的感知觉影响。在2B亚阶段，儿童可以通过不断地尝试错误，逐渐克服这种干扰，动作在这一进程中发挥了重要作用。

第三阶段（开始于7岁，在一些案例中或比之稍早），不管要求做出的直线在桌子的什么位置，儿童都可以正确地做出来。儿童通过自发地“设定目标”或沿着轨迹注视来完成，即把他们自己置身于两个标杆所在的直线上（这条直线把两个标杆连接了起来）。

第二节　第一阶段和2A亚阶段：不能做出与桌子边缘平行的直线（第一阶段），或与之相独立（2A亚阶段）

尽管在第一阶段中观察到的反应与在第二章里相同水平上观察到的十分类似，但在一些细节方面对它们进行检验是非常有价值的，因为它们比形象的或触觉的反应更清楚地说明了想象和感知一条直线之间的巨大差异。很显然，在心理表征的早期阶段，相比于射影或欧几里得直线，拓扑直线在儿童心理表征的早期阶段中占据优势地位。处于第一阶段的儿童可以识别出直线，同时可以把直线从曲线中区分出来，但是他们完全不能够构造出这样的一条直线，即使要求做出的直线与直线边缘平行，就像桌子的边缘一样。只有在被允许在现有模型的旁边直接构造直线的条件下，他们才能完成这项任务。

奥尔布(2;6)　被要求沿着桌子的边缘（不仅仅与桌子边缘保持平行，而且就在其正上方）把"树"（插在橡皮泥板子上的火柴棍，另外提示其把它看作"拉着手的小朋友"等等）排列成一条"完美的直线"。他可以毫无困难地完成这项任务。与此类似，我们给他画出了一条直线，而他可以毫无困难地沿着它摆放8根火柴棍。但是，当被要求在桌子边缘的旁边（距离桌子边缘10—15cm）做出一条同样平行于边缘的直线时，他却彻底失败了，而只是简单地把火柴棍彼此紧密地摆放在了一起。结果摆出来的不是一条直线，而是一条曲线。随后，我们在距离桌子边缘2—3cm处，分别摆放了相距20cm的两根火柴棍，然后要求奥尔布用剩余的火柴棍在这两个火柴棍之间，摆出一条平行于桌子边缘的直线。他在起点火柴棍旁边摆放了两根火柴棍，又在终点火柴棍旁边摆放了两根火柴棍，但是最终还是没能完成用剩余火柴棍摆出一条直线的任务，而只是做出了一条与桌子边缘不平行的波浪线。

在绘图方面，奥尔布仍处于乱涂乱画的水平，还不能够复制出圆形或正方形（即封闭图形）。然而，他可以沿着事先绘制好的圆形的圆周摆放火柴棍，就像他能够沿着直线摆放火柴棍一样。

米克(2;9)　也能成功地沿着事先绘制的圆形、直线或桌子的边缘摆放火柴棍，但是一旦要求在距桌子边缘一定距离处摆出直线时，他便不能顺利完成任务。当火柴棍摆放在地面上，此时他不会得到任何帮助，同时也没有知觉上的障碍，情况也是一样。他把火柴棍彼此紧密地摆放在一起，最终形成一条波浪线。

他画出的圆形和正方形也是很粗糙的，近乎乱涂乱画。

帕乌(3;9)　画出的圆形是一个粗糙的封闭图形，画出的正方形也是一样，其

中包含一些角和一些零碎的线条。当试图画出一条简单的直线时,他同样失败了。相对于之前的儿童,他并非更有能力理解短语,例如"一条直线"中单词"直线"的含义。但是,当火柴棍被看作儿童站成的一个"环形"或者把它们摆成"直线"时,他确实理解了那些被提问到的问题。当要求做出"环形"时,他可以把7根火柴棍摆成一个封闭图形(彼此之间相距4—5cm)。当要求做出"直线"时(同样是在地面上),他把火柴棍尽可能近地摆放在一起,最终形成了一个圆弧。我们尽力说服他,让其在火柴棍之间留出一定空隙("他们是像这样拉着手的,他们并没有紧密地贴在一起"),但是,当有彼此分离的成分存在时,他便不能摆出一条线。

"现在从这里到这里(两个端点已经为他摆好了)摆出一道墙。——(帕乌把两个端点附近的元素分别组合在了一起,这样就形成了两条线,但是他不能成功地把这两部分组合在一起。)——然后尝试沿着桌子的边缘把它们摆放好(两个端点距离桌子边缘2—3cm)。——(他做出了一个弧形。)"一系列在桌子边缘摆放火柴棍的尝试,都得到了与奥尔布和米克相同的结果;换句话说,当要求与桌子边缘保持平行,且在距离桌子边缘2—3cm处做直线时,他们都失败了。另外,火柴棍之间的距离越大,儿童摆出的直线就会越不规则。

摆出一条穿过桌子一角的直线的尝试同样以失败告终。奇怪的是,帕乌用他解决该问题的方法向我们说明了,他还不能做出一条与桌子边缘平行的直线,同样不能在整体上摆脱桌子边缘的影响。虽然桌子边缘线条提供的知觉线索还不足以帮助他摆出一条直线,但是却足以抑制他做出一条穿过桌子一角的直线的意图和尝试。

达恩(4;0) 向我们展现了从现有阶段(即之前的儿童所表现出来的)到2A亚阶段的过渡阶段。他已经可以画出圆形和正方形,同时可以沿着桌子的边缘并与其基本平行地大致做出一条直线。但是,他还不能在一个中性的背景(例如地板)上做出这样的一条直线,在这一方面,他并没有完全表现出2A亚阶段所具有的特征。

这些结果的意义是很明显的。一方面,这些儿童可以很容易地识别出直线,因为他们一眼就可以从正方形中区分出其中的圆形,同时不论是沿着现有的直线,还是桌子的边缘,都可以很容易地通过摆放火柴棍构造出一条直线。另一方面,他们还不能清晰地理解是什么组成了一条直线,对他们来说,它还只是一个知觉领域之外的象征性的表象,或是在感知觉提供的框架基础上组建成的一个新结构。在口语上,他们并不知道"直"的含义,而只理解"线"这个字,因此在实践中,不能顺利画出直线。但更重要的是,当要求用火柴棍摆出与桌子边缘平行的直线(与桌子边缘相距2—3cm)时,他们都彻底地失败了。他们的表现很容易受到拓扑线条构造的限制,这些拓扑线条包括彼此紧密联结在一起的和通过很多不同方式(分离的元素,顺序等之间的邻近性概念都被很好地展开)进行弯曲的连续元素。最后,邻近性似乎是构成直线序列中的一个不可或缺的因

素,因为,一旦直线的元素被分离开,那么线条就会变得越来越不规则,直到最终它很难再被称作一条线。

总而言之,第一阶段可以用之前提到的两个特征来进行描述。没有直线的表象(尽管它已经在知觉上被了解)和拓扑线条的优势,只要元素彼此之间保持足够"近",那么它就可以被建构出来。

在2A亚阶段,我们所观察到的反应依然十分有趣。到目前为止,儿童可以把火柴棍摆放得与桌子的边缘平行,同时也可以在中性场景(尽管刚开始的时候,更为困难)中摆放火柴棍,但是当要求做出的直线与桌子边缘不平行时,他仍然不能摆脱桌子边缘的影响。

贝尔(4;4)　画出的圆形是一个封闭式的曲线,但是他不能把正方形和长方形区分开,尽管之前都被展示为一条直线加上一条抛物线所构成的封闭式形状。当他在中性的背景上做出直线时,贝尔在没有帮助的情况下成功地完成了任务——然而这仅仅发生在末端的那些火柴棍没有被事先固定的情况下,因此他可以把火柴棍尽可能紧密地摆放在一起。假如末端的那些火柴棍被事先固定了,那么他仍然可以用火柴棍摆出一条直线,但是却不能把那些末端的火柴棍也包含在内。然后,一个箱子被摆在儿童的面前约1m的地方,并要求儿童走向这个箱子。他沿着直线移动,同时在我们要求的位置上都会有一个木棍插在地面上,用来标记他行走的路线。现在,他被要求沿着同样的线,在地面上摆放火柴棍,同时刚才插在地面的木棍已经被移除,这样他可以正确地完成任务。然而,他不能在火柴棍之间留出足够大的距离,做出的线段长度仅为原来长度的四分之一。随后,他在桌子上摆放火柴棍,先是沿着桌子的边缘,然后是与桌子边缘保持平行(相距30cm)。这里情况也是一样,他把火柴棍紧密地摆放在一起。但是,他还不能做出一条穿过桌子一角的线,而只能摆出两条沿着邻边的线。

迪(4;6)　被要求在地面上把"小朋友们"排成一条直线。他不能把火柴棍彼此隔开,而是把它们紧密地摆放在一起。一旦他试图把火柴棍摆开一些,摆出的线就会变得弯曲。同时,他成功地做出了一个"环形"。另外,尽管只有在火柴棍彼此紧密相连的时候,他可以构造出一条与桌子边缘平行的直线。当试图做出一条穿过桌子一角的线时,他不能摆脱桌子边缘的影响,先做出了一条有一个直角的线,然后做出了一个圆弧。当被要求用他的手指做出一个直线时,他正确地完成了,但是还是像之前一样会把火柴棍摆成一条曲线。我们在一个房间的角落重复了这个实验,在两个邻近墙面的影响下,实验出现了相同的结果。

马尔(4;8)　"你知道一条十分笔直的路是什么样的吗?向我展示一下它看起来是什么样的?——(他用他手的移动展示了一条直线。)——那么有一定弯度的路又是什么样的呢?——(他做出了一个表示曲折的手势。)——这三个火柴棍(沿

着桌子的长边，同时与桌子边缘有一定距离，但它是不直的)是否构成了一条直线？——否。——那请你把它修正为一条直线。——(他把它们摆成了一条直线。)——这样是否绝对直了？——是的。——你必须参照哪些地方来确保做出的直线是绝对直的？——(他并没有动。)——假如你站在那儿(在这一排的对面)呢？——它是直的。——假如你站在那儿(和它在一条线上)呢？——它是不直的(他把它们摆成直线)。——现在请把它们摆成一条绝对直的线。——(与桌子的另一个边平行。他把四根火柴棍摆成了一排。)——你确定已经把它们摆成一条线了吗？——不太确定。——哪个地方是最佳的参照点？——(他又移动到了一个'端点'。)"

马尔现在被要求"沿着一条绝对直的路"摆放火柴棍，有三个标杆，*B*，*C*和*D*，在另外两个标杆*A*和E之间，其中*A*在桌子一条边的中点处，在桌子一条邻边的中点处，那么这样*AE*的连线就切掉(或穿过)了桌子的一角。他把*B*，*C*和*D*排成了一排，与包含*E*点的边保持平行，并且与*E*是在一条线上，这样*A*点就被这条线排除在外了。"但是这条路应该是直的。你是不是在这里(*AB*)做出了一个弯？——噢，是的。(他把*B*点排在*A*和*C*之间的直线上，但是现在*ABC*的部分与*CDE*之间就形成了一个角度)——但是现在在这儿出现了一个弯(*C*)。——噢，是的。(他把*B*点摆在了桌子的边缘上)马尔在*A*和*E*之间做直线的任务始终没有成功。一开始的时候，他把*B*点和*CDE*摆在了一排，随后他摆出了两个分离的直线*ABC*和*CDE*，但是不能把*C*和*D*包含进去，这是因为他还不能摆脱桌子边缘对自己产生的知觉影响，尽管这已经没有被明确地提到。

弗朗(5;4)　同样可以毫无困难地把三个标杆摆成一排，并与桌子的边缘保持平行。他只是大致摆出了一条直线，同时他不认为有必要再通过改变其位置来校正它，因为，比如像马尔，他还没有掌握"设定目标"的方法。不过，利用知觉平行提供的线索，他可以摆出一条直线。"现在有一个人要从这里(*A*=桌子的一个角)沿着一条绝对的直线到那里(*E*=对边上的中点，距离桌子边缘20cm)。——(弗朗把*BCD*摆在*A*的后面，并形成了一条与桌子边缘平行的直线，*D*与*E*离得很近，但是*E*还并不属于这条线的一部分)你看！——你摆出的路是绝对直的吗？它上面有弯曲的地方吗？——只有一个，这里(*CDE*)。——那么，把它修正一下，这样它就从这里(*A*)一直到那里(*E*)都是绝对直的。——(弗朗想要移动*E*点。)——不要，把它留在原来的地方。——那么我做不到。——继续，尝试一下。——(他把*BDC*和*A*靠近摆在一起，然后把它们摆开，使其与正方形的一条边平行，且和*E*在一条线上，这样*EDCB*部分就变成直的，但却并没有包含*A*)——现在这里有地方是弯的吗？——是的，那里有一个(*ABC*)。——好的，然后把它修正一下。——(他把*BCD*和*A*摆在了一条线上，但是现在没有包含*E*。)——看我是怎么做的(在他眼前，把标杆在*A*和*E*之间摆成一条直线)。现在，这是一条直的路，或不是？——这是绝对直

的。——为什么你没有这样做呢？——*因为……我不知道为什么*。——现在如果我把它们放在你刚才放的地方(*ABCD*与桌子边缘平行，*E*在这条线的外面)，这里有地方是弯的吗，或没有？——*是的，这里有一个地方是弯的*。——然后，请把它们摆成一条绝对直的线。——(他在*A*和*E*之间摆出了一个弧形，好像这条线在向桌子边缘靠近一样。)——这是正确的吗？——*不是*。——那么请把它们摆成一条直线——(他再一次摆出了一条与桌子边缘平行的直线*ABCD*，但是不包含*E*。)”

利尔(5;3) 用火柴棍做出了一条与桌子边缘平行的线，同时修正这条线上有曲折的地方，使得它大致是直的，但是其“视线”并没有沿着它移动。在他面前，我们展示了一条切过桌子一角的绝对直的线。“它是绝对直的吗？——*是的*。——哪里是检查它是否直的最佳位置，这里或那里(在线上或在中间)？——那里(中间)。——现在让我们移动到这个桌子(圆形)。我想让你在这两个标杆(*A*和*E*，相距30cm)之间做出一条直线。——(利尔把*B*,*C*,*D*沿着桌子圆形的轮廓，摆在了一起。)——它是直的，还是圆的？——*它是圆的*。——但是你被要求做出的是一条直线。——(利尔再次开始摆放标杆。)——*它们是一样的！我做不到。它就是应该放在那儿的*(在这个桌子的一个直径上，利尔在其中心位置摆放了一个标杆，从而构造出了一条穿过桌子的直线)。——但是那里(在*A*和*E*之间的圆的一条弦上)呢？——(他做出了另外一个弧形)*噢，不，它现在变成圆的了*(有些懊恼)。*它之前还是很容易的，不过现在我根本完成不了*。——那么在这个桌子(正方形的桌子)上试试吧。——*好的，没问题*(平行于桌子的一条边做了一条直线)。*现在，它是直的了*。——为什么？——*因为那里的桌子是圆形的，而这个桌子的边是直的*。——在圆形桌子上再尝试一下吧。——*不，我做不到！*”

罗格(6;0) 把三根火柴棍彼此相距30cm，平行于桌子的一条边，摆成了一条直线。“如果这样呢(我们把中间的那个火柴棍向桌子的一边移动了一下)？——*不，这样它就不直了*。——你是怎样辨别出来的呢？——……——你要移动到哪个位置才最有利于辨别(摆成的线是否直)？——(他待在原来的地方，依靠自己的猜想修正着错误。)——你是怎么知道，它是否正确的？——*我用自己的手指划出了一条线*(他实际上在食指的辅助下瞄准了端点，但这个动作是极其随意的)。——那么当是这样的时候(代表起点和终点的标杆分别在两个邻边上的中点处)呢？——(罗格沿着这两条边摆放标杆，做出了一个直角。)——它是直的吗？——*不是*。——那么，把它摆成直的吧。——(他连续做了很多次尝试，最终均摆出了一条曲线。)”

诺埃(6;6) 当被告知要摆出一条平行于桌子边缘的直线时，他并没有通过“观察”，而是依靠自己的一根手指，做出了一条直线。当*A*和*E*被事先固定，一个在桌子的一角，另一个在对边的中点处且距离桌子边缘20cm，诺埃首先沿着要求与之平行的那个边把*ABCD*摆成一条线，然后他又平行于桌子的边缘且在距离桌子边缘

20cm 处，把 *BCDE* 摆成了一条线，因此他还不能够把 *A* 和 *E* 用一条线直接连接在一起，而这条线和桌子的任意一条边都不平行。在反复提示和鼓励下，他成功地将这两点连接在了一起，但是形成的这条线向桌子的一条边靠近，呈现出凸型的曲线。

这些结果是不言而喻的。很明显地，在其知觉水平上，每一个儿童都可以识别出直线，同时可以把它从曲线和不完整线条中区分出来。甚至当由标杆做出的线穿过了桌子的一角——恰恰是在这个位置上，他刚刚可以构造出一条直线——儿童非常清楚这条线是否直的（比如利尔）。但是当他必须要想象，或是不管是在心理上还是实践上，当他被要求构造出一条连接 *A* 和 *E* 的线时，困难便出现了。同时这些困难本身的多样性是极其有趣的。

当儿童能够把自己的观点建立在知觉的基础上，能够依照现有模型一步一步地保持线条的正确方向，在这种情境中是没有任何困难的。当要求做出一条与一个直边桌子的边缘平行的线时，这样的情况便会发生。在这种情况下，所有属于这一亚阶段的儿童都可以构造出一条直线。同时，在这些情境中，把它说成真正的心理表征是不恰当的，因为这个过程还只是在知觉指引下的一种模仿。

另一种情境发生在要求儿童做出的直线是在中性背景上或者是与桌子上的对边等距的时候，在这种情境中，遇到的困难虽然显得更为严重，但是依然是可以被克服的。例如，利尔可以沿着圆形桌子的直径构建出一条直线。在这种情况下，他想象的过程并没有受到桌子曲线边缘的影响，同时当在一个足够大，以至于没有任何障碍干扰的地面上（例如在地面的中央），情况也是这样的。但是，在这个案例中，儿童的表现仍然可以被看作一种延时的且内化的模仿，而不是一种直接的活动。因此，那些儿童想象的直线都只是对先前感知到的直线的一种复制。从这一方面来说，这些直线与来自他们头脑中的任意一条直线或正方形都没有区别。

这里有第三种情境，然而在这种情境中，即当儿童需要想象并构建出来的线与感知到的、位于邻边（比如在桌子上部的“面”上）的直线或曲线发生冲突时，遇到的困难是不能被克服的。在这种情况下，想象出一条线就不仅仅是对过去或现在知觉的一种模仿，而需要在区别于那些所追求的现有模式内，生成一种新的关系。这样的表现要求不仅要有基于“设定目标”活动的射影运算，而且要有基于位置改变的欧几里得运算。

以上所描述的现象是重要的，同时也十分有趣，因为它们说明了这样的运算能力还没有获得，而且现在我们必须要探究为什么是这样的。当做出的直线要求与桌子的边缘平行时，儿童只是大概做出了一条粗略的直线，并没有瞄准或“设定目标”。马尔首先摆了中间位置的标杆，然后是末端位置的标杆。同时，实际上，他在第二个位置上，可以更容易地来控制火柴棍的方位——就像所期望的那样——但是他并没有从这一经历中获取在未来也可以使用的方法。当被问到检验这条做出的线是否直的最佳位置在哪里时，这些儿童中没有一个可以自发并主动地想到要站在做出的这条线上（译者注：来观

察检验)。

至于移动,罗格说道"*我用我的手指做出了这条线*",但是这仅仅是模仿移动的一个例子,还不是一个在位移中寻找那个最直接的线路或者保持方向恒定的系统。因此,当他们被要求做出一条与桌子边缘不平行的线时,这些儿童中没有一个可以解决这个问题。因为还缺乏"瞄准"或执行一种控制下的度量性移动的能力,他们在试图替代射影或欧几里得运算对知觉外形的一种要求。

例如,当试图把*A*和*E*斜着连在一起时,马尔先是把*BCDE*摆成了与桌子边缘平行的一条直线。由于此时*ABC*形成了一个角,他移动了*B*,因此修正了*AC*部分,但是却不敢移动*C*和*D*,于是这样便形成了两条直线*ABC*、*CDE*和它们形成的一个角。更为引人注目的是,弗朗在两条直线*ABCD*和*BCDE*之间游移不定。这两条直线均平行于桌子的边缘,包含*A*的直线在桌子的边缘,包含*E*的直线则更靠近桌子的中心。在第一条直线中,他需要解决的是∠*CDE*,而对于第二条直线,他需要解决的是∠*ABC*。然而,他还不能摆脱桌子边缘对他的影响,把*A*和*E*用一条斜的直线连接在一起。弗朗是属于这个阶段(参见诺埃)儿童的典型代表。甚至在他眼前演示了怎么摆成一条直线后,他也还是不能自己摆出直线,而是最终摆出了一条向着桌子边缘凸起的曲线,他的这种行为是非常值得注意的。在圆形桌子上,利尔遇到了相同的问题,即他也不能摆脱曲线形桌子边缘的影响,当要求其做出一条直线时,他反而做出了一个圆弧。相似的情况同样发生在罗格身上,当要求其做出一条穿过正方形桌子一角的直线时,他便努力与两条边保持平行,于是先做出了一个直角,然后做出了一条曲线。

有人可能会反对这样的结论,即这些结果仅仅是知觉影响的产物,而与形成直线的运算无关。在还不能从由桌子构成的"地面"上分离出由火柴棍构成的"图形"的情况下,儿童把要求他做出的直线替换成了其他与桌子边缘平行的图形。然后,在这种情况下,说这是一种知觉"错觉"明显是不正确的。儿童很清楚地知道他没有成功地做出直线,而在努力地改正这个错误。那么地面的结构外形就相当于一种理智的干扰,并没有丝毫扭曲他的知觉。

这些行为反应中一个特别有趣的地方存在于他们的智慧机制上。当背景中有可以参照的样例(和要求他做出的线平行)时,儿童可以想象到一条这样的直线,但是当要求做出的直线与背景中呈现的线相互独立时,他却不能想象出这条直线。这就是我们观察到的,同时它肯定是与直觉表象的结构紧密相关的,而并不是知觉本身。

这个结论是非常有意义的,而且这里很明显地有两种空间表征。第一种,即简单的直觉,它仅仅是一种对先前感知到事物的内化模仿(一种心理表象),因此它受现有知觉外形的支持或阻碍。第二种,目前还未得到发展,它建立在运算的基础上,因而其本身可以不受诸如外形的影响。应该指出的是,在这两个极端之间出现了许多的过渡阶段,这缘于对知觉进行修正的内化活动,正是这些知觉组织的发展导致了运算的发展。

第三节　第2B亚阶段：中介反应
第三阶段：通过“瞄准”和“设定目标”
形成的直线的运算结构

儿童在尝试做出直线时经历的各种失败和缺陷，以及在先前部分中讨论的内容，驱使着我们提出这样的问题，即为什么这种“设定目标”或“瞄准”的方法（儿童可以通过把这两个相距很远的点与附近的点摆成直线的方法，来实现把这两个点相连的目的）在早先时候没有被发现。毫无疑问，这个问题的答案可以沿着下面的线索被发现，同时我们也常常发现射影空间中的许多问题都与之相关。儿童有自己的独特视角，甚至能够意识到他随时可以占据一个（视角的）发现，比之前预想的更为困难，因为这样的发现或意识确实需要以所有视角的协调为先决条件。因此，“瞄准”的运算也不是一个简单的活动，而是对包含的所有可能视角进行区分，而后再进行协调。当我们先研究2B亚阶段的中介反应，而后研究第三阶段的正确反应时，这样的结论就会变得显而易见了。

在2B亚阶段，我们已经可以发现儿童开始通过检验那些与桌子边缘平行的线条，逐渐对视角进行区分。然后，与此同时，儿童会逐渐把自己从周围知觉外形的影响中解放出来。最终，做出与桌子边缘相互独立的线条。

克洛(5;6)　“我想要让你用这三个标杆做出一个真正的直路。——（克洛把这三个标杆在自己面前摆成了直线，他无意地选取了一个参照点，使得他做出的直线向桌子的边缘倾斜，尽管他看不到桌子边缘。）——非常好。现在请仔细看（三个标杆摆得与桌子的边缘平行，但是它不是非常直）。它是直的吗？——*是的*。——你确定吗？——*是的*。——和你现在站的位置相比，有没有一个其他的位置可以让你更好地来辨别它是否直的呢？——……（没有回答。）——当你到这里和我站在一起时，这条路还是直的吗？——*是的*。——那么在其他位置上呢？——（他绕着这三个标杆来回走动，然后对着它们哭了起来）哦，不！（他把它们摆成直线）——请在其他的地方把它们摆成一条直线。——（他移动了它们的位置，然后在不参考桌子边缘的情况下，在自己面前把它们摆成了一条线。）——非常好。现在我会把两个标杆放在这里（*A*在桌子的一角上，*F*在距离桌子边缘30cm处，面对邻边的位置）。我想让你把这四个标杆放在它们之间，并形成一条直线。——（克洛把*BC*和*A*摆成一条直线，并与桌子的一条边平行，然后把*D*和*E*与*F*摆成一条直线，并与其邻边平行，这样*DEF*就与*ABC*不连续）。*不，那是错的*（他把*BCDEF*摆成了一条线，而把*A*排除在外）。——它是直的吗？——*哦，不是*（然后，他把*ABCDE*摆成一条与桌子边缘平行的线，而把*F*排除在外）。——它现在直了吗？——*哦，不是，现在那*

里(*DEF*)有一个弯(他现在把*BCDEF*摆成了一条与桌子边缘平行,且相隔一定距离的直线,却忽略了*A*)。——那么这里(*ABC*)呢?——哦,对(再次把*ABCDE*摆成一条线,却又一次忽略了*F*);哦,不(最后,他尝试把*A*和*F*直接连在一起,但是最终摆出了一条曲折的线条)!——它是直的吗?——*差不多*。——你应该站在哪里来辨别它是否直的呢?——*那里*(他和这些标杆站在了一条线上,但是并没有注视着它们)。——现在请把它们摆好。——(他做出了另一条与桌子边缘平行的线*ABCDE*,但是把*E*摆在了*D*和*F*之间,这样两条线*ABCDE*和*DEF*形成了一个角。)——它是直的吗?——*不是*(他再次和那些标杆站在一条线上,然后做出了另一条连接*A*和*F*的曲线)。——(除了*A*和*E*,所有的标杆都被移除)现在用你的手指向我展示一下,这两个标杆之间的路。——(尽管他没有通过使自己的视线沿着标杆来修正它们的位置,但他最终正确地完成了这项任务,把标杆摆成了一条近似的直线。)"

卢策(5;11)　开始时使用欧几里得方法来构造他的直线,而克洛一开始便使用了射影方法来做出直线。[①]因此,当克洛通过眼睛观察,迅速将这些标杆连起来时,卢策正开始努力地把它们沿着同一个方向移动和摆放。我们把*A*和*G*与桌子边缘平行地摆放。卢策把*BCDEF*紧密地摆放在*A*的附近,同时朝着*F*的方向,用自己双手的手掌握着这些火柴棍(卢策把火柴棍之间的间隔增大,并一步一步重复这样的操作,同时使这些火柴棍保持着同一个方向)。"假设你现在只有三个火柴棍呢?——*那很简单*(他的手在*A*和*F*之间移动,然后在这两点的中间位置放置了一支火柴棍)。——很好。但是你确定它是直的吗?哪里是判断它是否直的最佳位置?——(卢策绕着桌子走着,但是并没有选择任何一个地点)*你可以从任何一个地点来作判断*。——现在我会把第一个标杆放在这儿,而把最后一个标杆放在那儿(两个邻边的中点处)。我想要让你在它们之间做出一条绝对直的路。——(他沿着两条边摆放标杆,最终做出了一个直角。)——它是直的吗?——*不是,那里有一个弯*。——那怎么办呢?——(他把这个角变得扁平一些,最终形成了一条弧线。)——它是直的吗?——(他把这个角变得更加扁平。)——一个鸟会怎样从这里飞到那里呢?——(他用自己的手指出了一条直线。)——那现在,请把标杆像那样摆好。——(沿着一条略有弯曲的线,他把它们摆了出来。)——它是直的吗?——*是的*。——请从其他地方(方位)观察一下。——(他绕着桌子走着,然后正面注视着刚才摆出来的线条)*不是,从这里可以看到这个火柴棍偏出来了一点儿*(他把它修正了)。——现在我们在这个桌子(圆形)上试一下。——(这两个标杆被放置在圆的弦上。卢策参照着桌子边缘的弧形摆放标杆,但是不自觉地喊着)*它不是直的*。

① 应该注意的是,在该实验的基本设计中,相对于选择欧几里得方法(例如保持最短路径或方向不变),我们并没有倾向于鼓励儿童选择投射方法(例如"注视")。就像我们所展示的那样,这两种构造直线的方法是同时出现的,也是儿童在这一发展阶段所能表现出的自然反应。

我要怎么做呢？——（这两个标杆被放置在圆的直径上）那么这样呢？——*它很难*（卢策用自己的手指指出了一条线，并且成功地做出了一条直线）。”

英（6;1） 把三个标杆摆成了一条直线。“把它们之间的间隔摆得更大一些（他这样做了，但是却降低了直线平直的程度）。它是直的吗？——*是的*。——有没有其他地方，你可以从那里更好地判断做出的线是否直的呢？——（他绕着桌子走着，然后在与做出的线成45° 的地方停了下来并说）*不，它不是直的*。——在哪里你可以最容易地做出判断，在那里（45° ）或是那里（和做出的直线在同一条线上）？——*在这里*（45° ）。——现在我把一个标杆放在这儿（*A*在桌子的一角），另外一个放在这儿（*G*在距离邻边的中点20cm处），然后你需要把其他的标杆放在它们之间，并形成一条绝对的直路。”他首先把*BCDEF*与*A*摆成了一条线，且与桌子的一条边平行，结果形成了一个∠*EFG*，然后他把*EFG*摆成一条同样与这条边平行的直线，这样就把*ABCD*留在了离桌子边缘较近的位置。接下来，他移动了*D*，使其与*EFG*在一条线上，这样就形成了两条线*ABC*和*DEFG*。现在他把*B*和*C*倾斜地摆在了*A*和*D*之间，结果形成了两条线*ABCD*和*DEFG*，二者在*D*点形成了一个钝角，然后把*E*和*F*与*ABCD*摆在了一条线上，而把*G*点排除在外。最终，他用一些标杆大致粗略地构造出了一条线*ABCDEFG*。“它是直的吗？——*不是*（尽管他并没有在适当的方位注视着它，但他自发地移动到这条线上的一个位置，来检查这条线，然后修正了标杆的排列）。”

米尔（6;2） 把三个标杆连成一条线。“你确定它们是直的吗？你可以从任何角度来观察它，如果你愿意，你也可以离开自己的座位。——（米尔绕着桌子走着。当和做出的直线在同一条线上时，他说）*这是一个最佳的位置*（调整了这些标杆的位置）。——（现在标杆在另一个方向上被连接了起来）它们现在是直的吗？——（米尔走到对面，沿着轴线观察，并把它们摆成直线。）——你为什么要站在那里？——*因为在这里，你能看到它们是不是直的*（沿着标杆形成的行，做出一个手势）。——现在在这两个标杆之间做出一个绝对的直线（一个标杆在靠近桌子一边中点，并距离桌子边缘30cm，另一个标杆在其邻近的一个角上）。——（米尔做出了一个平滑的弧形，并向桌子的一边靠近，然后他一边观察，一边叫了起来）*噢！看，这条路变成了一条曲线！*（他稍微进行了一下修正，然后走到了这条线的末端并对它进行检查）*它依旧是曲线形的*，（再次进行了修正，并检查）*现在我看到它是直的了*。”

就像读者们注意到的那样，这些过渡反应让我们能够看到，所有属于2A亚阶段的儿童都发展出了代替知觉直线的表征直线。在被要求做出的直线与桌子的边不同或相反时，属于该亚阶段的儿童都表现出了犹豫，不过最终都能够成功地解决问题，并做出一条直线。这又是如何发生的呢？

首先,我们必须注意到,射影方法并不是儿童用来想象和建构直线的唯一方法,因为在欧几里得空间中至少有三种定义直线的方法,并且所有这些方法都与那些能够被直接理解的简单动作相一致。第一,两个点之间的最短距离(理论观点中的恒真命题,但在现有条件下,它被精确地阐述为测量与直线运动的动作或运算之间的相互依存)。第二,保持同一方向的位移,同时可以被表达为当绕着它的轴旋转时,能够保持其形状不变的唯一的线条。这里后者的概念,最早由莱布尼茨(Leibnitz)提出,我们会在后面的内容中再次遇到,[①]尽管这里使用的这些方法阻碍了它被应用到现在的实验中。第三,直线是两个欧几里得或射影平面交会点的观点,现在还并没有讨论到,但是会在第四章中进行研究。

因此,现在我们有两个选择。要么是由"瞄准"(沿着线形成的列)获取的投射直线,也就是说,形状的保持与视角之间相互独立;要么是由移动的最短路径或同一方向路径的保持所决定的欧几里得直线。我们的实验已经表明,一旦儿童能够掌握知觉直线(进入2A亚阶段),那么投影或欧几里得概念就会同时出现,并会彼此促进。

因此,我们发现尽管克洛、英和米尔还不能掌握任何精确的设定目标的方法(就像在第三阶段中看到的那样),然而他们可以沿着他们的视线摆放物品,并通过"视角"的方法自发地探索这种投射直线。另外,卢策能够利用这种欧几里得方法,许多上面提到的儿童也都能够做到。然而,这两个过程很明显在心理上是相互依赖的。克洛所用的这种视觉排列的方法,通常伴随着能够代替视觉透视的动作或手势。而卢策所使用的欧几里得方法是被视觉射影所检验的。那么,这里我们就有了射影和欧几里得概念之间相互依存的早期例证,下面还会遇到很多关于这两者之间相互关联一般趋势的事例。

最终的完善始于第三阶段中占主导地位的视觉排列方法,直到作为一种特殊行为方式的"瞄准"或"设定目标"的出现。然而现在,先让我们来关注这个问题,即处于这个亚阶段的儿童是怎样最先发现这一特别方法的。就像我们在这个讨论开始部分说的那样,在这种情况下处理这一问题的能力来源于开始对各种观点进行的区分或协调。在2A亚阶段,儿童还不关心他们是从哪个方位来观察摆放的标杆。他们所关心的是知觉模式本身,或者更加精确地说,是物体表现其基本特征的方式。这种最初的现实主义解释了为什么知觉空间优先于表征空间,为什么只关注客体本身的拓扑概念优先于涉及彼此协调的客体或主体的射影和表征观念。

然而,在现阶段,我们发现,尽管儿童刚开始持有类似于现实主义的观点,但不久便会发现他所持的观点与他所看到的不一样。卢策开始时说"*你可以从任何位置来判断*",但是不久他发现当试图修正一个不完美的排列时,某一种视角会比其他的更好。这之后,米尔的构想,和摆出来的行在一条线上,"*这是最佳位置……因为在这里你可以*

① *La Géométrie Spontanée de l'Enfant*, Chapter X.

看到它是直的”。换句话说，投射直线的发现产生于儿童可以理解这一事实，即两个点 *X* 和 *Y* 可以与观测者 *O*，通过他做出的线 *OXY* 为中介而连接起来。因此，表征直线与知觉直线，通过儿童是否能够意识到不同视角所起的作用而被区分开来。

这就是儿童在大量犹豫和重复了之前阶段的所有错误观点之后，最终可以在要求他做出与桌子边缘不平行的直线时仍可以解决这个问题，并做出一条直线的原因，更精确地说是因为不同视角之间的逐步分化。在陷入知觉外形细节的泥淖之后，儿童最终开始尝试把第一个标杆和最后一个标杆（*X* 和 *Y*）直接连在一起。现在他必须做的是，在他把标杆从知觉背景中分离出来的同时，把 *X* 和 *Y* 连在一起，要么用移动的方法（一个假定了潜在参照系统功能的欧几里得过程），要么通过视觉观察。第二个过程只有通过区分不同的视角才能得以实现，同时正是对 *OXY* 观点的选择让儿童可以修正他们的排列。

在第三阶段（平均在7岁左右），对不同视角的区分能力已经发展得足以让儿童实现无意识的“瞄准”运算。这确保了儿童可以通过一个对另一个的投射，即从观察者的视角来看，第一个标杆遮挡了其余的标杆来正确地排列标杆。

维尔（5;10） 把标杆摆成了一条绝对直的路。“（他在他的两个手掌之间把它们连成了一条线，保持着一个固定的方向，然后弯下腰并看着起点的标杆来检查着他的排列。）——那在这两点（分别在两个邻边上）之间呢？——*我必须要这样做*（他用自己的手指在它们之间指出了一条线，然后把标杆摆在中间）。——你可以判断它是否直的吗？——（他弯下腰，然后看着它）*是的*。”

布尔（6;4） 把标杆连成了一条线，然后使自己的眼睛在这条线上，并看着。“*我正在看它是否直的，或这里是否有凸起的地方*。——那么从这儿到那儿（穿过了桌子的一角）呢？——（他把它们连成了一个向桌子边缘靠近的曲线，然后看着，并说）它有一点儿弯曲（修正了它）。”

托恩（6;4） “用这三根火柴棍做出一条直路——（他把它们摆在适当的位置，然后向桌子弯下腰，并看着。）——那么用这七根呢？——（相同的过程）*这就是了，它是直的*。——你是被别人教过要这样做的吗？——*没有*。”从一开始，倾斜地穿过桌子的这条线就是直的。

谢尔（7;7） 把六个标杆摆成了一条大致的直线，然后依靠猜想来调整它们的排列。“哪个地方是最佳的参照点？——*我更喜欢那里*（和摆成的标杆在一条线上，但是他并没有真的沿着它看）。——那么在这里（和桌子呈交叉状）怎么样呢？——（他立刻摆出了一条直线，然后在没有弯腰检查的情况下调整了它们的排列。）——哪个地方是判断它是否直的最佳位置？——*我从这一边*（他站的地方）*可以更好地作出判断*。——在这个地方（我们指出了其中的一个凸起处），它是直的吗？——*不是，因为你指的那个地方的标杆稍微靠向桌子的一边*。——那自己再

做出一条直线。——(他这样做了。)——它是直的吗？——(他先是向桌子的一边弯下腰，而后是向另一边，最终站在了与做出的标杆在同一条线上的位置，并看着)*是的*(在调整之后)。”

邦(7;9)　很快地在两个标杆之间做出了一条穿过桌子一角的直线，然后闭上一只眼睛，用另一只眼睛沿着这条线看着，并做出调整。“你是怎么判断它是否直的？——*因为我正在盯着，通过一只眼睛来观察它*(用手势指出了这条线的方向)。”

当谢尔没有把视线沿着排成的行进行检查，而是从一个特别的视角完成了他的排列任务时，这里的一些儿童(维尔、布尔、托恩和邦)实际上已经学会了“设定目标”。但是，所有儿童都清晰地展示出了一条投射直线是什么样的；一条拥有著名序列特征的拓扑直线通过这样的一种方式，即它的元素彼此之间存在着“前/后”关系，第一个元素遮挡了其余的元素，同时拓扑直线包含了与一个特别“视角”相关的有序元素。

但是一条投射直线还不仅仅是这些。和曲线相比，它是唯一的不论从任何角度观察，其形状都保持不变的线，在限制情境下，只有它的长度会发生改变。在第二部分，我们会看到，在相同水平的3A亚阶段，直线从曲线中分化了出来，即在这时，透视图发生了改变。在第一阶段和第二阶段，还不包含任何透视图，同时，尽管只发生投影变换，直线和曲线都自然地保持着原有的形状。然而，在2A亚阶段，当圆形和曲线被描绘在透视图中时，它们却都发生了改变，而直线保持了形状不变，仅仅是长度发生了改变。这就是我们在接下来的部分将要讨论的内容。

第二部分　透 视 图

就像我们刚看到的那样，构建一条投射直线的前提条件是一种对不同视角进行的不断区分和协调，换句话说，就是透视图。相反，与仅仅是感觉相比，想象一条面对任意方向的直线的能力组成了构建出透视图的基本要求，因为事实上直线是唯一的当透视图改变时，其形状仍保持不变的线。但是因为这个问题涉及空间心理学的根本原理，所以我们将会把它分为两个子问题进行讨论研究。在这一部分，我们的研究内容将关注这一问题，即儿童是怎样依据与参照点相关的位移，开始在透视图中描绘孤立客体的。下一章我们将会通过射影方法来研究相同物体的射影问题，这一问题的解决方法恰恰与普通透视图的方法类似。直到第八章，我们才会探讨，当参照点发生移动，并且存在很多相关物体时将会出现的整个透视图的协调问题。

第四节　方法与一般结果

我们会向儿童提出以下问题。会让他们想象，当一个物体，例如一根针、一个圆盘等，被摆放在不同位置时，它的表面形状是怎样的。在这里，出现了两个难点。第一个难点是要让儿童明白这个问题，与物体的实际形状无关，而与其表面形状有关，即物体的透视。第二个难点是要在尽量避开儿童绘画方面的不足（译者注：影响其作画）的情况下，获取儿童对于物体形状的描画。

为了解决第一个难点，我们轮流使用以下两种方法。第一种方法是在儿童的旁边放置一个玩偶（与儿童组成一个直角），同时向儿童描述有一个人与他同时看着同一个物体。儿童将会被问道，对于那个人来说这个物体是什么样的，因此对于儿童来说，他能看到一根针的全部长度，而此时可能呈现给另一个人的却是端头直对的针，反之亦然。当这根针端头直对着他时，如果儿童纵向地画出了这根针，那么我们就可以确定他画出的针是呈现给那个“人”的样子，而不是呈现给他自己的样子。这种方法很好地简化了理解透视图的难题，特别是对于边界线样例，例如点的处理，儿童很少从自己的视角，以一种精确的方式感觉到针竖起来的画面。

同时，引入第二名观察者（即儿童旁边的玩偶），这名观察者有制造混乱的作用。因此，有必要以可供选择的方式补充说明一下这种方法。这就是先改变儿童面前物体的位置，然后要求儿童预测当有进一步类似改变的时候，它的形状如何。例如，将这个物体旋转90°或180°，然后要求儿童想象在中间位置时，它的形状是怎样的。另一方面，这个物体会逐渐地旋转，然后儿童会被要求预测当它到达某些终极位置时，它的形状是怎样的。

对于这种描画物体的方法，这里同时使用以下两种方法是非常有用的，每一种方法都有其特别的优点和缺点。第一种方法是让儿童做画。尽管使用这种方法，越小的儿童，越可能受到其动作技能的限制，但这种方法可以产生很多儿童不能口头表达的想法和观点。第二种方法是向儿童展示许多图画，一些是正确的，一些是错误的，然后让他们选出一幅与物体表面形状一致的画。错误的画包含了儿童在自由作画时所犯的错误，用于表示旋转的直径缩小的圆形，或圆的圆弧没有闭合，等等。

我们主要使用的物体是一根针（或者一根木棍），用其来表示直线，一个薄的金属圆盘来表现圆形、椭圆、半圆……但是除了与旁边物体的各种可能形状相关的透视图问题，我们让其他人来处理与距离有关的问题。展示给儿童的一个最普通的透视错觉是在远处交会的平行线，例如铁路线或者道路的两条边等（汇聚的线）。因此，我们可以让他们画出这样的透视图，或者让他们从一系列已经做好的画（一些是平行的，其他是汇聚的）中把它们选出来。接下来的事情就很简单了，即询问他们关于自己做出的画或选

出的画的问题。

最后,需要指出的是,为了同时研究形状的改变,我们有必要来检验这其中的量化问题。当一根木棍或针发生旋转的时候,它的形状没有改变,但其长度是减小的。在随着距离向后延伸的铁路线或栅栏的例子中,儿童被要求画出横在铁路上的枕木或一系列向地平线延伸的立柱。他会把枕木或立柱之间的距离描绘成有规律的,还是随意的呢? 这样的方法让我们可以调查研究独立于任一测量系统的内涵量和外延量的问题。

对于不同的问题,所获取的答案(见图13和图14)让我们可以划分出四个明显的发展阶段,这与第一部分中的投射直线、第七章中的影子投射和第八章中的多重透视图的阶段相类似。

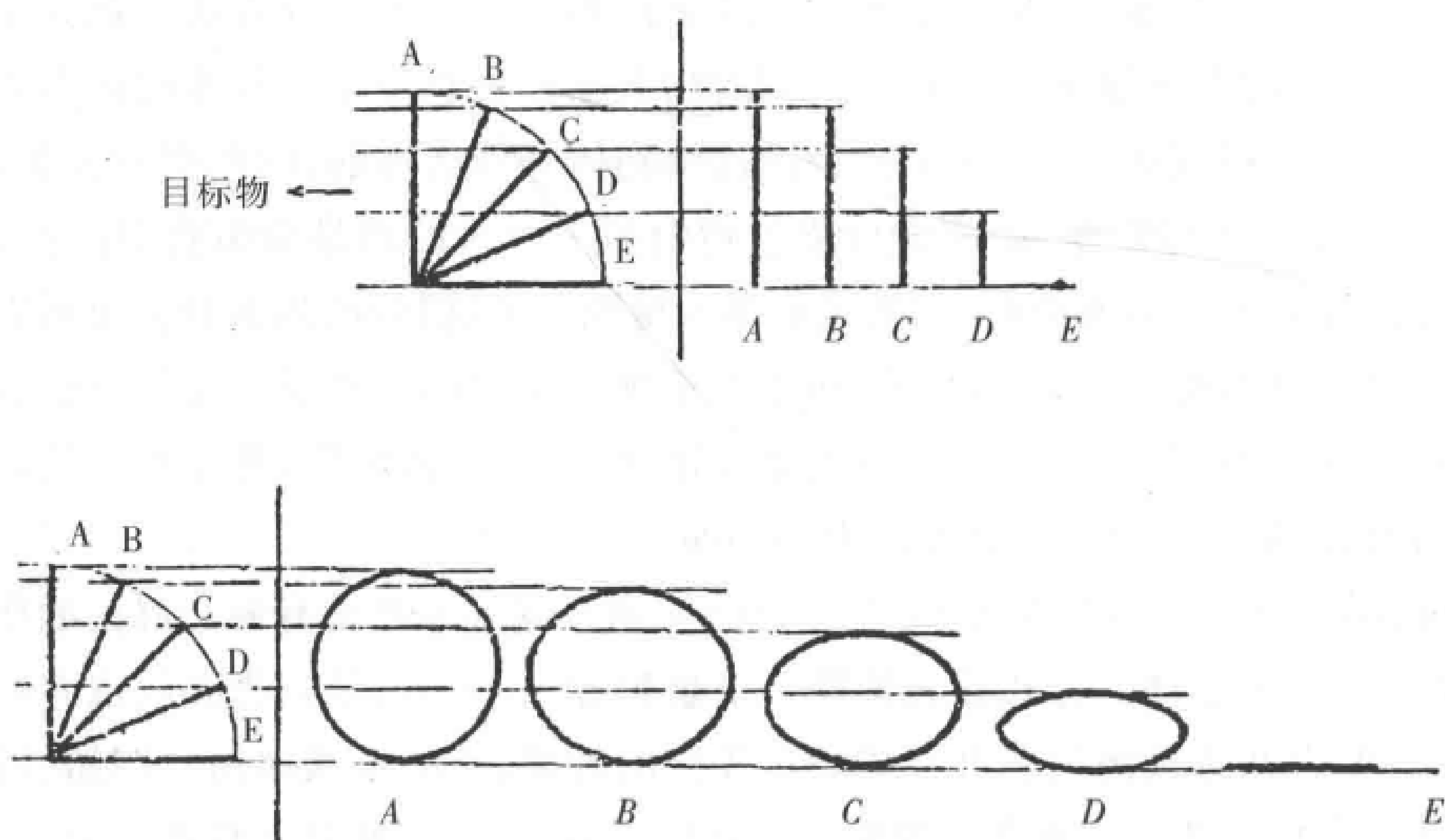


图13　在透视图中观察到的针和圆盘连续描绘图

第一阶段(4岁以下)不能做出任何名副其实的几何图形,可以被完全忽略。在这一阶段(同时伴随着对任意类型的绘图透视完全缺乏理解)观察到的,这种类型的透视图一致持续到了第二阶段的开始。这个第二阶段(平均从4岁持续到7岁)以区分不同视角(即物体被观察的方向)的完全或部分失败而著称。实际上,物体被想象或展现为它们本身的样子,与观测者观察它的方向所成的角度相互独立。

在这一阶段,2A亚阶段大约从4岁持续到5或6岁,在这个阶段不管物体与观察者的位置关系如何,物体呈现的形状和大小均不变。至多,不同的位置通过不同的方向被指出。另外,图形本身保持不变。同时,尽管不同的空间位置偶尔会被提示,儿童还是会混淆自己和玩偶的视角。

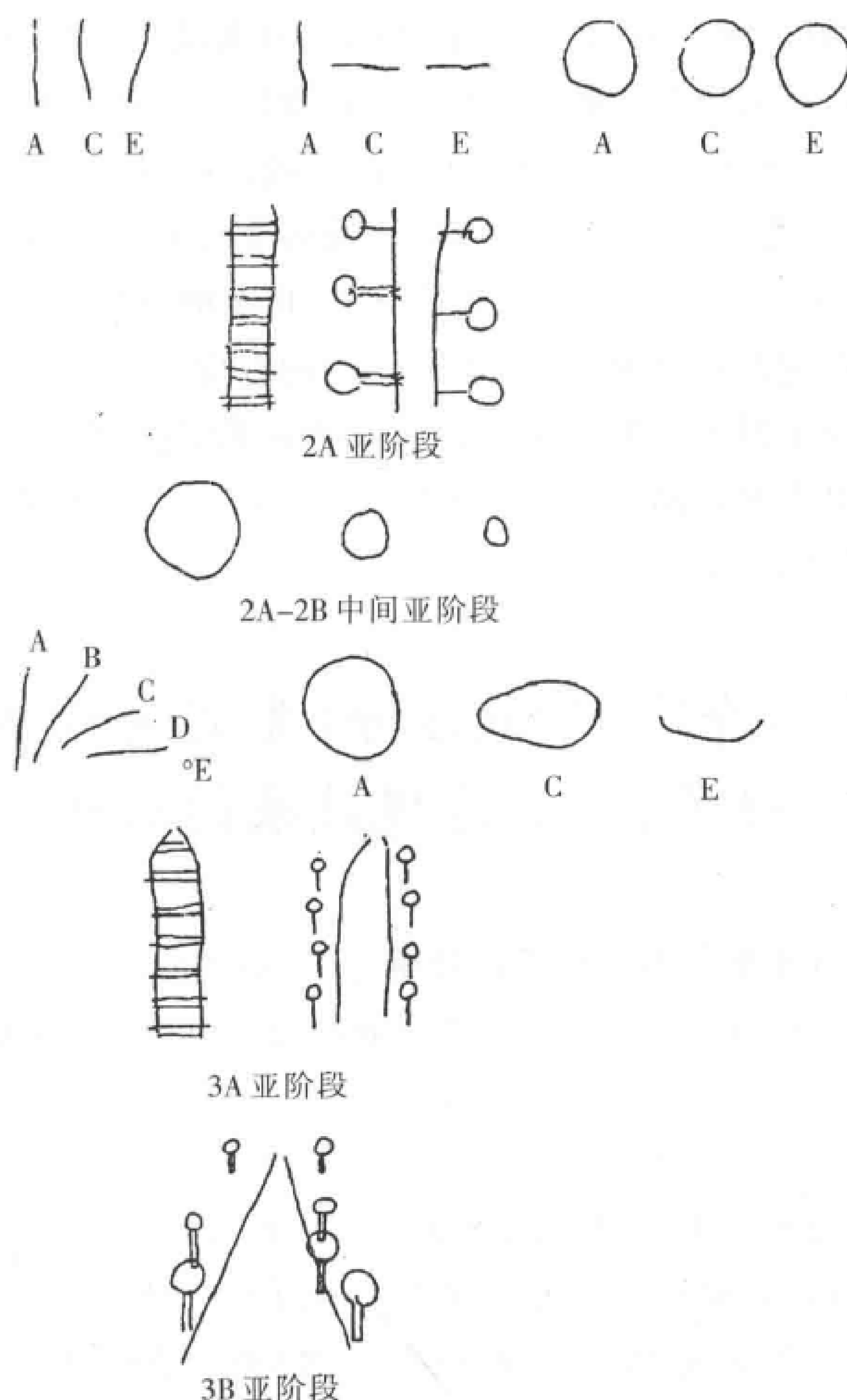


图 14　透视绘画的发展

在这一阶段的末期，儿童发展出了过渡反应，即慢慢意识到了现有绘图类型和它们描绘深度方法的不适当性。对于“端头直对”位置来说，儿童不能够做出一个符合要求的图画，而是努力通过把纸页转动到一个相近的角度来模仿它现实中的样子。偶尔，他会试图通过画出更小的圆形，来完成在透视图中做出圆形的任务。

在 2B 亚阶段，主要当选择图画的方法被使用时，儿童开始学会区分不同的视角，也是在这一阶段出现了比绘图任务更高级类型的反应。因此，尽管向远处延伸的铁路依然被画成平行的，但儿童还是从样品图画中选取了显示彼此交会的线的图画。在倾斜的透视图中做出的圆形比正面–平行的图形更小，但是在样例图画中，它被识别为一个椭圆形。竖着画的木棍有时被画成相同的大小，或比在侧面时更长，但是在样例之中，它被识别为一个点或者一个很小的圆。

在第三阶段（大约从 6 岁到 7 岁），在不同的视角之间出现了一种清晰的区分，这一阶段实际上包含了两个亚阶段。其中，3A 亚阶段只涉及一般的形状，不涉及外延的量，

而3B亚阶段(6到9岁,大约8岁)包含量化的同时,涉及所有形状的改变。

在3A亚阶段中,选取的参照图画与儿童自己做出的图画是相符的。铁路线被画成是汇聚的,栅栏的立柱也是一样(尽管枕木的间隔或长度减小了,立柱仍是不规则的),端头直对的木棍被画成一个点(尽管它的旋转提前暗示了,这是突然之中出现的变化,而不是长度的逐渐减小)。尽管通过一般的方式,形状的改变已经被深入理解了,但是儿童有时还不愿意接受在透视图中以圆形呈现出的直线。

最后,大约8岁6个月到9岁,儿童到达了3B亚阶段,这一阶段可以说是"视觉现实"或有组织地运用透视图来作画的阶段。现在,形状的改变已经被正确地理解了,其结果是儿童可以描绘在形状上发生量的改变。

第五节　第二阶段:不能区分(先完全后部分)不同的视角,没有透视效果的表达

我们将从来自2A亚阶段的一些案例开始,这些案例显示了儿童完全缺乏对物体形状和大小进行区分的能力。由位置的改变引起的外形方面的变化,通过方向的改变被简单地呈现出来。

安(5;0)　在玩偶前面垂直地放置了一根木棍。安把它垂直地画了出来。当把它水平地放在玩偶前面时,他再次把它画成了垂直的。因为从他坐的地方,安本身看到它是倾斜的,同时他说:"*他(这个玩偶)和这个一样,看到的它也是倾斜的*(他指着他画出的垂线),*不能再从其他任何方向来看它了*。"当这根木棍被端头直对地放在玩偶面前(对于儿童来说是纵向的)时,他把它画成了完整的长度,同时是水平的。相同的实验被重复,不同的是现在儿童被要求画出他看到的木棍的样子。当看到水平木棍时,他画出的也是水平的;当看到垂直木棍时,画出的也是垂直的;当它是端头直对着他时,他画出的是垂直的木棍。

当玩偶看到一个完整的圆的时候,安画出了一个圆。即便从侧面看的时候,他同样是这样做的。同时他说:"*这一个既是直立的,又是平躺的*。"这大概意味着一个正面朝下的圆仍然是一个圆,即形状的守恒性要优先于透视。当圆形以一定的角度倾斜时,他同样画出了一个全圆,然后说:"*它向一边移动了,这样使得它向一边变得稍微倾斜*。"对于那些与他视角相关的相似位置的圆,他继续画出了均为全圆的图画。当是半圆时,我们获得了相同的反应。

随着深度不断延伸的栅栏和铁路线都被没有展示出它们的透视效果。

祖姆(5;2)　当木棍对于玩偶来说是垂直时,他画出了垂直的木棍;当是水平时,他画出了水平的木棍。但是他仍然把看起来头朝前的木棍画成是水平的。"仔

细看一下,当它在这个位置的时候,这个人是否将会像那样看到这根木棍。——噢,不!(这次,他把它垂直地画了出来)"然后,他被要求仍然从玩偶的视角,从事先准备的图画中做出选择。水平和垂直的位置(没有透视变化)被正确地识别,但是对于头朝前的位置,祖姆在水平和倾斜的图画(均画出了全长)之间产生了犹豫。

对于正面–平行的圆盘,他画出了一个圆。但是对于边缘的(被垂直放置的),他也画出了一个完整的圆。"小心!——(他再一次画出了圆。)——你这样(全视野)看到的是相同的物体吗?另外如果那样(在边缘)呢?——*不是*。——为什么不是呢?——*我不知道*。——请把它画出来。——(另一个圆。)——看着这些图画,然后努力找到你看起来和这个(全视野)相同的圆。——(他选择了一个全圆)——那么和这个(边缘)一样的呢?——(他选择了一个半圆。)*因为它是像这样的*(指出了圆盘的轮廓)。"

在深度上不断延伸的铁路和栅栏被画成是平行的,而不是汇聚的,同时从事先准备的图画中,祖姆选择了那些平行的线(只有一次选择了汇聚的线,对此他不能给出任何解释)。

乌拉(5;2)　垂直和水平的木棍都被正确地画了出来。竖着的木棍被画成水平的且为全长。倾斜的木棍(按照透视法进行缩短)被画成是倾斜的且为全长。对事先准备图画的选择显示出了相同的结果。

从前面和侧面视角观察的圆盘都被画成了一个完整的圆。"仔细看一下(边缘)。——*我看到了一个圆*。——这个与之前看到的是一样的吗?——*是的,是一样的*。——那么这样(倾斜)呢?——*仍是一样的*(再次画出了一个圆)。"从样例图画中,他首先选择了一个半圆,然后是一个圆,来表示从侧面视角看到的圆盘。随深度延伸的铁路(作画):平行。对图画的选择:相同的结果。

赫尔(5;5)　在看木棍(从正面看木棍时,画出的是垂着的)画图时,表现出了与乌拉相同的反应。从事先准备的图画中,赫尔选择了一个倾斜的且为全长的画来表示正面视角看到的木棍。对于圆形,他有类似的反应。铁路和栅栏被画成了平行的。当给出图画,让其选择时,他的反应是特别清楚的:"*这个是对的*(平行的)。*那个*(会聚的)*是不对的,因为它不是直的*。"

尼克(6;7)　一支红色的铅笔(垂直的):"*我看到了一支铅笔*(把它画成垂直的)。——那么在这里看(在这个位置看)呢?——*他*(这个玩偶)*看到的不一样了*。(他再次画成了全长,且水平的线。)——他是怎样看到它的?——*他看到了铅笔的末端*。——那么其余的部分呢?——*也是一样*。——那么这样(倾斜的,并按透视法缩短的)呢?——*他会看到它有一点儿弯曲了*(画出了倾斜的,但仍是全长的铅笔)。——他看到的铅笔与之前的是相同长度的吗?——*是的*。——他并没有看到它更长或更短吗?——*没有,是一样长的*。"

"那么这个手表(全视野)呢?——*他看到的它是圆的*。——那么在这里看(侧

面视角)呢？——*他看不到整个手表了*(他画出了另一个圆，但是并没有将这个圆封闭)。——你自己看到的它是什么样的？——*我看到了两条线*(然而他画出了一个半圆)。”

梅尔(6;0)　把铁路轨道画成是平行的。“它们在那里，即当你从远处看它们的时候，和在这里是一样大的吗？——*它们都是一样大的*。——那么像这样的栅栏(起点处的立柱已经画出)呢？请沿着这条很长的路，向它的尽头继续画下去。——(他把这些立柱全部画成了相同的高度。)——那么在这条路的尽头，你看到它是相同的高度，还是变短了呢？——*是一样的*。——那么请继续往下画吧。——(他继续作画，但是把立柱稍微画得短了一些，即他改变了原来把它们画成相同高度的做法)*我把它们画得更小了*。——但假如你盯着一个东西，沿着一条很长的路向远处看的时候，它是变得更大了，还是更小了呢？——*更小了*。——那么现在，请画出当它是一条很长的路时，这些栅栏是什么样子的。——(他仍然把栅栏的立柱画成了相同的高度。)——在路的末端，就在那里，它是变小了吗？——*它没有变小*。”

想要立刻确定阻碍这些儿童理解物体的位移怎样引起了多种可能透视的难题的实质是很困难的。在知觉水平上，他们可以清楚地意识到，并能够这样表达出来，随着物体方位的改变，它的外观是在变化的。因此，当首先面对着铅笔头时，尼克立刻指出，玩偶将会“*看到不一样的它*”，同时当从侧面向他呈现一块手表时，他指出“*看不到一整块手表*”。以类似的方式，梅尔能很好地理解从远处看到的一些物体，会变得“*更小*”，等。为什么儿童在知觉上对它足够熟悉了，而在想象中还不能够描绘出透视图呢？这样的结果不能归因于儿童在画图上的能力缺陷，因为在这个阶段，从事先准备的图画中选择图画的任务得到了相同的结果，就和让儿童自己作画一样。例如，从侧面视角看圆盘时，祖姆选择的一个半圆的图画(在这个案例中这种做法是一个特有的选择方式，因为他自己把这个圆盘画成了一个完整的圆)。在尼克的作图中，我们再次发现了这样的图画(在这个案例中，从样例图画中选择图画的方法并没有被使用)。

因此，我们必须在儿童绘图方面的缺陷之外，寻找其他能够解释儿童不能理解透视的原因。这样的解释必须是足够全面的，不仅可以解释儿童在理解透视方面的缺陷，而且可以解释频繁出现在空白画纸上的图画。因为在很多案例中，相对于“他对物体的了解”，对于儿童来说没有比画出“他所看到的”更简单容易的事情了。相对于让他用直线来描绘它们，对于他来说，把针和铅笔画成一个圆点已经不再困难，同时尼克用“两条线”描绘一块手表已经与画出一个完整的圆同样容易了。

因此，针对这些困难的解释必须从知觉与透视表达之间的基本差异中寻找。根据给定的透视图，来观察一个物体就是从一个特殊的视角来观察它，但是这样就没有必要有意识地来精确地感知这个物体。另一方面，通过心理表象或作图的方法在透视图中

描绘一个物体，需要有意识地觉知那种有洞察力的人所持的视角，同时要具备由在某一视角下知觉物体所引起的转换。因此，和知觉相比，透视的表达暗含着运算，或者至少是有意识的，客体与主体之间的协调。换句话说，这是对这一现实的觉知，即它们都占据着相同的射影空间，超越了物体，包括观察者自己(因为这个空间包含几何学家所指的“图像平面”，即客体是被投射到这一平面上的)。然而，第一部分中对“瞄准”或“设定目标”的研究很清楚地显示了，在现有水平上这样的协调能力是不可能出现的。

简言之，由于自主意识或对不同视角之间心理区分的缺陷，这些儿童不能够表现出透视，同时依附于“客体本身”。对于这个客体，他们处于一种“伪守恒”的状态，即他们还不了解这个事实，即视角是主观的，这导致了伪绝对的出现，他们持有一种机械论方法。

在一些儿童身上表现得很明显，这种解释通过检验这些冲突和矛盾而得到了确认。这种冲突和矛盾存在于他们对透视的知觉意识和对它的无知，这些在这一阶段上是共同发展的。儿童通过画出一个半圆，来表示一个从侧面看到的圆盘(例如祖姆、乌拉、梅尔、尼克……)，是这些儿童能够感知到一个按透视法缩小的圆盘与一个显示其全貌的圆盘之间不同的一个清晰的证据。但是他们意识到只有物体的一部分可以被感知到，因此在现有透视图中描绘出了所能看到的图像。因此，他们画出或从样例图画中选出的不是投射图形(一条水平的线)，而是一个表现了部分轮廓，但未体现出透视的结构。换句话说，一些属性或特征被孤立地看待了。因此，视角没有直接体现在透视图中，儿童只能通过打破或毁坏物体的方法，来画出他所能看到的，而不是他看到的确切形状。

这种反应，在后进儿童(例如安)身上没有发现，这能够帮助我们理解以下问题，即在2B亚阶段什么行为是应当具备的，不同视角之间的区分能力是在何时开始成型的。这里有一些儿童，他们比之前提到的儿童具备更强的能力，表现出了两个亚阶段之间的过渡形态。为了使这种对视角的意识逐步显现出来，这里有必要列举出一些关于他们做反应的例子。

利尔(5;2，发展超前)“画出这个小人所看到的木棍(垂直的)。——*这很简单，它就是一条线而已。*——那么这样(水平的)呢？——*就像这样，你看。*——如果这样(端头直对的)呢？——*哦，但是这样的话，你应该这样做*(穿过这张纸)。*但是我做不到*，(画出了一个全长的水平的图画，然后说)*就像这样。*——你自己(端头直对)看到的它是什么样的？——(画出了垂着的木棍。)——如果像这样(向后倾斜)展示给那个小人呢？——*那样你是画不出来的。它是像这样的*(她画出了一个倾斜的、全长的木棍)。——那么这样(向前倾斜)呢？——*那样你根本是画不出来的，你必须要这样做*(用铅笔做出了一个穿过整体纸页的动作)。——那么对于这个(全视野的圆)，又会怎么样呢？——*他看到了这个*(画出了一个圆)。——如果它这样(从侧面看水平的)放置，会怎么样呢？——*它和我刚才画的是一样的*(画

出了另一个圆)。——如果这样(从侧面看垂直的)呢?——*你需要这样做*(用动作指出了轮廓)。——画出来他所能看到的。——*不,这是不可能的*。——(她被要求从事先准备的图画中做出选择)这里面哪一幅是正确的?——(选择了一个完整的圆。)——那这个(展示了从侧面看到的圆盘的样子,即一条线)呢?——*这是不正确的*。——你自己看一下(从侧面向利尔展示了水平的圆盘)。——*是那一个*(完整的圆)。——如果这样(从侧面看垂直着的)呢?——*这里面没有这样的*。——如果这样(倾斜的)呢?——*这里也没有这样的*(尽管这里有很多椭圆可以选择)。”

米斯(5;10) 木棍,垂直的和水平的,正确地画了出来。“如果这样(竖着的)呢?——*像这样*(做出穿透纸页的动作),*但是你画不出它*。——那么你自己看到它是什么样的(端头直对的)?——*我把纸这样放*(他拿着画有水平木棍的画,然后把它折成直角,这样它就侧立起来)。*我看到的就是这样的*。——从这些图画中选择正确的那一个。——(他选择了画出全长的木棍。)——那么这个(全视野的圆盘)呢?——(他画出了一个大圆。)——假如你把它这样(从侧面看水平的)转动,会怎么样呢?——(他拿着他的画,然后把它放平,放在与双眼平齐的位置。他这样根本什么都看不到,然后他说)*但是你做不到,你需要一张像这样的纸*。——那么这个(从侧面看垂直的)呢?——*这不难,就像这样*(画出了一个正圆)。——如果我把它放在你的面前呢?——(再次画出了一个相同的圆)*是这样的*。”

西拉(5;8) 在木棍实验中有相同的反应。对于向后倾斜的圆,他画出了一个半圆。“*当它像这样倾斜时,它是这样的*(指出了后面的一半)。——那么这个小人眼中的它(相同的位置,因此从玩偶的视角看,它是从左向右倾斜的)是怎样的呢?——*像这样*(一个完整的圆)。——看(给他展示了一个从左向右倾斜的圆盘)。——*是的,它是像这样的*(把它画得更小了)。——为什么?——*因为它向下变低了,它变小了*。——当它倾倒的时候,它变小了吗?——*是的*。”因此,西拉是把椭圆表达成了圆,只是稍微变小了!他把向后延伸的铁路线完全表现为平行的。

瑟(5;8) 根据一个能够看到全貌的圆盘,画出了一个完美的圆。我们从侧面向他展示了这个圆盘,然后明确地告诉他:“现在,像这样(平躺的),把它画出来。——*平躺的?好的*(把他的纸拿了出来,然后把它放平),*现在,它是平躺的*(然后,他画出了另一个与之前相同的圆)。——这是同一个吗?——*不是,因为这个*(第二个)*是平躺着的,而另外一个是直立的*。——但是从你的图画中,你是怎么分辨出来的呢?——*我不知道我是怎么分辨的*。——当它平躺的时候,画出来小人眼中的它是什么样的?——(他画出了第三个大圆。)——如果这样(向后倾斜)呢?——(像西拉一样,他把它画得更小了。)——它是同一个吗?——*不是,另一个是直立的,这个是倾斜的*。——为什么你把它画得更小了?你是有意这样做的吗?——*因为……否则你不能分辨出它是倾斜的*。”

铁路线被画成是平行的。“当你盯着它并向远处看时,它们是不是变小了

呢？——*是的……不，是变大了而不是变小了，因为在远处（地平线处）火车要掉头。*”

马斯特（6;0） 表现出了相同的反应。在每一个实验中，他都会画出一条直线或一个正圆。尽管他察觉到了不同点，但是他既不能用语言，也不能用图画表达出来。“他（玩偶）看到的是和之前相同的东西吗？——*不是，它不是，他看到的是不一样的。*”他同样把铁路线和栅栏画成平行的。

布尔（6;4） 当看到端头直对的木棍时说：“*这样我做不到，我看到了延伸了很远的一条线。*”他随即把它画成了垂直的，且为全长。

尼加（6;7） 当看到一个平躺的圆盘（看上去就像一条短线）时，他也同样说道：“*它肯定是平的。这太难了*（然后他画出了一个全圆，并做上标记），*你在纸上是做不到的。它画出来的和这个是一样的*（全视野）。”他把铁路线画成了平行的，并从样例图画中选择了一个相似的透视图。

这些过渡阶段反应的例子显示了对物体的不同方向进行区分的失败尝试，同时这证明了从没有区分的2A亚阶段到逐渐显现出区分的2B亚阶段之间的连续变化。虽然现在的努力可能是不成功的，但是在2A亚阶段表现出了很大的进步，从这一点看，他们已经为进入2B亚阶段做好了准备。

然而，在更早期更原始的水平上，儿童仅仅能够表现物体本身，或者在不顾及视角的情况下表现出物体的一部分，现在的儿童尽管仍不能描绘透视的变化，不过能够意识到他们的图画是不全面的，而且还会试图去说明这是为什么。因此，这里至少有一种对问题的意识，即把它当作一个新的物体。尽管除了这些儿童中的一部分把看到的倾斜圆盘画成一个完整的圆，并会把它画得比全视野下的圆盘更小，他们还不会试图去解决它。在整个2B阶段，这种反应都一直持续着。

至于对透视本身的意识，典型的看法是，为表现出看起来是直立的木棍，儿童认为有必要把它画成标准长度并且要从与眼平齐的水平方向来观察它，就像物体本身那样。因此，利尔会把铅笔穿过纸页，“*你应该这样做，但是我做不到*”。米斯几乎说出了相同的答案，同时他画出了全长的木棍，然后把他的画放在了与眼平齐的位置。对于从侧面看到的圆，他也是这样做的。简言之，儿童看到了物体实际的样子，在这一方面，他们仍处于2A亚阶段。另一方面，他们已经意识到了由于观察者看物体的角度所引起的问题，那么在这个程度上，他们是迈向2B亚阶段的排头兵。但是由于不能够跟着视角转换来调整他的图画，于是他们退而采取这样的策略，即把图画放置在与物体本身相似的位置上。只有在一个案例中，图画以某种方式得到了调整。在这个案例中倾斜了的圆盘被画成了一个减小了尺寸的圆形，这种反应是2B亚阶段的典型特征（这种行为同样在西拉和瑟身上得到了体现，即他们首先和之前的儿童使用相同的方法，表现出了直立的木棍）。对于其他的反应，这里只有对绘画不足的口头表达（马斯特、布尔和尼加）。

现在,让我们转向确定属于2B亚阶段的案例。我们会看到,与之前的例子相比,对不同视角进行区分的行为首次出现,或者至少儿童从呈现给他的参照图画中选择出了与特殊透视图最为相近的一个。

罗尔(5;5,发展超前的)　正确地画出了水平和垂直的木棍。对从玩偶的方位,他把看起来直立的木棍画成了水平的,而从他自己的视角看,他画成了垂直的。两幅画都画出了木棍的全长。然而,当呈现样例图画时,他选出了一个小圆来表示端头直对的木棍。"为什么是这个呢?——*因为它是一个小点,同时这里*(这个木棍)*它也是一个小点*。——以它在图画中的样子,把它摆出来。——(他正确地摆出来了)"

对于从玩偶的方位看是全视野的圆盘,罗尔画出了一个垂直的椭圆。这是现有水平上的一个进步,因为这是从他自己角度看到的圆盘的样子。尽管由于他把玩偶的位置当成了自己的,所以他的画从要求的视角来看,是错误的。从侧面看的圆盘被画成了一个水平的椭圆,同时倾斜的圆盘被表现为一个倾斜的椭圆。当这三种情境不断重复的时候,罗尔被要求画出从他自己的视角看到的圆盘的形状,他正确地做出了全视野的圆盘和倾斜的圆盘。但当要求画出从侧面看到的圆盘时,他说:"*这更加困难了*。"然后把它画成了一个水平的椭圆。同时,他立即从样例图画中选择了一条水平的线。

两旁有向远处延伸的立柱的道路没有被表现出透视效果,在路两旁的这些立柱都是平躺的(或者就像吕屈埃所使用的"旋转"①),同时全部被画成了相同的大小。铁路线被画成了平行的,同时罗尔从参照图画中选出了平行的铁路线,并把它作为正确选择,"*这是正确的,因为它是非常直的*",而认为汇聚的线"*是不正确的*"。

蒙(6;10)　垂直的铅笔,正确。"那么这样(倾斜)呢?——(画出了相同长度但是倾斜的)——这个人看到的它和之前的一样长吗,或者更短吗?——*更短了。不,有点儿更长了*(把他自己的线画得更长)。——为什么?——*我不知道*。——那么这样(更加倾斜)呢?——*他会看到它更长了*。——为什么?——*因为他看到的是这样子的*(指出了倾斜的位置)。——如果这样(正面)呢?——*他只能看到头部位置*(他画出了一个圆锥,从侧面看是铅笔的一点)。——那么这样(再次倾斜)呢?——*更长了*。——比这个(垂直)更长吗?——*是的*。"

加尔(6;10)　从玩偶视角看到的木棍:水平的和垂直的位置都正确地表示了出来。他把头朝前的木棍画成了水平的且为全长。从他自己的视角来看,他做出了相似的图画。"你用相同的方式(纵向且正面的)把它们画了出来,你也是这样观察它们的吗?——*不是*。"从样例图画中,他均作出了正确的选择。从不同视角看

① 见"英文译者注"(可展曲面)。

到的圆盘：全视野的，正确。对于水平（侧面的）的圆盘，他把它画成了一个“平躺的椭圆”。倾斜，画出另一个更小的圆。

铁路线和立柱：他把它们画成了平行的，但从样例图画中选择了汇聚的线，“*因为铁路很大*（刚开始），*然后越来越小*”。

瓦尔(7;0)　他正确地画出了垂直的木棍（从他自己的视角）。向后倾斜，他把它画成了相同的长度，然后说“*你不能把它画成向后倾斜的样子*”。水平（侧视图）的木棍被正确表示了出来。头朝前的，他把它画成了垂直的，且为全长。从样例图画中，他选择（在暗示后）了一个小圆来表示最后一个物体，但是对于向后倾斜的木棍，他说道：“*这里没有一幅这样的图*（在这些图画中，没有一个令人满意的等价物）——它是一直保持相同的长度吗？——*不是……是的，因为当它平躺着的时候，它仍然是相同的物体*。”

全视野的圆盘被正确地画了出来。至于向后倾斜的圆盘，它被画成了一个椭圆。“*它是这样的。它看起来好像不是圆的了*。”当从侧面看时，同样做出了这样的一个椭圆。“*在一张纸上，你是画不出来的*——它是怎样变得这么薄的？——*我不知道，但是它肯定是通过某种方式变成这样*（这个椭圆）*的，否则你不会看到它*。”从样例图画中，他作出了正确的选择。

对于铁路线，他画成了平行的，但是却选择了汇聚的线（在些许犹豫之后说），“*因为它是不断变小的*”。

乌拉(7;3)　正确地画出了垂直的木棍。但是对于端头直对的木棍，他把它画得更小。“*是的，更小，因为你不能很好地看到它了*。”然而他拒绝把它画成简单的圆（或者从样例图画中选择它），因为“*当它变得像这样*（平躺的）*时，你仍然可以看到这条线*”。

他正确地画出了全视野的圆盘。当圆盘向后倾斜时，他仍然把它画成圆的，但是更小了。“如果我把它放平呢？——*你会看到它是平的*（再次画出了一个圆形）。”但是当给他展示样例图画的时候，他认识到水平的线与从侧面看到的圆盘是一致的。“它们可能（是椭圆），是同一个吗？——*不是，因为这个变得更低了*。”

莱(7;4)　垂直的木棍：正确。“如果这样（直立），你能看到什么？——*什么也看不到。是的，一条很小很细的线*（画出了一条水平的全长的线，但是把它画得很模糊）。”但是样例图画中，他在实际中检验之后，选择了一个小圆。全视野的圆盘：正确，倾斜的，一个椭圆。铁路线：先画成了平行的，然后画出了有透视效果的铁路线（汇聚的）。

米克(7;7)　水平和垂直的木棍：正确，直立的，水平的且为全长。“这是相同的物体吗？——*不是*。——这里有什么不同吗？——*是的*。——那么请再次尝试把它们画出来。——（他画出了两条平行线，水平的线，第二条用来表示那个直立的木棍。）”这之后，他被要求从样例图画中选择正确的图画，但是他并没有选择那个

小圆，而是选择了水平的线，然后把它放在玩偶的面前，并用自己的手遮住了这条线的十分之九，这样就只有一端能被看到。在向后倾斜的木棍实验中，他也是这样做的，只是留出了更多未被遮盖的部分。

全视野、倾斜、向后倾斜的圆盘：在每一个实验中，他均画出了相同的正圆。"*它一直都是相同的物体，因为你不能像那样把它画出来。*"但是当向他展示样例图画后，米克指出了椭圆或者一个正圆，同时用自己的手遮住了它们一半多的大小。

对于铁路线，他画出了平行线，然后从样例图画中选出了相同的图画。但是至于栅栏立柱，他画成了平行的，而后从样例图画中选出了有透视效果的那一幅。

这种类型的案例在八九岁仍会出现，有时甚至会发生在10岁。这里就有一个这种发展迟缓儿童的例子。

戈尔(10;9) 不论木棍在什么位置，都把垂直或水平的画成了相同的长度。但是当给他展示样例图画后，同时选择了按透视法缩短的圆和小圆。圆盘也被画成了一个全圆，除了他把侧面看到的圆盘画成了一条锐利的曲线，"*因为它前面是圆的*"。从样例图画中，他选择了一个椭圆，但没有选取水平的线。

另一方面，铁路线被立刻画出了透视效果。

这些反应不仅仅体现出儿童意识到了透视问题，如同之前引用的过渡案例，这同时表明了不同视角之间真正区分的开始。有趣的是，这种新的发展首先体现在儿童对样例图画的选择，而后它表现在儿童的画中。这就好像儿童已经感觉到图画应该表现出由不同视角造成的变化，但是他们自己还不知道如何来做出这种改变。

因此，对于端头直对的或向后倾斜的木棍，他们只是画出了全长的、垂直或水平的线。但是在从事先准备的图画中选择时，他们选出了一个点或一个小圆(例如，罗尔、加尔、瓦尔，尽管他们拒绝表示倾斜木棍的正确图画)。乌拉也选出了一个小圆，因为当木棍竖立的时候"*你仍可以看到这条线*"，而米克除了线的一端，把其他部分都遮挡起来。总之，在事先准备的图画中，那些有极端透视效果的形状都被儿童接受了。

关于圆盘，当在水平位置依靠想象画出来时，它几乎总是像一个椭圆。但是当它平躺着，只有边缘可以被看到时，那么把它画出来就和画出端头直对的木棍一样，一个平躺的椭圆(罗尔、加尔和瓦尔)或一个正圆(乌拉)，尽管在样例图画中，它被立即识别为一条直线。

一般情况下，铁路线和立柱被画了出来，但是并没有透视效果，就像这些线不管距离(延伸)有多远，都是保持平行的(从2A亚阶段或过渡水平开始，直线就一直存在)，但是当给他们呈现事先准备的样例图画时，大部分的儿童(除了一部分，例如罗尔)都意识到有透视效果的图画才是正确的。

总而言之，所有这些案例最显著的特征是，儿童意识到要对物体的不同视角作出区分，但是除用一个椭圆表示圆之外，他们自己画不出或想象不出这种视角变化所引起的结果。瓦尔让我们清楚地看到了他们在这方面能力的不足。在自己做出的图画中，他用一个椭圆来表示一个向后倾斜的圆盘，并解释道："*它是这样子的，它看起来好像不是圆的，但是它一直都是圆的*。"换句话说，儿童处在倾向于表现物体的现实主义和对不同透视进行区分的开端之间。只有当他以透视的方式看到现有的图画，并从他作为观察者的活动中分离出来，因而获得一定程度像是现成表征的客观性的时候，儿童便准备好了，接受它作为特殊视角下对客体的充分且恰当的表现。

第六节　第三阶段：主观视角与客观视角之间的运算性区分——第3A亚阶段（部分的）、第3B亚阶段（完全的）透视的无意识表现

最后当我们来到第三阶段（一般来说，大约开始于7岁或8岁），发现儿童开始对他们图画中的不同视角进行区分，这种区分不再仅仅存在于对样例图画的选择。但是这种发展引起了一个令人苦恼的难题，即要对2B亚阶段、3A亚阶段和3B亚阶段进行区分和鉴定。在实际情况下，本章涉及的这一透视问题在具体运算的开始阶段还没有完全解决，但它在第三阶段的中期之前，或者在9岁以后（3B亚阶段）才得以解决。就像我们在前面的部分（第五节）中看到的那样，对不同视角的区分可以被认为是联结或"衔接"概念（2B亚阶段）水平的开始，但是在形式上它还没有得到充分协调。当问题通过直觉方法而不是通过分组或可逆的运算得以解决时，这种情况是很常见的。现在在投影领域，这些3A亚阶段特有的解决方法是由"衔接"概念与直觉观点联结在一起形成的，尽管它们是由那些在其他领域可以完成良好分组的具体运算的儿童制造出来的。基于此，一个人是怎样建立这个亚阶段的高水平和低水平的？我们对这个问题的回答使用了一个标准，即儿童发现某种转换规律的能力，这一规律让他可以把自己的图画与他选出的图画进行关联，而不能保证他可以解决由系统量化的缺乏所引起的全部问题。这里有一些3A亚阶段的例子，它开始于这一水平和2B亚阶段之间的中途。

特尔（7;4）　首先画出了垂直的木棍，然后画出了向后倾斜的。她用相同的方式把它表现了出来，然后说道："*不，现在你看它变小了*。"然后画出了一条没有之前的一半长的线。"那么当它平躺着呢？——*会变得很薄*（2—3mm长的线）。"她把倾斜的圆盘画成了一个更小的圆（2B亚阶段的典型特征），同时当圆盘倾斜更大角度的时候，它被画得非常小，尽管它仍然是一个全圆。通过对比的方法，从侧面看的圆盘被表现为一条直线。从样例图画中作出选择的方法，使儿童在看到

倾斜的圆盘时能够正确地选出椭圆(儿童画出的小圆很有可能是受到了短轴的影响)。

铁路线和立柱被表现为平行的,但是从样例图画中却选出了透视线(2B 亚阶段的另一个特征)。

杰(7;6)　把水平和垂直的木棍画成了正常的长度,同时把倾斜的木棍画成了更短、更倾斜的线。端头直对的木棍甚至被表现为了一条更短、更为倾斜的线。

全视野的圆盘被正确地画了出来。"现在画出当它向后倾斜时的样子。——*你需要做出这样的一条线*(一条从侧面视角看到的水平的线),*或者一个像这样很小的*(他画出了一条更短的线,但是随后他试图通过画出一条指向一端的曲线把它延长,来表示它的轮廓。他自己立刻开始了检查,然后说道)*不,因为它看起来像是一个圆*。——现在画出它向后倾斜一直到平躺时的样子。——(在之前的图画中已经表现过这种视角,杰说道)*我不知道要怎么做*。(他画出了一个小圆,然后像 2B 亚阶段的大部分儿童一样,他说道)*这张纸应该是这个样子的*(把它放在与眼平齐的位置)。"

开始的时候,他把铁路线正确地画了出来。"*是的,当它是一条很长的路*(向远处延伸)*时,物体逐渐变小*。"但是铁路轨道之间距离的减小不能说明一种普遍的量化,例如,这些枕木的大小并没有根据一定的规律而变小。

托(7;6)　首先画出了垂直和水平的木棍,然后画出了端头直对的。在他的主动尝试下,连续画出了从垂直到水平(包含三个倾斜位置)共五个位置的图画。它们全被画成了相同的长度,其中第一个被画得稍微弯曲。"木棍在这里弯曲了吗?——*有一点儿*。——当它是这样(端头直对的)时,你看到它是什么样子的?——*只会显得薄一些*。——那么你应该画出什么呢?——*一个小圆*。——那么在这两个位置之间呢?——*一个倾斜的圆*(现在他做出了一系列倾斜的画,开始的一些线都是长度相等的,那些逐渐倾斜变得越来越短的图画一直变化,最终变成了一个表示端头直对位置的小圆)。"

托在开始的一定距离内把铁路线画成是平行的,然后开始把它们画在一起(在透视图中)。他指着线上发生变化的地方,然后说:"*你要把它画得很小*(末端),*之后它会变大*(向上直到他指出的位置),*然后它会变成直的*(平行的)。"因此,这里不存在普遍的量化,但是在这里,存在从平行线向透视线的突然转换。

穆尔(8;3)　正确地画出了垂直的、水平的和正面的木棍,但是对于垂直和头朝前之间的位置,他画出了一系列逐渐倾斜,但是全为相同长度的线。"它是突然从那样变成一个小圆的吗?——(他画出了一条更短的线,但随后改变了主意)*不,他*(玩偶)*看到的是一个大的*(把它画得更长了)。"从样例图画中,他同样选出了倾斜的、相似长度的线。

对于向后倾斜,从侧面看到的圆盘,他画出了许多不同的椭圆,但是没有一个

具有正确的比例。

对于铁路线，他先画出了平行线，然后画出了汇聚的线。“*因为他看到它们逐渐变远。因为，他看它们越来越不清楚，它们变得更小了。*”但是路两旁的树并没有按照这一规律画得更小。

韦厄(8;6) 同样正确地画出了垂直和正面的木棍。当在“几乎正面”的位置时，他画出了“一半”长度的木棍，而在其他所有倾斜角度上，他都画出了全长的倾斜的线。“那么它是一下子变成一个小圆的吗？他是先看到平躺的，然后再看到圆的吗？——*不是，我不这样认为。*”在样例图画中，他把量的减少考虑在内。

对于圆盘，他画出了很多在尺寸上逐渐减小的圆弧，来表示倾斜位置的圆盘。对于侧面视角，他画出了一个大致的直线。从样例图画中，他正确地选出了椭圆。对于铁路线，他先画出了平行的，然后改为汇聚的线。

罗斯(8;7) 首先正确地画出了垂直的木棍。然后当它向后倾斜时，就把它画得“更小”了。“你是有意把它画得更小的吗？——*是的*(他自己不是很确定，他把它画得更长)。——那么这样(正面)呢？——*它是圆的*(画出了一个小圆，然后用铅笔的末端来检查)。*是的，当它像这样面对你的时候，你不能看到更多部分。*”对于倾斜位置，从样例图画中，他选出了更短的线，“*因为你看它们更短了*”。

对于圆盘，对于倾斜位置，他画出了椭圆；对于侧面视角，他画出了一个很薄的椭圆。他从样例图画中作出了正确的选择。

对于铁路线，开始时，他把它画成了平行的，然后突然改为了汇聚的线。枕木被画成了相等的长度，但是从某一时刻开始，它们突然被画得更小了。

对于之前的阶段，应该注意的是尽管属于2A亚阶段的儿童平均年龄已经在上面给出了，但是还有一些发展迟缓的案例，即有些儿童9岁甚至10岁还处于这个阶段。

这些反应与之前阶段所获得的那些反应有了明显不同。首先，现在儿童自己的图画表现出了由视角改变引起的透视变化。在选择样例图画时，他们接受这种变化已经不再是一个问题，这意味着透视不仅可以被察觉到，而且可以被预先画出来。

其次，现在儿童已经达到了另一个活动领域中的运算水平(就像在本章的第一部分所涉及的直线内容，在3A亚阶段被解决)，现在他可以开始以转换的连续过程为形式，想象出透视的变化。因此，我们看到特尔用越来越短的倾斜线条来表示不断倾斜的木棍，直到为了表现端头直对位置的木棍，她画出了一条长2或3mm的线。与之相似，杰按照透视法原则画出了倾斜的木棍；托并没有立刻领会透视法原则，但是不久便理解了一系列倾斜位置的含义；穆尔的情况也是一样的，也按照透视法原则画出了倾斜的线，尽管后来又回到了他最初的表现。总之，这里很明显地存在一种对支配这些变化规律的探索，同时我们面临的不再仅仅是由不完整直觉观点所构成的连接。

然而，对这个问题解决办法的探索还没有取得完全的成功，这主要是因为3A亚阶

段与其后的阶段存在差异。现阶段的儿童已经显露出了执行运算的能力,但是他们对这些基本透视问题,给出的解决方法依然是纯直觉性质的。这一现象的原因是非常有趣的,同时相对于这些问题被立即得到解决,3A亚阶段的存在让我们可以更加清晰地了解它的发展历程。尽管儿童发展出了对透视变化的意识,但是他们还没有发展出与之相适应的组织系统。这是由于连续性和真正的广泛量化的缺失,儿童的想法被局限于关注某一质的变化上(任何量的变化并没有被注意),而没有恰当地理解它们,或者没有把它们以连续的方式连接起来。

在这一点上,这个平行线的例子,即通过考虑距离因素表现出汇聚效果,是特别有启示意义的一个例子,尽管这种现象同样发生在由方位改变而引起的圆和直线形状改变的例子中。儿童已经十分明白,在透视图中铁路线不会始终保持平行,同时他们努力在自己的图画中表现出这种汇聚的效果,就像杰的案例一样。值得注意的是,他们并不认为这种汇聚是逐渐发生的,而且是几乎察觉不到的事情。他们要么满足于画出一幅表现不规则变化的图画(杰等),要么在到达某一点前使铁路线保持平行(比如,在深度上到达一半的距离时),在这以后透视图便发生了变化,这些线变得汇聚了。我们发现托在他的画中很明显地表明了这一点,就像是从平行到汇聚的过渡是突然发生的,而不是一个渐变的过程。在罗斯的案例中,他画的线就如同一支铅笔,两条平行的边突然就汇聚到了一点。在儿童画枕木、栅栏立柱和电线杆时,我们再次发现了这种没有规则的汇聚。这些设计出来的实验,是为了研究儿童是怎样考虑透视中的量化关系的。

这些例子之外,同样的能力缺陷还发生在不断倾斜的木棍或圆盘实验中,即线段长度或椭圆宽度的减小。这里我们发现,按照透视法缩短,要么是不平稳的、不规则的,要么是像特尔一样,是规则的,但是都还没有达到最终形态,即变为一个点。倾斜圆形表面宽度的量化改变显得更为困难(从圆到椭圆,再从椭圆到直线的过渡)。当大部分儿童可以画出椭圆(甚至在2B亚阶段偶尔也会发生)时,他们还不会改变它的宽度,也不会想象出到达这一过程终点时直线的样子(从侧面看到的圆盘)。例如,杰似乎用一条线来表示倾斜圆盘最终的样子,但是在实际面对侧面视角的圆盘时,他却不能找到正确的解决方法。对于这个位置,穆尔画出了一个非常薄的椭圆,但是他不能画出一条直线,也不能把椭圆按照它们正确的比例画出来。

现在理解这些困难的原因就相对容易了。就像我们已经意识到的那样,对透视的发现是对不同视角进行区分和协调的结果。换句话说,它是通过客体不再被看作它本身,同时儿童逐渐意识到客体与主体视角的关系而产生的。这种透视建构的实际贡献假定了一种"在关系中"的运算系统(简单的附加关系,通过逻辑乘法建立的关系之间的联系)。在它们被量化之前,它们必须首先被质性地建立起来。假如这些过程都完成之后,它们就会被立即应用到关键的位置,包括直立、倾斜和水平。那么倾斜的木棍(B)就会被认为比直立的木棍(A)更短,同时端头直对的木棍(C)会被认为不断缩小,最终成为一个小圆……但是这些关键透视仅仅包含了这样的内涵关系,即$A>B>C$。一旦达

到了这些关系，那么或早或晚儿童就可能会思考到，不仅很多的一系列中介关系会增加 $A>B_1>B_2>B_3\ldots>C$，而且这些差异之间存在一定规律 $A-B_1$，B_1-B_2，B_2-B_3，等等，这实际上恰恰就是外延的量化。

在栅栏立柱和铁路枕木（假设是等距的）的实验中，这种过程显得十分明显。假如 A，B，C，$D\ldots$是连续的变量，同时 A'，B'，C'是它们之间的差（$A-A'=B$，$B-B'=C$，等等），那么外延量化的减少将导致大小尺寸有规律地减小，这样它们之间的差 A'，B'，$C'\ldots$仍保持恒定，或至少保持一种恒定的关系。这正是处于这个阶段的儿童没有意识到的，因为他们把大的枕木突然画得很小。例如，这里有一些儿童把枕木画成了三种大小的尺寸，首先距离最近的枕木被画成了相同的大小（$A=B=C\ldots$），然后那些位于中间距离的枕木被画得更小，但是仍然大小相同（$F=G=H\ldots$），最后位于最远距离的枕木被画得更小，但也是大小相同（$X=Y=Z\ldots$），这样儿童就做出了一个错误的序列（$A=B=C\ldots$）>（$F=G=H\ldots$）>（$X=Y=Z\ldots$），同时在这里面 A'，B'，C'或 F'，G'，H'的差异是不存在的，唯一被意识到的差异是分割这三种情境的共同差异。

在3B亚阶段的反应中，我们不仅看到了在3A亚阶段中已经发现的对关系的一般化运算，而且还有在现有水平我们已经指出其不足的外延量化。前者让儿童可以通过与只提供给他特别例子的3A亚阶段中的内涵概念进行对比，而想象到一种连续的变换；后者让他可以定量地来解决已经变得普遍化的质性变换。

这里有一些在实际实验中的例子，开始的一些案例来自到达3B亚阶段的儿童。

哈恩（8;0）　首先画出了垂直的木棍。“如果它向后倾斜一点儿，你会怎样画它？——（一段很长时间思考之后）*你必须把它画得更小*（把它画得小了一些）。——如果我把它再倾斜一点儿呢？——*你还是必须把它画得更小*。——那么平躺着呢？——*最后，除了一个小圆点，你看不到其他任何东西*。”

圆盘被画成了全视野。“如果它倾斜一点儿呢？——*像这样*（椭圆），*因为之前你可以看到整个圆盘。现在你不能看到那么多了*。——如果它再倾斜一点儿呢？——*它会比这个*（之前的椭圆）*更小*。——那么最后呢？——*它会变成这样*（一条线）。”对样例图画的选择也发现了相似的结果。在不同的形状中，向他展示了一个平常的圆弧。“*这是不正确的。如果要画出来，你必须把它放平或者再次向下弯*（这个圆本身）。”

路被画得越来越狭窄，同时其两旁的树也按规律减小了。同样地，铁路线上的枕木也“*越来越细*”。

韦厄（9;4）　画出了一系列越来越短的线，最终变成了一个点，来表示从垂直到端头直对等一系列位置的木棍。同样地，他做出了一系列越来越薄的椭圆，它们不断变薄直至变为一条线，来表示逐渐倾斜的圆盘。铁路线也被立刻正确地画了出来，其枕木尺寸也有规律地减小了。“*因为它们变远了，所以他*（这个小人）*看到它*

们越来越细(更短)。”他继续这样画了下去,其枕木的尺寸也在不断减小,知道它最终包括了30根“枕木”。

莫茨(9;10) 一条直线:“*我看到它变得更短……更短……而且变小……*”端头直对:它现在只是一个点,“*这是线的端点,其余的部分你看不到*”。铁路和枕木的尺寸一起有规律地减小了。

拉姆(9;11) 倾斜的木棍被画成了越来越短的线。“*它更短了,因为它的一端被隐藏起来了。你看到它更短了*”。然后,“*它甚至比另一个更短了,因为你越是把它向后倾斜,就越会有更多的部分看不到。每次你看它时,它都会变得更短*”。

托尔(10;7) 在另一方面,没有把按透视法缩短的木棍与前面的遮挡了后面的事实联系在一起,而是把其与另一端点的距离联系起来了。“*这条木棒变得更短了,因为它变得更远了,就像我走得更远,或者一个你扔进山谷里面的石头。*——那么它最后会变成什么样子呢?——一个点(他画出了一系列长度不断减小的垂直的线,最终变成了一个点)。”对于铁路线,他不仅把枕木的长度画得更短了,同时它们之间的间隔也被有规律地缩小了。

维尔(11;10) 其反应是,倾斜的圆变成了越来越薄的椭圆。“那么最后呢?——*如果这个圆被这样放置,那么除了一条线,你将什么都看不到*”。对于铁路线和枕木,他画得与托尔的类似。“*铁路线逐渐向一起靠拢,但是实际上枕木之间的距离仍是相同的。*”

这时儿童的思维最终获得了一种形式。可以看到,连续的运算转换与外延量之间存在着密切的关系。

首先在这些反应中应该注意的是儿童作出解释的方式是通过把客体与主体联系起来而导致的透视的运算进行的。在3A亚阶段之前,儿童就已经发现了透视变化与方向改变之间的联系,同时会试图找出支配这些转换的规律或法则。但是他不能以运算的形式来想象它们,而只能想象到主要的透视形状。与此形成对比的是,我们发现现阶段的儿童可以无意识地掌握两种把客体与主体视角联系起来的主要关系。这就是,在深度上的射影与通过物体近的部分对更远部分的遮挡而形成的截面。总之,一旦通过“设定目标”(3A亚阶段)的方法发现了投射直线,那么前面提到的运算就会随之从3B亚阶段扩展到一般意义上的透视。

事实上,不像拓扑直线那样,即组成物体的各部分是被孤立看待的,投射直线只有当这条线的各部分与观察者从其一端观察它们(那么近的部分会被看到,且会遮挡远处的部分)相联系时才会出现。3A亚阶段之前,这种“设定目标”的联系不仅使得直线与直觉背景(第一部分)相独立,而且还可以使直线与曲线区分开,因为只有前者(即直线)可以在射影变化中保持形状不变。这是由于“设定目标”本身假定了基本的分割运算(由近处物体对远处的遮挡造成)和射影运算(当由于方向改变,其长度发生变化时,直

线的形状仍是直的，点是一个极限情况）。3B亚阶段的儿童可以应用并扩展这种运算，一直发展到他们可以获得一种关于他们知觉变化的全面的运算方式。

为什么当木棍和圆倾斜的时候，它们会变短、变狭窄呢？拉姆说，这是因为“*你越是把它向后倾斜，就会有更多的部分看不到。每次你看它，它都会变得更短*”。就像托尔说的那样，倾斜木棍上远处的部分“*变小了，因为它处于更远的位置*”，又补充说“*它就像我移动到远处一样*”（这样你就是从远处在看我），或者“*像一个被你投进山谷里的石头*”。在明确表达了这两个过程，即截面和射影，以及最终理解了支配这些透视变化的规律或法则之后，接下来这些儿童很自然地可以更进一步，并且可以表现出客体位于任一位置时的形状。由于通过转换规则提出了连续性，所以包含关键透视形状的直觉观念被质性运算替代了。

这样就很好理解，一旦质性运算（例如放入关系中和形成一致）发展起来，那么外延量化就通过对透视变化中规律的直接觉察而变成了可能。也就是说，要通过感知一种差异之间的不变关系，再加上一种要求选择一个特殊差异来作为其参考单位的独立的度量关系。例如，当哈恩和韦厄说铁路轨道之间的枕木变得“*有一点儿细*（更短）”，当维尔说“*它们靠得越来越近了*”时，同时他们也注意到“*实际上铁路轨道之间的距离一直都是不变的*”，这很明显地说明，他们已经在每根枕木和下一根枕木，或者相邻的间隔之间建立了一个固定的关系。因此，他们没有仅仅满足于质性的排序，而是对连续的差异进行了量化。有人可能要问：这种不变的关系是怎样被察觉到的？它不是通过度量过程（如同那种理论上在投射几何学中发展起来的方法）被察觉到的，而是通过图形建构的方式被察觉到的。它就是向后延伸的汇聚透视（产生了与铁路轨道相联系的枕木所表现出的不变关系，或者按照恒定比率在尺寸上不断减小的枕木之间的间隔）的建构。

总而言之，很明显能够看到，一旦通过对视角的协调而建立起拓扑联系，那么简单的射影关系就会很简单、很迅速地从拓扑联系中发展起来。投射直线本来就只是一系列连续的、有次序的点，即如果从一端来看，那么前面的点将会遮挡住后面的点。一旦这种观念以具体的形式（在3A亚阶段的那样）出现，儿童就能够想象到与物体在不同位置所呈现的不同表象相联系的透视变化。尽管现在从一个复杂的相互联系的视角来看，这仅仅是对之前列举的拓扑关系的一种分类；然而，一旦这三种拓扑维度[①]和包围与一个特定的视角联系起来时，它们便获得了一个新的意义。

例如，让我们从一个给定的位置来观察物体。在它的左边和右边分别有一个物体，同时从主体的视角来看，它位于它们“之间”（然而，从拓扑学的立场来看，左边和右边在保持一条孤立线条的方向方面是没有意义的）。同时，这里有在它上面和下面的其他物体，即这表现了第二个维度，即高度。最后，这里可能有在它前面或后面的物体（把它与主体的视角相联系），这是表现了第三个维度，即深度。因此，这种“之间”关系（一维

① “三种拓扑维度”指左右、上下、前后。——译者注

的)，两维和三维关系通过它们与单一视角(单一视角是定义日常概念即左和右的必要条件，自康德之后，就已经被发现)相协调的优点使其获得了更高的意义。最后，如果一条孤立的直线构成了一个单一维度，那么一束或一捆线就构成了(依照刚列举的关系)一个投影平面或者一个三维空间，在它们之间，就有能力提出例如射影或截面等许多不同的新型关系。

对于透视或者截面，儿童可以想象到一条线或一个圆的透视变化，同时可以把它们分解为精确表述这种视角协调的运算。当这些新关系出现后，即左和右、上和下、前和后，他也完全有能力这样做。一条垂直的直线，当向后倾斜时，它被表现为在长度上不断减小，因为儿童意识到与自己的视角相联系，在高度上减小的部分获得了更大的深度。另外，他意识到这一过程是不断并细微地向极限位置发展的，在极限位置，这条线变为了一个点，因为在最终分析中，从他的视角看到的原来全部高度，现在已经处于深度之中。

总而言之，就像直线让我们理解了投影一样，透视空间的三个维度让我们明白了与一个平面相交的一束线的观点，因此所有射影和截面的基本运算已经变得足够熟悉，以至于可以使儿童给出如之前例子中的解释。但是直线本身的概念，与由它和原始拓扑关系的综合造成的不同关系一起，最终引起了对视角所起作用的发现，那就是，它们是协调与分化的结合。

要怎样解释这种发现呢？把射影几何的起源和发展归因于视知觉的影响，就像恩里克斯(Enriques)做的那样[①]，他忽略了一个事实，即单纯的感知觉视角总是以自我为中心的。这意味着，它既是对自身的无意识，也是不完整的，即把现实曲解为了它保持的这种程度。与此形成对比的是，要发现自己的视角就要把它与其他人的视角相联系，而把它从其中区分出来，并与之相协调。现在感知觉对于这一任务来说显得非常不适宜，因为要意识到一个人自己的视角就是要让自己从它之中解放出来。要做到这些便需要有一个正确的心理运算系统，即既是可逆的，同时又有能力使其保持相互联系的运算。

因此，从这个意义上说，直到第三阶段的中期之前，透视还没有被组织起来就显得不足为奇了。然而，在儿童降生的第一年，它们就已经和视觉恒常性一起被掌握了。单独的这一事实让我们意识到之前所做的研究，仅仅解决了一个观察者从一系列连续位置观察单一物体时的透视现象，还不能够为一般的透视问题提供一个满意的解决方法。

假如事情就是如此，即视角所起作用的发现实际上是以它们彼此协调为先决条件的，那么我们必不可少地要来研究这一过程，即检验与很多观察者和一组相互联系客体有关的透视现象，这是我们在第八章将要努力研究的问题。但是在着手进行这个课题之前，我们必须首先关注射影这一问题，这是为了检验我们关于直线在这组概念发展过程中所起作用的假设的正确性。

---

① Enriques, F., *Problemi della Scienza*, Bologna, 1926.

第七章　影子的投射[1]

在上一章中，我们说明了，在一个特殊视角下，物体是怎样被想象的，以及这一视角的引入是如何有助于把拓扑关系转换为射影关系的。同时我们看到，只要知觉仍被自我中心支配，透视在概念水平上出现很迟缓的原因是，视角的相对性假设，即它们之间可以被相互区分，并且这需要一种与自我中心相反的态度。

自我中心的态度无法帮助主体来区分他自己的视角与他人的视角，自我中心的态度倾向于鼓励毫无疑问地把它当作是唯一的可能。结果是儿童把他们自己想象为完全置身于客体的视角之中，最后他把它变为了一种“虚假-绝对”。实际上，区分不同视角不仅要摆脱这个最初的自我中心，而且需要视角的协调，这种协调是通过对构成三维空间的关系进行分组来实现的。这是一个运算概念，直到具体运算水平，即大约7或8岁才能被儿童掌握。

现在为了验证这一假设，没有比研究儿童怎样画出和形象化影子投射更好的方法了。影子投射很明显与垂直于某一条线的平面上物体的投射遵循着相同规则，同时它被与透视相同的规则所支配。但是因为透视取决于客体与主体的相对位置，同时因为影子投射包含着至少两个客体的相对位置（投射的影子以及影子被投射到的物质平面，而没有考虑影响整体投射的光源），那么从心理学视角来看，人们可能认为儿童会发现影子投射会比透视更难以理解。

理解中的更大困难，不出意料是这一假设，即透视只通过知觉而被发现，因为儿童可以直接地发现透视（这种想象被简单地看作是知觉的扩大和连续），然而对于影子的理解仍需要许多基本解释。

为了证实我们的假设，根据透视想象需要对不同可能视角进行协调和区分这一理论基础，因此我们认为投影关系的运算性分组也应该是这样的，即影子投射与和相同客体相关的视角转换一样，大致在相同的发展阶段上被儿童理解和掌握。同时，实际上这就是我们要在本章中求证的内容。

然而，在处理涉及影子的问题时，我们必须区分以下两个问题，这两个问题可能会相互联系，但也可能相互独立。第一个问题与对影子物理起因的理解有关；第二个与他们通过它们与什么形状物体相似来假定物体形状的方法，做出形状预测的能力有关。我们已经做了一个关于儿童给出有关影子物理解释（成因）的研究[2]，在这个研究中可以

① 与Mille G. Ascoli合作完成。

② *The Child's Conception of Physical Causality*, Chapter VIII, London, 1930.

区分出四个不同的发展水平:(1)位于在桌子上的物体影子,被认为来自于一些外部事物(例如黑夜或者树的阴影等);(2)影子与光源无关,而属于物体;(3)影子属于物体,但是可以摆脱物体(就像以某种方式被光线“赶跑”);(4)影子只是简单的光线消失,同时它的出现归因于物体,即物体在光源和投射平面之间建立了一个屏幕。

因此,这似乎意味着为了达到影子几何形状实验研究的目的,只有属于第三阶段和第四阶段的儿童才是合适的研究对象。然而,在下面的实验中,影子是通过儿童可以看到的灯被投射在附近垂直的屏幕上的。他们有足够多的机会来弄清关于影子本质的看法,同时也可以从这种经验(它们不仅依赖于物体的形状,而且与物体和光源的相对位置有关)中受益。同时,根据现有实验结果,没有理由(或不能解释)说明为什么处于第一阶段和第二阶段的儿童仍不能把影子外观的改变归因于物体位置的变化。至少,这里没有什么可以阻碍他们这么做。如果只研究儿童对他面临的环境所做出反应的强度,那么这似乎完全是为了研究影子的几何问题,而这与它的起因问题无关。

第一节　方法和一般结果

不同的物体被安装在细的铁支架上,并放置在灯和一个垂直白色屏幕之间,三个部分之间被留出一定间隔(以厘米计)。实验者简单地要求儿童画出他们认为的影子形状,或者从一组样例图画中选出一个形状。下面的物体被轮流呈现出来:(1)一个圆锥,直立的或倒立的,儿童感知到它的影子与其形状是完全相同的。(2)两个圆锥点对点地组合在一起而形成的绕线筒或线轴,其垂直呈现时也会产生相同的影子。(3)直对着光源的简单圆锥,顶点和底部对着屏幕时,会投射出圆形的影子。(4)一个在相同位置的圆锥,其纵轴上有一个洞,那么影子会是一个环形。(5)绕线筒(2)端头朝前放置时,会产生一个圆形的影子。(6)一个纸板圆盘被垂直和水平放置时,会产生圆形或直线形状的影子。(7)在相同位置的[①]一个长方形纸板。(8)一个垂直放置的铅笔会产生一个相同形状的影子,然后把它端头朝前,那么它会逐渐缩小,最终变成一个小圆。另外,相同的物体,特别是圆锥、圆盘、长方形和铅笔,会被呈现在不同的倾斜位置,因此其影子要么是椭圆,要么是按透视法缩短的直线。

一方面对于透视,物体(6)和(8)所产生的形状很明显地在第六章中已经研究过。长方形在这里是唯一的特色(与之前不同)。另一方面,包含一个或两个有或没有洞的圆锥的形状(1)到(5)通过具有的不同横截面而得以区分。因为,依据面对屏幕的端点不同,影子也会不同,所以预测它们的射影形状变得更加困难。

---

① 与(6)相同,会被垂直和水平放置。——译者注

对于这些简单的形状(那些有不变横截面的),除了端头直对的铅笔以一个小圆影子投射的方式比普通透视更为容易想象之外,我们发现了与透视相同的四个阶段。在2A亚阶段(直到6岁或6岁零6个月),儿童画出的影子形状与从他所站位置看到的物体形状类似(无透视)。在2B亚阶段,他开始对不同的射影进行区分。尽管还没有涉及倾斜位置,垂直和水平位置的形状开始与简单形状(铅笔、圆盘和长方形)变得不同。同时,水平位置的形状至今为止并不能总是被儿童正确地画出。然而,在第三阶段对于简单的形状,儿童已经发现了正确的解决方法。这一发现分为两个阶段。首先,3A亚阶段,形状之间已经能够得到区分,但是还缺乏量化;在第二个阶段,即3B亚阶段,量化不仅被应用在了倾斜位置,而且还应用在了极限位置。直到第四阶段,这些解决方法才被应用到圆锥形状上。这将需要一些额外的运算来解释,这些运算需要在想象中预见不同的且可能的横截面。

第二节 直线的射影

首先,我们将会研究由铅笔投射的影子。这将与第六章中有关直线投影和在透视中看到的直线进行初步的对比。

现在在这一点上,我们不仅发现了在透视方面,与影子相同的发展阶段,而且通过询问15名儿童(除了那些参加了影子实验的儿童),发现影子和透视有着相同的发展阶段。在这一方面,我们发现的唯一例外是,当他们把它看作影子,在要求画出其透视效果的情况下,把它画成一条完整长度的线的时候,有一些儿童能够把“端头直对”的铅笔画成一个小圆。除了这一微小差异(一个有利于影子投射产生的差异)外,这些阶段对于所有活动来说都是完全相同的。

这里刚开始是一些来自2A亚阶段的案例。在这一水平上,儿童只能把影子表现为从他所在位置所能看到的物体的样子。

布伊(5;10) “如果我把这个铅笔这样竖直放置(垂直),会怎么样呢?——*它是某种尖的东西*(画出了一个竖直的铅笔)。——现在请仔细看,并且判断这样是否是正确的(开启了电灯)。——*是的*。——那么如果我把铅笔倾斜(向屏幕)呢?——(他画出了他看到的从左向右倾斜的铅笔。)——请看这个影子。——*现在你几乎看不到任何东西了*。——那么假使我把它放平,会怎样呢?——(他再一次画出了他看到的样子,即一个水平的铅笔。)——现在请只注视着影子。——*我不知道那形成的是什么,它似乎是形成了一个小圆*。”因此,他还不理解影子本身的形状。

帕乌(6;9) 类似的反应:“那么如果我像这样把它倾斜(一头对着屏幕)

呢？——(他画出了一条水平的线。)——看。——*一个圆！那么我画得是错的。*——你很惊讶吗？——*是的，我很惊讶！*——它为什么变成了一个圆？——……——那么这样(向屏幕倾斜)呢？——(他画出了一条完整长度的且从左向右倾斜的线。)”

因此，在这一水平上，儿童对于影子投射的形状还完全缺乏了解。在这一方面，2A亚阶段是第一阶段的简单延续，尽管那些更早的阶段还不能被研究，因为在那些水平上儿童还未掌握必要的绘画技能。不管儿童对影子如何形成的解释是什么，他仅仅把它作为是对物体的简单复制，而不考虑物体的位置。就像他把物体本身画成了孤立的事物一样，不考虑视角，而只是指出了其大致的方向。因此，他把影子描绘得与物体的形状相似，而没有考虑到视角。

接下来是2B亚阶段，我们发现儿童开始对不同的射影进行区分。像之前一样，倾斜的铅笔被画成了倾斜的，但是偶尔它会被画得比垂直的时候更长。“端头直对”位置的铅笔有时会被画成一个点，或者一个小圆。

弗朗(6;8)　垂直的：正确。“假使我把它倾斜，那么它的影子会怎么样呢？它会变大还是变小呢？——*更大，因为它是倾斜的。*——这样为什么会使它变大呢？——*因为，它不是直的了。*——如果这样(端头直对)呢？——(画出了水平的，并且为完整长度)——这是正确的吗(还未打开灯)？——*不是，它会变成一个小圆。*”

莱佩(7;2)　“假如我把这根铅笔竖直放置呢？——*它就会像一根铅笔一样*(把它画成垂直的)。——那么如果我们把它放平呢？——*可能是一个圆，或者一个点*(他从侧面画出了一个点)。——看。——*它是一个圆。*——为什么？——因为这里有一个圆(他指着其中一端)，同时这里有一个端点(指着另一端)。——那么你为什么没有看到一个点呢？——……——假如我把它向上抬起一半的高度呢？——*它会变成这样*(垂直的并与之前相同的长度)。——与之前的一样吗？——*不一样，它变得稍微向一侧倾斜。*——那么如果我把它向另一侧倾斜呢(总是向屏幕或者光源倾斜)？——*它会向另一侧倾斜*(他把它画得向右侧倾斜，而不是向左侧，但是仍然画出了完整的长度)。”

沙尔(7;8)　“假设我们把铅笔这样放置(垂直)。——*它会变成一条线*——如果把它放平呢(端头对着屏幕)？——*它会变为一个点*(他画出了这样的一个点，与铅笔的厚度相当，但又不是一个圆)。——如果我们把它再次竖立起来，然后使它稍微倾斜(朝向屏幕)？——*它会变得有点儿倾斜*(画出了相同长度并且从左向右倾斜)。——看。——*噢，它变得越来越小了！*——为什么？——……”

这些儿童，像在相应亚阶段的透视实验中被研究的儿童一样，显示出了对不同视角

进行初步区分的确切迹象，只是在这里，它是一个把客体位置与在屏幕上它投射的影子之间进行联系的问题。在这一点上，我们又一次发现了某些儿童表达的这一观点，即由于物体的倾斜，物体会变得更长，尽管会出现估量方面的失误，但这相当于儿童可以从倾斜位置中区分出垂直的位置。此外，这一事实，即这种类型错误在这里的再次出现表明了，迄今为止视角和射影还没有被涉及。这很有可能是因为儿童感觉到，如果绝对高度保持不变，那么一个倾斜的物体必然会比一个垂直的物体更长，也就是说，就像正方形的对角线与边关系一样。为了表示一个端头直对放置的铅笔，儿童会画出一个点或圆，这一事实毫无疑问可以做如下解释：直视一个物体总是可以比只关注物体的末端，看到更多的部分（截面图在很大程度上是抽象的），一旦儿童认为影子可以根据铅笔位置的变化而变化，那么他就会认为影子只来自于末端，特别是来自朝向屏幕的那一端。因此，他要么画出了铅笔的圆形底部，要么画出了它的尖端，而不是依据与透视类似的法则形成的投射影子，但是可以从铅笔中以某种方式把它区分出来。有时，他们所画的点是从侧面看到的，而不是从正面看到的，但是即使儿童画出了从正面看到的点，它所表现的也是一端朝向屏幕的铅笔的延伸，而不是它实际的投影。

最后，应该注意的是，在2A亚阶段中存在的错误将一直持续到2B亚阶段，也就是说，向屏幕倾斜的物体将被画成是从左向右倾斜的（或者相反），这是因为儿童认为光-物体-屏幕这条轴与自己的视线是相同的，这样从他自己视角看到的便代替了射影。

从第三阶段开始，恰当地对射影现象进行探讨才成了可能。这与在视角发展的相似阶段看到的区分的开端是一致的。同时，在3A亚阶段，儿童才开始学会区分，因为他的视角仍然是混乱的（例如，把它们从左向右放置而不是从前向后），而且在量化方面（考虑到倾斜的立柱，而表现出按透视法缩短的大小），遇到了一系列的难题。

这里有三个案例，其中第一个案例中的儿童正处于2B亚阶段和3A亚阶段的中间水平。

格夫（8;9） 垂直的铅笔："*它是一支铅笔*。——如果我们把它放平呢？——*它将会变成一个小圆*。——如果我们把它再次竖立起来，然后把它稍微倾斜（朝向屏幕）呢？——*它会变得有一点儿倾斜*（把它画成了完整的长度，且为从左向右倾斜）。——如果我把它变得更加倾斜呢？——*它会变得更加倾斜*（仍然把它画成完整的长度）。——如果更加倾斜（现在它变成水平的）呢？——*它会变成一个小圆*。——什么，是突然之间（变成小圆的）吗？——*是的*。——*你看到它变得越来越低，并最终变成了一个小圆吗*？——*是的，当它一直向下倾斜的时候*。——看（把灯打开）。——*它变得更小了*。——如果我们再次把它竖立起来呢？——*它变得越来越大*。——为什么？——*当它向下倾斜并变低的时候，它的影子会变小*。——那么它是一下子变成一个圆的吗？——*不是*。"

杜马（7;8） 画出了一支直立的铅笔。"如果我把它放平呢？——*它会变成一个小黑点*。——如果我们把它再次竖立起来，然后把它稍微倾斜呢？——*它会变

成一个*稍微倾斜的铅笔*(把它画成了一个从左向右倾斜的,并且稍短的铅笔)。——如果我把它变得更加倾斜呢?——*它会变得更斜*(把它画成与之前相同的长度)。——它一直是相同的长度吗?——*不是*。——如果把它变得更加倾斜呢?——*它会变成一个小点*。"

特朗(8;1)　表现出了相同的反应,他画出的影子长度是减少的,但是并没有按照一个有规律的方式进行透视法的缩减,同时仍是从左向右倾斜的。"当它倾斜的时候,它是什么样子的?它是相同的大小吗,或者变得更大或更小?——*更小*。——为什么?——*因为,它变得倾斜了*。——那么,它是什么样的呢?——*你会看到它变得更短了*(和影子一样,不是直接的)。"

这里表现出了量化的开端,尽管当它与对投影的一般理解相联系的时候,这一过程还只达到了均衡的状态,换句话说,这一理解即是对屏幕与独立于儿童视角的被照亮物体之间关系的理解。这里有一些反映了3B亚阶段典型反应的案例。

亚奇(7;10)　"假如我把铅笔倾斜,它的影子会变成什么样?——*有点儿短*(他把它画成直立的,并按照透视法缩短)。——如果把它变得更加倾斜呢?——*最后这里将没有任何影子留下来*(他画出了一系列越来越短的线条,然后是一个小圆。这样一来'没有影子',也就是说,直的)。"

哈恩(8;6)　"如果我把这个铅笔直立呢?——*它会变成一根木棒*(把它画成直的)。——如果这样(水平)呢?——*你将看不到长的部分,而只能看到它的端点*(他画出了一个圆)。——如果把它变得倾斜一半呢?——*你会看到一半铅笔*(把它画成直立的,并且按透视法缩短了一半长度)。——你能解释这是为什么吗?——*你看不到铅笔的下半部分了*(向光源倾斜的上半部分遮挡住了它的下半部分)。——那么在这儿和那个圆之间呢?——*你会看到铅笔变得越来越小*。"

马克斯(8;9)　"当它被放平呢?——*一个圆*。——如果倾斜一半呢?——*这个铅笔会变得更小*(把它画成直立的)。——为什么?——*这个铅笔变得倾斜了,所以你不能看到它的全部*。——为什么看不到呢?——*因为在屏幕上,它没有那么长了*(他指出了顶部到底部的距离)。"

在这些儿童中,我们看到了阶段的序列与透视发展的相应水平之间有着惊人的平行性,若考虑到这些儿童均未参与透视实验,那么这就会更有说服力。我们不仅发现了一系列已经被理解的按透视法缩短的实际法则,而且就像第六章3B亚阶段中表现的那样。我们同时发现,由于截断而形成的变形也得到了正确的解释。更加值得注意的是,在现有条件下,不是从观察者的视角,而是与灯和屏幕之间的轴相关,物体的一部分遮挡了其他部分。

第三节　圆盘的射影

就像在透视研究部分中所阐述的那样，直到儿童在不改变直线形状的情况下(因为在刚开始的时候，他不会去改变任何物体，因为他还根本不理解什么是改变)，开始在他的图画中对曲线做出调整时，我们才可以假定当视角发生变化时，儿童能够理解只有直线可以保持其形状不变。这意味着，从直线射影中得到的结果现在必须与儿童对圆盘射影的反应进行比较。然而，我们会看到对影子的描画恰好与透视图画的发展遵循着相同的路径。

在2A亚阶段，在不考虑物体位置与灯或屏幕的联系时，圆盘的影子总是被想象为圆形(这种情况贯穿整个阶段一)。

利斯(5;6)　平行于屏幕的直立的圆盘："它会*是圆的*(画出了一个圆形)。——如果我把它放平呢？——(他画出了另外一个圆。)——看(灯被打开)。——*噢，一个盘子！*——它为什么是这样的？——*我不知道*。——如果它像这样倾斜一半(向屏幕倾斜)呢？——……——它会变成一个车轮呢，还是一个鸡蛋？——*一个车轮*。"

莱夫(6;6)　直立的圆盘："它会是*一个圆*。——如果我把它放平呢？——*仍是一个圆*——与之前的相同吗？——*是的*。——看。——……——你看到了什么？——*一个圆*(实际上除了一个可以明显看到的直线之外，什么都没有)。——它看起来像是一个圆吗？——*不像*。——如果我把它倾斜一半呢？——它会变成*一个倾斜的圆*(他画出了一个完整的圆)。"

但是，不久儿童就能预见到，当圆盘倾斜或水平时，其产生的影子会与直立时候的不同。因此，在2B亚阶段，我们发现了一些儿童进行区分的尝试，而这种行为与在第六章中讨论到的2A亚阶段和2B亚阶段之间相应水平上所表现出的行为相似。在这一水平上，倾斜的圆盘要么被画成一个完整的圆被表现出来，要么被表现为一个残缺的圆弧。

韦伯(6;6)　"如果我把这个圆直立起来呢？——它会变成*一个圆*(他画出了它)。——如果我把它放平呢？——*像这样*(他画出了一只杯子)。——看(灯被打开)。——*不，它就像是一条线*。——如果我在其他两个之间，把它倾斜一半呢？——(他从另外一条线结尾的地方，画出了一条倾斜的线，更短，像是一个鱼钩)——看(影子)。——*一个鸡蛋*。"

索尔(6;8)　"它会变成*一个圆*(直立的)——如果把它放平呢？——它会变成

一个*圆*。不是,你只能看到它的边缘(画出了一个圆弧)。——*看*。——*这是对的*(只能看到一条线)。——如果把它倾斜一半呢? ——*还是一样的*(他再次画出了一个圆弧,但变成了另外的方向)。”

马尔(7;4) 对于直立的圆盘,他同样画出了一个圆,但是对于水平位置,他画出了一个杯子,倾斜的位置则为一个圆弧。

莱佩(7;2) 尽管仍表现出之前描述过的反应,但他身上体现出了3A亚阶段的一些特征。“*一个圆*(直立的)。——如果把它放平呢? ——*它会变成一条短的直线*(尽管他画出了一个圆弧)。——如果这样(倾斜)呢? ——*一个倾斜的圆*(画出了一个不规则的大致的椭圆)。”

与此形成对比的是,在3A亚阶段,儿童发现了水平和垂直位置之间是有明显区别的,尽管对于倾斜位置还没有一种一致的量化。

布鲁(6;11) “*它会成为一个标准的圆*(直立的)。——如果放平呢? ——*非常非常细*(他画出了一条水平的线)。——为什么在这个影子上,你没有看到一个圆? ——*因为它是完全平的*。——如果这样(倾斜的)呢? ——(他画出了一条倾斜的线)——看(影子)。——*它像是一个鸡蛋*。”

对于水平圆盘的影子,唐(7;2)和韦厄(7;6)均画出了一条水平的线,但是他们说道“*它变成了一个半圆*”,然后画出了一个半圆来表示倾斜的圆盘。

谢尔(7;8) “*它会变成一个圆*。——如果它被放平呢? ——*它会变成一条很细的线*(水平的)。——如果倾斜呢? ——*它会变成一个倾斜的圆*(他大致把它画成了一个椭圆)。——如果这样(倾斜程度变小)呢? ——*一个圆*。”

最后,大约在8—9岁(3B亚阶段)这个问题得到了解决,同时倾斜位置(的影子)被正确地表达出来。

杜马(7;8) “*你会看到一个大圆*。——如果放平呢? ——*只是一条线*。——那这两者之间呢? ——(画出了一个椭圆。)——如果变得更加倾斜呢? ——(他把椭圆的下半部画得更加扁平。)*上面部分是圆的而下面部分没有那么圆,因为如果你把它放低,它会变得越来越小,越来越平*。”

马伊(8;2) “*一个圆*。——如果把它放平呢? ——*一条线*。——这两者之间呢? ——*它会是倾斜的*(首先是有倾斜轴的椭圆,然后是垂直轴的椭圆)。”

乍(8;7) “*你会看到一个圆*。——如果放平呢? ——*一个更扁平的圆,不,一条线*。——在这两者之间呢? ——*它会变得有些倾斜*(通过逐步把椭圆变得扁平,他在一个圆和一条直线之间画出了五幅图)。”

马尔(8;9) *“首先你会看到一个圆,然后是一条线,在这两者之间,是一个椭圆”。*

这里没有必要对这些回答和与透视问题相关的相应回答之间的确切类比,进行深入的思考。唯一的不同在于,在影子实验中,椭圆比倾斜的圆出现得稍晚;此外,这里仍存在儿童视角与射影轴(比如马伊)之间的短暂混乱。除了这些次要的细节之外,从最初区分的不足到最终区分的完成,这个发展路径是相同的。

第四节 长方形的射影

现在我们将围绕儿童对长方形投影形状的预见能力进行一个简短快速的研究。与之前把物体放在灯前不同,这一次我们把一张硬纸板直接放在它的下面,这样影子可以垂直地投射在水平的屏幕上。这样投影平面就完全从观察者的视角中分离出来。那么,这里的问题涉及了水平位置(类似于长方形)、垂直位置(直线)和中间角度位置(宽度减小的长方形)。

这种方法上的改变(作为一种再确认)得出了与之前相同的四个阶段。因此,在2A亚阶段,长方形是保持不变的。

埃利(6;0) “如果我把这张纸放在灯下面(水平),它的影子会是什么样的呢?——(他画出了一个长方形。)——如果现在我把它像这样倾斜,它的影子会是什么样的呢?——*是一样的*。——如果我把它侧立起来呢,这里仍会是这个影子吗?——*是的,我也这样认为*。——把它画出来。——(他再次画出了一个相同的长方形。)——看(灯被打开)。——*噢!它变得是如此小!*”

与前所述,尽管在2B亚阶段儿童仍然不能正确地描述侧立位置(的影子),但这里开始有了区分。

拉尔(5;11) 水平:正确地复制出形状。“如果这样(倾斜)呢?这样仍可以产生一个影子吗?——*是的*。——是更大,更小还是相同的大小呢?——*更小*(他画出了类似的形状,但是更小的长方形)。——如果这样(侧立)呢?——*更小*(他画出了一个非常狭窄的长方形,但是同时把它缩短了近乎一半,这样它既缩短了宽度,同时又缩小了尺寸)。——为什么它看起来是这样的呢?——……”

纳德(6;3) 倾斜位置:“*它可能会变得有点儿短*。——为什么?——*因为它变得更高了*(他弄错了缩短的边,把硬纸板拿到了他的图画旁边,然后把它的边改为了正确的长度)。”侧立位置:尽管没有成功地画出一条简单的线,他保持了恒定的长度,而只缩短了宽度。

在3A亚阶段,儿童能够掌握极限位置的影子投射。

法达(6;10) 侧立位置:“*它会变成一个正方形,不,一条线,因为它是像这样的*(指着它的边缘)。”倾斜位置:长度和缩短的宽度都被正确地表现出来。

莫格(7;8) 倾斜位置:他首先画出了相同尺寸的长方形,但是在某一倾斜轴上“*它会是倾斜的*”,然后,他把它画得更加狭窄。侧立位置:“*它变得更小了*(他画出了一条简单的线)。”

最后,3B亚阶段的反应表现出了正确的量化和对射影的解释。

米尔(7;10) “如果这个硬纸板是倾斜的呢?——*影子会变得越来越小*(画出了正确的长度,同时其宽度在不断减小)。——为什么?——*因为当硬纸板倾斜的时候,它会变得更细(更为狭窄),因此光线有了更多可以穿过的空间*。”

雷(8;2) 对于倾斜位置做出了相同的回答:“*当你抬高硬纸板的时候,因为它不会阻挡那么多的光线,所以它的影子会变得更短*。”

尽管相对于之前的物体,这些物体所放置的位置与儿童自己的视角相距更远,但关于长方形投射影子问题的答案与那些在第二节和第三节中所获得的十分相似。因此对于所有简单物体,直线木棍、圆盘和长方形,大约8或9岁的儿童似乎都可以画出并想象出这些射影,同时这与透视的结构是非常一致的。

虽然已经确定了这些阶段的分界,但是我们还不能做出这样假设,即更为复杂形状的射影也会在相同的年龄水平被儿童掌握。这些内容将在一个或两个圆锥体的实验中看到,事实将会给我们答案。

第五节 圆锥体的射影

在儿童有能力想象出如前描述到的简单形状投射的影子,和他们可以解决更为复杂物体(例如一个或两个圆锥体,固体或沿着某个轴线穿过)所投射的影子之间,存在着一个很明显的时间间隔。同时我们也不难发现事实为什么是这样的。

首先,圆锥体上平行于底面的横切面是一系列直径不断变化的圆,在大部分时间里,儿童试图根据朝向电灯的是圆锥体的底部还是其顶点来区分不同的影子。其次,当其倾斜时,圆锥体有时会投射出一些不规则的影子,这会使儿童难以对它进行心理建构。结果是,这些影子的投射直到第四阶段才被儿童掌握。这里有一些属于第二阶段

(包括2A亚阶段和2B亚阶段)儿童的例子。

利斯(5;6) “如果我把我的手指放在这个小的白色墙面附近,它会变成什么呢?——*一幅画*。——如果我把这个小东西(一个圆锥)代替我的手指,放在这里呢?——*它会变成这样的一幅画*(画出了一个三角形)。——如果我像这样摆放(圆锥的顶端朝向灯)呢?——(从他的视角来看,他画出了一个正方形来表示平放的圆锥体。)——看(灯被打开)。——*一个圆*。——如果这样(圆锥的顶端再次朝向灯)呢?——(他画出了一个锐角三角形。)——看(灯再次被打开)。——*它会是一个圆*。”

“那么这样(底部相对的两个圆锥。)呢?——(他画出了两个点。)——如果平放呢?——(相同的画,但是水平的。)——*看*。——*一个圆*!——为什么?——*不知道*。——那么这个(一个被穿孔的圆锥,其顶端朝向灯)呢?现在看一下它变成什么了(产生的影子)?——*它变成了一个小圆,同时这里你可以看到一个孔*。——如果我这样(底部朝向灯)把它翻转一下呢?——*它会变成一个大圆,同时还有一个小孔*(他一步一步地把它们画了出来)。——但是这个大圆是在一边,那个小圆在另一边吗?——*是的*!”

尚(6;8) 垂直的圆锥:画出了一个三角形。平放(底部对着灯光):他画出了一个底部为一个完整的圆,顶点垂直在上面的圆锥。“看,判断它是否是正确的(影子)。——*不是,它是一个圆*!——为什么?——*不知道*。——如果我把它像这样翻转呢(圆锥的顶端对着灯光)?——*它会变成一个点*(垂直地画)。——为什么?——*因为它是尖的*。——看(影子),它是对的吗?——*不是,它是一个圆*。——和之前的一样吗?——*是的*。——为什么?——*不知道*。——那么这个呢(底部相对的两个圆锥)?——(画出了一个菱形。)——如果把它放平呢?——*它会变成尖的*。——当我把这个圆锥的顶点对着灯光,它会变成什么样呢?——*一个圆*。——*那么这个*(两个圆锥)对着灯光呢?——*它会是一个尖的东西*。——看(影子)。——*一个圆*!——为什么?——*我不知道*。——现在如果我把这个东西(顶端相对的两个圆锥)放在这儿,像这样很直,它会变成什么样(垂直)?——*一个圆*。——(因此他并没有理解,同时只是通过简单地重复来预测出圆形。)——看(影子)。——*不*(他把它画了出来)。——如果我把这个东西穿个孔(穿孔的圆锥),然后像这样平放(圆锥顶端对着灯光)呢?——*它会变成一个点*。——看。——*噢,不!它变成了有一个小孔的圆*。”

芬(7;0) 平放的圆锥:把影子画成了一个水平的三角形。“看。——*噢!一个圆*。——如果顶点对着灯光呢?——(画出了一个顶点朝下的锐角。)——看。——*另外一个圆*。——那这个(水平放置的,底部相对的两个圆锥)呢?——*它会是尖的,因为它本身就是尖的*。——看。——*噢,另外一个圆*!——这个(水平的,顶点相对的两个圆锥)呢?——*它会变成一个小圆,因为这个*(他指着狭窄的腰

部)。——看。——*噢,不,它一点儿也没有变小!*——有一个孔的圆锥(穿孔的圆锥,水平放置且其顶端对着灯光)呢?——*在后面它会变成一个小圆*(画出了一个顶部为一个点的圆)。——如果我把它倾斜呢?——*这个小孔会变得更大*(更高)。”

这些反应的基本特征是很明显的。首先,影子被看作是从儿童视角看到的物体的简单复制。其次,尽管为了能够与他的预测形成对比,已经要求儿童在每次影子出现的时候,让其注视着影子,然而儿童还是不能够利用这些信息。他很清楚地看到水平的且底部对着电灯的圆锥体投射出了一个圆,但是还是不能得出这一明显的结论,即当它另一端(顶点)对着电灯时,它仍会投射出一个圆。甚至当他亲眼看到这个发生时,他还是不能推断出两个圆锥会得到相同的结果。虽然已经看到了这些,他仍不能得出,对于后面的两个圆锥,或其他将会发生什么的任何结论。

它会一直保持这种简单的状态是由于他还不理解影子的原理造成的吗?这样的观点对于处在2A亚阶段,对铅笔和圆盘做出相同反应的儿童来说,是站不住脚的。处于2B亚阶段的儿童(芬和尚),尽管还不能预测圆锥物体的影子,但当铅笔和圆盘为水平时,可以预见其影子形状的改变。因此实际上,困惑着儿童的几何形状与实际产生影子的不确定性是相分离的。他们还不能够从灯光和屏幕相联系的视角来对物体展开想象。在这一点上,从第三阶段得到的回答是非常具有启发意义的。

这里有一些案例,这些案例开始于3A亚阶段的儿童。

奥尔(6;8) 与之前的儿童一样,把底部对着灯光的圆锥画成了一个向一边平躺的三角形。“现在请看。——*它不是那样的,它是一个圆*。——为什么?——……——如果这样(顶点对着灯光)呢?——*它会变成一个圆*。——*更大了,还是更小了*?——*一样的大小*。——为什么?——*因为它总是相同的尺寸*。——那这个(水平放置的,底部相对的两个圆锥)呢?——*同样是一个圆,因为它中间是圆的*。——这个(有孔的水平放置的圆锥)呢?——(他画出了一个平躺的圆锥,同时在底部的中间有另外一个圆锥。)——如果把它倾斜(45°)呢?——(他画出了一个水平的锐角,同时有一个被上边末尾的一点穿过的圆。)——这个(两个顶点相对的水平的圆锥)呢?——*它会变成一个圆*。”

罗斯(7;6) 在看到普通平躺的圆锥投射的圆形影子之后,正确地预测到了底部相对的两个圆锥的影子。“*它同样会变成一个圆*。——为什么?——*你会看到这个*(中间)。——只有一个圆吗?——(他犹豫了)*还有一个点,即最接近灯光的那一个点*。——看。——*一个圆*。——那这个(水平的顶点相对的两个圆锥)呢?——*一个圆,因为接近墙面的部分是圆的*。”

杜马(7;8) 水平的圆锥(底部对着灯光)。“*你会看到一个圆*(在实验开始前)。——那这样(顶点接近灯光)呢?——*你会看到一个点*。——看。——它是

圆的，因为在后面(即底部)它是圆。——那这个(水平的顶点相对的两个圆锥)呢？——一个圆。——确定吗？——是的。——这个(垂直的底部相对的圆锥)呢？——它是相同的形状(他画出了这个物体)。——如果把它平躺着呢？——(画出了一个相同的平躺着的物体)——看。——它是一个圆。——这个有穿孔的圆锥(平躺的)呢？——一个大圆中有一个小圆(正确)。——如果把它倾斜呢？——除了一条线，你什么也看不到(一个圆弧)。"

马伊(8;2) 平躺的普通圆锥。"你会看到一个圆。——如果这样(顶点对着灯光)呢？——你会看到一个点。——看。——它是一个圆，因为这(底部)在灯的后面——这个(水平的，顶点相对的圆锥)呢？——它是一个圆，因为在前面有一个圆(最接近灯光)。——那这个(水平的、底部相对的圆锥)呢？——你会看到一个圆，因为这里有一个圆(在中间)。——这个(水平的有穿孔的圆锥)呢？——(正确地画了出来)——那倾斜的呢？——这里不会再有一个孔。"

巴尔(9;3) 顶点对着灯光的普通圆锥："你会看到一个点。——看(影子)。——不，它是一个圆，因为这个边缘(底部)在灯的前面(即，它遮挡了光线)。——那么像这样(底部对着灯光)呢？——仍然是一个点。噢，不！我是指一个圆。——这样(水平的，底部相对的圆锥)呢？——一个圆，因为光线是照向这里的(指出了光线的方向)，而且这个点比这个圆更小(宽的部分遮挡了顶端部分)。"

雷伊(10;2) 顶点对着灯光的普通圆锥："一个圆，因为这里有一个圆(底部)，而这里它更小(顶端)，因此你只能看到一个圆(在投射中，整体遮挡了部分)。"当圆锥的底部接近灯光时，儿童推理出了相同的线。对于平躺的有穿孔的圆锥，雷伊首先画出了一个在顶部有一个小圆的点，然后在一个大圆里面画出了一个小圆。

费尔(10;7) 仍认为平躺的普通的圆锥"会变成一个点，因为它是倒下的"。随后，他把它画成了一个圆。平躺的有穿孔的圆锥，正确。倾斜的："你不能再看到这个孔，因为圆锥被抬高了，因此它挡住了这个圆。"

因此贯穿第三阶段的整个过程，这里出现了把光线(可比作一种观测者或者潜在的视角)、物体和屏幕连接在一起的不断进步，这样影子就被认为是由遮挡光线的物体制造出来的。这个阶段开始的时候，我们发现，儿童认为从电灯的位置来看，影子与物体的形状是相似的(例如，罗斯认为顶点对着灯光的圆锥产生的影子是一个点，杜马、马伊和巴尔也是一样)。除此之外，儿童仍然会混淆自己的视角与光源所在位置的视角(奥尔等)。后来，儿童开始意识到影子是光的对立面，同时它代表了与光源对立的视角。从那以后，他的答案就变得越来越正确了。

受到了在实验中看到的所发生事情的影响，他开始意识到直立的圆锥会产生一个圆形影子，"*因为朝向墙面的部分是圆的*(罗斯)"。最后，他开始表现出这样的运算，这种运算预示了第四阶段的出现。这包含了把物体更小的部分放在更大的部分内，而且

理解是更大的部分遮挡了光线，因而可以解释影子的形状。"*它是一个圆*，"雷伊说，"*因为这里有一个圆，而这里它更小，因此你只能看到一个圆。*"巴尔进一步提出了这样的观点，即光线形成了一束被物体最大横截面所遮挡的直线："*光线是从这里射出去的，而这个点比这个圆更小。*"

以上描述的儿童，只有通过不断地尝试错误与实验本身的提示帮助后，才能给出正确的答案。处于第四阶段的儿童能够很快理解影子的图画所依照的投影结构。

> 昂(11;0)　一个或两个圆锥："*你会看到一个圆，因为它是从这里*(指着它锥形的边)*一直到这里的*(最大的直径)。"水平的有穿孔的圆锥：正确。倾斜的："*这个圆会变扁平*(正确地画了出来)，*同时你将看不到那个小孔，因为当它被抬高的时候，它变得越来越扁平。*"
>
> 蒙(12;0)　水平的圆锥："*它是一个圆，因为它变得越来越大，而且这个点被这个大圆挡住了*(即被不断增大的横截面遮住了)。——那这个(顶点相对的两个圆锥)呢？——*也是一个圆，因为这两个圆是一样的，在前面的圆挡住了后面的那个圆。*"有穿孔的圆锥：不管其顶端是否靠近或远离电灯，均画出了相同的图画。

儿童能够给出这些正确答案的时间相比在第二节到第四节中引述的要稍晚一些，因为圆锥包含了不断减小的横截面。结果，他们更加清晰地表现出了应用于想象影子形状的原理类型。

本章的整个思路是要证明这一原理与透视想象所要求的原理是相同的。为了想象透视，儿童必须把自己的视角与他人的区分开，并且把自己的视角与他人的相互协调。对于影子，当影子在某种意义上是这个的"对立面"，光线与观察者的视角是一致的。也就是说，影子是在光源位置看不到的，即因为被物体本身遮挡而在屏幕上呈现出了阴影。正是这样，影子投射的发展阶段与直接透视的相一致，这一点也不令人意外。

对于相同物体的透视，包含相同横截面的简单形状有相同的发展过程。连接电灯与屏幕的，并被遮挡了光线的物体所隔断的直线，可以被直接比作在透视中连接眼睛和物体的线。在两种情形中，儿童构建出了相同的射影和横截面系统。唯一的不同是影子含有一个与光线有关的"对立面"(使用了一个比喻)。但是这是一个本质要点，即视角之间协调运算的阶段一旦达到，同时思维变得可逆，那么"对立面"就不会相对于"正面"给儿童带来更大困难。

另一方面，包含不同横截面的物体，例如圆锥，在被最大横截面遮挡的射影方面给儿童带来了更大的困难。对于圆锥体，一旦有光出现，那么不管圆锥的顶点是对着灯光还是远离灯光，其顶点总会被底部遮挡。由于这样一个简单的原因，即要做到这些儿童必须要同时做出一些"封闭的"运算，同时还要考虑一个不同于物体本身的视角协调系统。对于儿童来说，在射影形状领域中想象出一个这种类型的"封闭"比拓扑形状要更为困难。这大概就是为什么我们要等到第四阶段才能看到这些运算得以实现的原因。

第八章　透视的协调[1]

从第六章我们可以知道,透视出现在儿童心理发展相对较晚的阶段。在这方面,我们的实验仅仅是证实了我们已经通过对儿童绘画的直接观察得到的结果。根据吕屈埃的研究,心智现实直到8岁或者9岁才会被视觉现实取代。直到那时,儿童所画的物体才是他们真正看到的,是根据他们作为实际观察者看到的。尽管我们知道这些,然而它却很令我们惊奇,因为两个原因。

首先,假设射影关系要比拓扑关系复杂得多,并且假设它们的建构需要一系列等同于构建欧几里得几何学的公理。然后就心理发展而言,我们期望运算可以使它们提前得以完善,并且被知觉透视经验所促进。但相反的,我们实际发现的是心理发展的顺序与相对较晚出现在儿童解决几何问题方式中的公理的建构、透视的发展是并发的、一致的。这就是有趣的地方,它直到儿童开始形成坐标系统或参考系统才出现。因此,透视的出现取决于运算概念的发展而不是经验和与生俱来的直觉。

其次,这也是更让人困惑的。一旦透视固有的关系在直接知觉的范围内是运算化的,儿童可能会通过最简单和直接的方式利用这些关系来表达自己的视点。至今我们已经很清楚地知道:儿童的观点首先是完全以自我为中心的,并且倾向于完全根据自己的知觉把物体的外表变成错误的或虚假的绝对真理。

因此,问题便产生了。为什么儿童这么慢才能掌握如此简单的透视关系,并且只有当他能够协调很多可能的视点时才掌握?答案就是透视系统需要他将客体和真正意识到的自己的视点联系起来。无论何时,意识到自己的视点包括与其他视点进行区分,同时和其他视点进行协调。因此,很明显,透视发展需要一个广泛的、全面的建构,这种建构能够使系统内的客体之间相互联系,并且通过与多个观察者对应的射影关系,使得视点之间相互联系。

目前所进行的实验仅仅是解决了单个物体连续位置的透视或射影问题,不论是被一个儿童还是一个假想的观察者观察到的。我们现在必须开始着手去研究一个观察者或者多个观察者轮流从不同的位置所看到的一组客体的透视。接下来的实验有两个目标:首先,去研究将不同的视点联系在一起的全面系统的建构;其次,去研究儿童在自己的视点和其他观察者的视点之间所建立的关系。这些实验包括许多的视点,儿童可以站在一组山前想象不同的视点(山可以从多个角度进行观察)。

---

[1] 与 Mlle Edith Mayer 合作。

因此,问题不再是简单地与物体明显的形状和大小改变有关,而主要是与客体相对于另外一个客体或者其他的观察者(或者是同一个观察者不同位置)的位置有关的。因此我们主要关心前后、左右关系,以及在想象的透视中运算化的三维空间中的二维关系。

现在尽管这些关系是建立在第三章所研究的拓扑关系的基础上的,很明显,此处介绍观察者自己的视点是为了与其进行区分。在一个拓扑关系的系统中,“向左”或“向右”仅仅指沿着线性位置可能的方向。当考虑到观察者的视点时,它们仍然是完全任意的(例如一些儿童把序列翻转,就像它的镜像一样)。然而,在射影系统中,“左”与“右”是相对于观察者的视点而言的,由三山的透视所形成的问题包括同时存在的几个客体和几个观察者。因此,它将取决于一个全面的投射系统,这个系统就好比在十三章和十四章探讨过的,在欧几里得几何学范围内建构一幅地图或平面图所要求的坐标系统。

第一节 方法与总体结果

在一个长1m、宽12—13cm的纸板上摆放三座山(见图15)。儿童最初在模型(A)的前面,在他的右边前景位置有一座绿色山。山顶有一座小的房子。在他的左边,儿童看到在绿色山稍微靠后的位置有一座比绿色山还高的棕色山。这座山被区分出来不仅是因为它的颜色,还因为它的山顶有红色的十字。在背景位置,矗立着三座山中最高的、顶峰被雪覆盖的灰色山。从*C*位置(*A*位置的对面),可以看到沿着绿色山有一条曲折的小路,然而从*B*位置(模型的右边,与*A*位置相邻),可以看到一条小溪沿着棕色山而下。每一座山都是单一的颜色,除了灰色山上的雪,并且仅有的参考点就是上面所描述的。

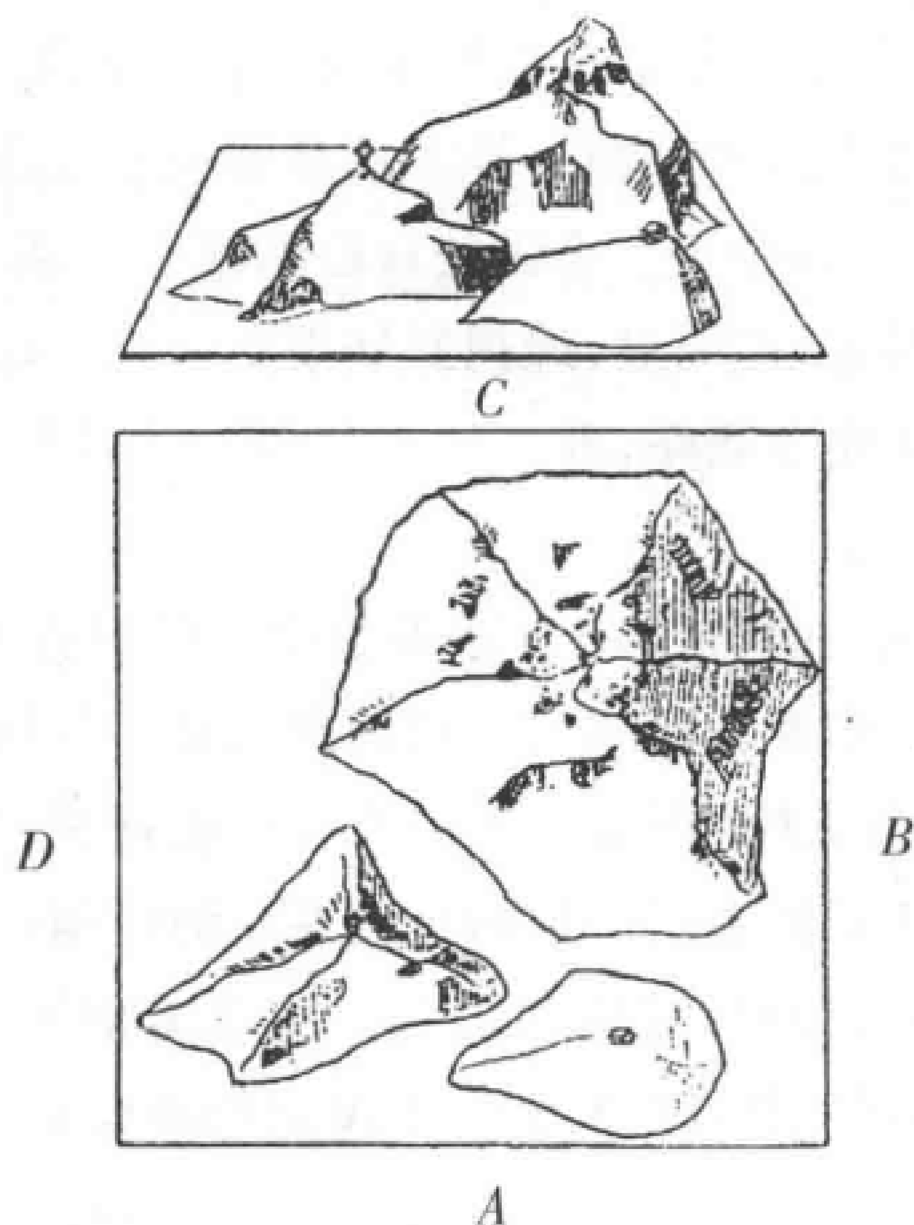


图15 三座山

给儿童呈现10张20×28cm的图片。这些图片呈现了从不同视点看到的山，并且与模型中山的颜色是一样的。这些图片很容易区分，并且一些突出的特点比如十字、房子、白色的山顶足够大，可以很容易就被看到。给儿童呈现三块纸板，每座山的外形和颜色都和模型中的相同，儿童需要根据他们从自己的视点看到的模型对其进行排列。

最后，还有一个2--3cm高的玩偶。玩偶的头是简单的木头小球，上面没有画脸，因此儿童可以忽略玩偶的视线，仅仅需要考虑它的位置。玩偶被放到一系列不同的位置，儿童要做的就是去想象玩偶在每一个位置时可能看到的景观。这并不是说儿童在三山之间移动，除非去核对自己的答案，而是假设玩偶在不断移动。随着玩偶的移动或者玩偶位置的变化，其看到的景观也在不断变化，儿童的任务就是想象和复制出玩偶看到的景观。

为了这个目的，我们使用三种分离却互补的方法提问儿童。首先，给儿童呈现三张有图形的纸板，要求儿童把这些纸板放在桌子上适当的位置，从而来搭建从位置*A*看到的三山模型。接下来，把玩偶放在位置*C*并且要求儿童搭建出玩偶或者他自己从视点*C*看到的三山模型。在*B*位置和*D*位置也重复了同样的程序。儿童坐在位置*B*(或者*C*和*D*)以后，也要求他用纸板搭建出他在那个位置看到的模型。也要求儿童去搭建他刚才在*A*位置或者他先前坐的其他位置看到的模型。对于年长的儿童，为了更清晰地区别不同的景观，安排玩偶在更多复杂的位置当然是可能的。相反的，对于年幼的儿童，重点在于儿童自己位置的变化，和他自己所看到的变化景观的协调。

在第二种类型的实验中，我们不再要求儿童去搭建可能的三山模型，但是给他们呈现一系列的图片，要求他们去挑出玩偶最有可能看到的景观。规则是，同时呈现所有的10张图片，尽管问题只是针对4到5个位置，这样做是为了避免厌倦和习惯的答案。

第三个实验正好和第二个实验相反。这次不再要求儿童去试着找到与玩偶所在位置相对应的图片，而是要求儿童先选择其中的一张图片，然后再考虑玩偶在什么位置才能看到相似的图片。

这些实验是在100个儿童中间做的，21个孩子在4岁到6岁半之间，30个孩子在6岁7个月到8岁之间，33个孩子在8岁到9岁半之间，16个孩子在9岁半到12岁之间。这些结果按如下分类，发展阶段和前面章节提到的一样[①]。

在整个第二阶段，儿童很难或者基本不能区分自己的视点和其他观察者的视点(玩偶在不同位置所代表的)。在2A亚阶段，比如方法1，每移动一次玩偶，儿童都用纸板搭建出三山模型，就好像在复制从观察者视点看到的模型。然而，当我们在检查的时候发现，这些模型都是一样的，它们都是从儿童自己的视点看到的三山模型。在2B亚阶段，儿童尝试进行一些区分，但是经常又回到2A亚阶段的自我中心建构。

在整个2A亚阶段期间，方法2的结果是，儿童不是根据自己的视点就是根据一个随

---

① 第一阶段的儿童不能理解问题，所以对他们进行一致的研究或者报告他们给出的答案是毫无意义的。

机的视点来选择照片,这表明,儿童认为所有的图片都是同等地适合所有的视点,只要图片呈现的是三座山。相反的,方法3表明,儿童完全不能区分与不同图片对应的玩偶的不同位置。他们总是把玩偶随机放到任何位置,或者总是放在左侧相同的位置,因为儿童认为玩偶可以从任何位置看到三座山,而不考虑视点。在2B亚阶段,方法2和方法3揭示出儿童开始区分各个视点。但是,他不能够以正确的方式把相关的因素关联起来,他的努力注定是失败的。

在第三阶段(7—8岁到11—12岁),儿童可以逐步地区分和协调从不同视点看到的景观。在3A亚阶段(平均7—8到9岁)随着观察者位置的变化,特定的关系也不断地变化,但是儿童仍然不能达到全面的视点协调。这直到3B亚阶段(大约9—10岁)才实现,在这一阶段,儿童能够完全掌握简单的透视,并且他们的绘画中开始出现透视。

第二节　第2A亚阶段:儿童局限于复制自己的视点

回到第六章,当试着在不同的方向预测物体的外观时,2A亚阶段的儿童完全不能预测物体表面形状的变化,并且似乎认为物体形状是永恒的、不变的,而忽略自己的视点。但是当包含很多物体时,就像本研究中的三山,人们发现儿童不能意识到不同的观察者会看到不同的景观,并且似乎把自己的视点看作唯一可能的视点。

无可否认,这个矛盾不过是表面上的,并且我们能够立即发现早期实验(不能对任何明显的外形变化做出反应)中的错误-绝对物体和三山实验中儿童表现出的自我中心性的亲近关系。然而,仔细研究儿童对这个新问题的反应是很有价值的,因为它们把重点放在透视关系的总体协调上,这到目前为止必须被分开来研究。

方法1,要求儿童搭建出观察者(玩偶)在特定位置能够看到的模型,而儿童的实际表现是复制从他自己的位置可以看到的模型。

卢策(6;3)　坐在A位置,并且搭建出他看到的模型。他把绿色纸板放在右边,把棕色纸板放在左边,并且把灰色纸板放在中间,灰色纸板较低的边缘被绿色和棕色纸板遮掩起来,就像在三山模型中一样。把玩偶放到儿童的对面,在位置C,并且要求儿童再现出玩偶会看到的景观。(把已经摆好的模型移动到足够远的位置,这样儿童就不会一直注视它)卢策把棕色纸板带到棕色山附近,就好像帮助他自己思考,然后把纸板放到山前面。接下来他带着灰色纸板,并且慢慢移动它,同时还注视着山。然后把它放到棕色纸板的下面,灰色纸板的顶点在棕色纸板的右端。最后,他把绿色纸板的一部分放在灰色纸板前面但一部分在右面,因此恰好复制了刚才搭建的模型(位置A,他自己的位置)。

"请告诉我你所做的。那个模型是你从哪儿看到的(他搭建的第一个模型)?

就是当你在这儿的时候(位置A)。——那一个呢(他搭建的第二个模型)？——就是那个小人在那儿的时候(C)。当他在这儿(A)的时候，我们摆放了绿色山、棕色山，然后灰色山，当他在这儿的时候(C)我们摆放了棕色山、绿色山然后是灰色山。——山是按照他从那个位置所看到的进行摆放的吗？——是的。"

把玩偶放到位置B，在桌子的右边。卢策拆散了他之前的模型，重新把绿色山放到右边，棕色山在左边，灰色山在中间，又把它们往后推了一定距离，因此搭建的是从位置A看到的模型而不是从位置B看到的模型。然后要求他坐到位置B并且检查他的模型。他以正确的方式把灰色山放到右边，绿色放在左边，棕色山放在中间的背景位置。"你能记得你在这儿所看到的模型吗(位置A)？——是的。——它一样吗？——不。——试着把它摆出来。——(他看着天花板进行思考，在没有看三山模型的情况下搭建出了从视点A看到的模型，因此他完全凭记忆完成模型的搭建)——非常好。现在搭建出玩偶从那儿看到的模型(位置C)。"卢策把灰色纸板放在右边，绿色纸板放在左边，棕色纸板放在中间，棕色纸板的一部分被其他两块纸板遮挡。因此他搭建的模型与位置B精确对应，而不是与位置C！把玩偶放在位置D(B的对面)，结果也是再一次与位置B对应，然而卢策坚定地相信他搭建的模型是从位置D看到的。

赞(6;6) 坐在位置A，正确地摆放了纸板，绿的在右边，棕色的在左边，灰色的在中间，且部分被挡上以使之看起来在背景位置。然后把玩偶放在位置B(A的右边)。赞边犹豫边思考；然后他把绿色纸板放到他的前面，又考虑了一下，并且把棕色纸板放到左边，把灰色纸板放在其他两个纸板后面的中间位置，再现了从位置A看到的景观。"这个对吗？——是的。——完全正确吗？——是的。——如果你自己站在那儿，你会看到这样的模型吗(B)？我不知道，我不这样认为。这是我第一次完成这个任务。——好的，接下来走到那儿并且仔细看看。"赞一坐到位置B就以正确的顺序摆放纸板，绿色在左边，灰色在右边，棕色在两者后面的中间位置。他也能够凭记忆重新搭建出从A处看到的模型。但是在搭建从位置D(B的对面)看到的模型时，赞把灰色纸板放在右边，绿色纸板在左边，棕色纸板在中间，就好像从位置D和位置B看到的模型是一样的。同样的，他搭建的从位置C(位置B的右边)看到的模型也和从位置B看到的是一样的。"它真的像这样吗(暗示)？——不，我认为不是这样。我会尽力正确地摆放它们。"赞把他的模型打乱并且重新开始搭建，每次当他放好一块纸板以后都很仔细看一下模型，甚至去确认玩偶的位置。这次，他把灰色纸板放在右边，绿色纸板放在左边，棕色的放在中间并且大呼(并没有意识到结果和刚才的一样)，"现在对了！"现在要求赞站在位置C来检查他所搭建的模型。他把模型拆散并且重新开始搭建模型。接下来，他成功进行了必要的修改。但是当要求他搭建从位置B以及位置D看到的模型时(他刚刚离开的)，赞把自己局限在自己的视点上，并且搭建的都是从位置C看到的模型！当问他："这个

对吗或者应该改变什么吗?"他把模型拆散重新开始搭建,并且又回到他新获得的格式(比如在位置C看到的景观,尽管他已经经历了所有的其他的位置)。"你从那儿(B)看到的有什么不同吗,或者它和你现在(C)看到的一样吗?——是一样的。——你可以从其他位置那儿或者那儿看到同样的景观吗?——不。——(他把模型拆散,重新搭建从位置C看到的模型)——这种景观是从哪儿看到的?——从另外一边(他指着位置A)。"

我们特别想展示这两个例子的细节,因为它们很好地阐述了这一阶段儿童对方法1的反应。儿童把他现在的视点当作唯一可能的视点,不能根据它推理出由位置改变所带来的景观变化,不能搭建与不同的位置相对应的景观。我们可以反思儿童是否明白了问题的本质,或者是否尽力去再现模型。但是我们看到他仔细地搭建模型,站起来去检查玩偶的位置(赞),没做决定之前在每一个新的位置前犹豫,特别是当他改变位置后继续使用同样的方法,我们可以确信他明白了问题的意思。另一方面,很有必要去观察他对自己搭建的模型是否满意,很明显,比如赞,对他的更正有短暂的怀疑,即使他后来又一次以完全相同的方式开始。

当我们试着解释连续发生在儿童空间概念的错觉时,在从简单知觉到抽象思维这数个阶段之间给它明确的定位是很犹豫的。比如,当给一个7—8个月的孩子拿倒着奶瓶时,他开始吸吮错误的一端而并不能把瓶子倒过来,这确实是一个知觉或知觉活动的错误(见第一章第二节)。在缺乏形状恒常性时,幼儿不能把他短暂的知觉纳入有组织的旋转运动(或者反之亦然,由于恒定形状的格式和旋转运动是相互支持的[①])格式。与此形成对照的,我们以参加现在实验的儿童为例。在2B亚阶段,我们发现他们试着通过旋转每一座山来颠倒三山的外形,而不考虑背景和前景。在这里,更容易犯推理的错误。

现在在这个案例中,有很多迹象表明,在2A亚阶段,儿童已经很好地认识到三山的外形是随着观察者视点的变化而变化的。考虑到婴儿从两岁开始,就能够转动物体从而来协调不同的景观,或者当物体不能被移动的时候转动他们的头或者整个身体,这符合我们的预期。无可否认,这只是一个连续知觉的问题,而不是像在建构或预期一个情景时一系列的视觉图像。

确实,在真实的情形下,儿童距离三山模型太近了,以至于在很短的时间内就可以看到不同的景观。但是一旦涉及想象,前面由形状恒常性和协调不同景观引起的问题就会再次出现。

举个例子,带一个4岁半的男孩儿去看萨利夫山(Saleve)[②],仅仅距离他家有一个小

① 见 *The Child's Concept of Reality*, obs. 78, 1955

② Fr. Text, 278. See op. Cit., *Play, Dreams and Imitation in Childhood*, 1952.

注:小萨利夫山和大萨利夫山是日内瓦外边附近的两座山(Tr.)。

时的旅程。他似乎有印象,山的外形经历了变化而不是视点的变化(小萨利夫山的消失等)。就像给7个月大的婴儿一个倒着的奶瓶,当把奶嘴再转向婴儿时,婴儿认为奶瓶的形状发生了变化(奶嘴消失)。在男孩看萨利夫山这个案例中,我们并不期望他把山外形的变化归结于视点的变化。然而,他发现这样的一个变化,尽管解释为真实的外形改变,必定迫使他意识到山从不同的地方看是不一样的。

因此,当儿童在我们的实验中观察一组和真实大小相差甚远并且比真实的山更容易处理的山时,他几乎不会怀疑所看到的景象会随他的位置改变而改变。结果,从位置A移动到C,他需要搭建和前一个模型完全不同的模型,这丝毫没有让他感到吃惊。为了明确表明我们不能搭建出一个适合每一个位置的模型,赞甚至走得足够远,尤其他说,对于一面和对面。而且,一旦儿童的位置改变了,他能够凭记忆搭建出从之前的视点看到的模型,即使他用纸板搭建了新的模型。因此,他完全能够想象在实验过程中,山从两个相继不同的视点看起来是如何不同的。为什么后来他仍然不能想象可能的、供选择的视点,并且固执地复制他从当前视点看到的景观?这确实是一个问题,并且问题的答案很明显必须在三山的形状非恒常性或者想象的特征中寻找,一个介于知觉和思维之间的现象。

当儿童从位置A移动到位置B,并且利用他的纸板搭建出他从现在的视点和之前的视点看到的模型时,他在简单地协调知觉的概念(从位置B看到的模型)和想象的概念(记忆中的从位置A看到的景观)。但是当他坐在位置A的时候,如果要求他预测在位置B、C或者D看到的景观,他必须推理或者想象一些虚拟的、并不是真实经历过的、另外一个观察者的知觉。尽管推理在这个过程中起到了作用,然而在复制之前感知过的场景还有一点儿作用,但是在婴儿的知觉中却没有一点儿作用,真正产生作用的是婴儿在1岁期间出现的类似形状非恒常性的一种现象。

在婴儿不能找到奶瓶的奶嘴的案例中,知觉并没有"去中心化",从而使得儿童旋转物体,而是仍然集中于它在那个时刻出现的样子。相同的,当4—7岁的幼儿注视着三山的时候,他们除了自己的视点外不能考虑其他的视点,揭示了一种同样不能随着位置改变而"去中心化"的空间想象,只是集中在一个与他当前视点对应的位置(或者之前经历过的位置)。

在画画或者想象中的自我中心是早期知觉的自我中心特征的遗留物。4岁左右(第一阶段)的儿童可以很好地阐述这两者之间的过渡,他们能获得小的、可以处理的物体的恒常性,但却不能把它延伸到真实的、实物大小的山比如萨利夫山,仅仅是因为这样的景观不能通过很快的图片交替被协调,只能在思维中被表征。

现在,让我们回到三山实验模型。儿童在1岁末的时候,已经能够掌握小物体的恒常性。在3岁末的时候(阶段1),能够掌握有代表性的大物体的恒常性,比如楼、山等。但是他仍然不能够把它应用于一个有许多相互联系的物体的整体中,比如三座山的模型。和年幼的儿童不同,他清楚地知道当他在山的附近走动时,山真实的外形并没有发

生变化,并且正确地把山明显的外形改变归因于视点的改变。同时,他不能够形成一幅全面的心理图画,这幅图画足够详细能够使他想出随着虚拟的视点改变所带来景观的改变。因为不能够发展这样一个动态的、移动的概念,所以儿童仅仅用最直接的知觉信息代替山的形状恒常性,因此把它提高到一个绝对真理的位置。这是很容易理解的,由于一组物体的形状恒常性就是在无数变化的关系中稳定的对应性系统,相比单一物体的恒常性而言,需要更高程度的去中心化。同时,由儿童的空间自我中心所导致的错误-绝对,是因为他在知觉和想象中只关注自己的视点。

总结起来,是自我中心的幻觉阻碍了儿童颠倒前后左右关系,因此阻碍了他们随着观察位置的改变而旋转景观,一种使得年幼儿童的知觉缺乏形状恒常性的幻觉的延续。这一现象在儿童到了4—5岁,处于第一阶段时,再次变得明显,这些儿童由于在知觉和想象中的自我中心特点,不能把形状恒常性延伸到大物体上。

方法2,给儿童呈现早就做好的、各种可能景观的图片,使得我们能够确认和阐明前面的结果,因为使用这种方法,仅仅需要儿童从现有的模型中进行选择而不用自己亲自搭建模型。在这个实验中,我们发现这个阶段的儿童或者选择和自己的视点对应的图片,或者选择那些呈现了从自己所在位置看到的全部的图片。

这里有几个第一种类型的反应的案例。

赞(6;6)　在上面我们已经给出他对前面问题的回答。现在他坐到位置A,并且要求从10张图片中选择一张与位置D相对应的图片(灰色山在左边、棕色山在右边、绿色山在中间的背景位置)。最终他选择了图片Ⅰ(位置A,绿色山在右边、棕色山在左边、灰色山在中间)和Ⅷ(在位置A的左边,但是外形与从位置A看到的很相似)。"你为什么选择这两个?——*我看到它们是一样的,因为灰色山在后面并且其他两个在前面。*"接下来把玩偶放到B(从左到右,绿色、棕色、灰色)。赞又一次挑选了与他自己的位置相对应的图片并且说:"*是这个,因为绿色的在这儿*(指着他的右侧),*并且小人也在这儿*(指着玩偶,同样在他的右侧)。"

伊尔(7;4)　坐在位置A(棕色、灰色、绿色)并且把玩偶放在位置B(绿色、棕色、灰色)。他选择图片Ⅰ(等于A)并且说:"*因为在那儿他看到了这张图片。*"然后他把图片Ⅳ(灰色山在左,棕色山在右,看不见绿色山)放在一旁,说:"*这样他就看不到绿色山,他必须转过来*(因此他假设在这张图片中,一个人必须背对着绿色山,没有意识到绿色山可能被棕色山挡住)。"然后,他又把图片Ⅰ挑选出来并且说,"*这一张。在这张图片中有三座山,他能看到全部的山。*"然后把玩偶移动到与图片Ⅳ相对应的位置。伊尔(仍然在位置A)立即说,"*在那儿他能够看到灰色山、绿色山和棕色山,所有的山。*"他随即选择了图片Ⅰ(等于A,棕色、灰色、绿色),图片Ⅶ(等于D,灰色、棕色、绿色)和图片Ⅸ(灰色、绿色、棕色),然后把剩下的图片丢弃,进行观察,"*他必须看到所有山。——但是你选的哪一张是最适合他的?——那一张*(Ⅰ,

他自己的视点),它是最好的,因为能看到全部的山。——另外两张当中有几座山?(Ⅶ和Ⅸ)——也有三座,但是那一个是它们中最好的,因为他在那之间(指着在灰色山和棕色山之间的玩偶)。——但是从他的位置,他真的能够看到那张图片吗?——是的,他可以的,尽管他不能看到绿色山的大部分。那一张(Ⅸ)可能会更好一点,那张图片里有一点绿色山。”

费尔(8;2) 把玩偶放到这样一个位置,从这个位置上看灰色山在左边,棕色山在右边,绿色山顶在中间的背景位置。费尔坐在A位置,选了三张图片,每一张图片中都有三座山。“这三张中的哪一张是正确的?——那一张(Ⅰ等于A)是正确的。他看到的三座山就是这样子的!”

塞尔(7;7) 玩偶在同样的位置,他也选了两张图片,包括图片Ⅰ(等于他自己的位置)。“哪一个是正确的?——那一个(Ⅰ),因为那个小人在对面(事实上在位置D的附近!)。这是最接近的图片。”

下面是几个第二种类型的例子。

雷恩(7;6) 在位置A,玩偶在位置B(模型的右边)。他依次对着每张图片说,“这张是正确的,他看到灰色山和绿色山。”然后(图片Ⅰ),“他看到绿色山和棕色山,他也可以看到灰色山,这张图片里有所有的山,棕色、绿色和灰色……”最后,他对那些将全部的山包括在内的图片表现出偏爱。

迪(8;1) 对每一个位置也选了一系列图片,同时说,“他能够看到全部的山。”最后研究者问他哪一张是最正确的,他跑向已经选出来的一张(他早已经排除了只有两座山的图片),再一次说,“同样是这一张,因为这张有全部的山。”

因此,自我中心的幻觉或者儿童把知觉局限在自己的视点中,无论当他选择早已经做好的图片,还是用3块纸板搭建模型,都很明显地表现了这一点。我们给出的例子中,两个组的儿童都确实认为玩偶看到的景观和自己看到的是一样的。在第一种类型的反应中,这种困惑有限制性的影响,儿童仅仅认为玩偶看到的山是和从自己的位置看到的一样。第二种类型的反应以扩散的方式展现出同样的困惑,这种困惑就是鼓励儿童去相信无论玩偶在哪个位置,都能够欣赏到三山的每一种景观,只要景观中包括所有儿童自己可以看到的元素。

现在,尽管这两种类型反应的差异看上去比真实的差异还要明显,然而如果我们同意先前的观点,即由于儿童只关注自己的视点导致了虚假的恒常性和错误-绝对。那么它们对我们评论方法1都会非常有帮助。

我们都记得,在儿童认为从每一个视点看到的景观都和从他当前视点看到的相同的阶段,他们也不能够根据透视定律(视觉现实)画画。他们赋予物体固定不变的拓扑

外形而不是欧几里得外形(心智现实)。因此,直到他开始区分其他的视点和他自己的视点,他才能够意识到自己的视点是特别的,并且能够利用射影关系预测它。

在使用方法1的实验中,这种无意识的自我中心,不能够区分不同的视点,恰恰解释了为什么儿童给三山赋予了虚假的形状恒常性而不是在变化的关系中射影对应性的恒常性,在这方面,刚刚从使用方法2进行的实验中引用的回答是极其贴切的。起初,总是选择图片Ⅰ的儿童并没有意识到他们所表达的仅仅是他们自己的视点。"*那就是最好的一个*,"费尔说,"*他看到的三山就是它们真实的样子!*"看到的山就是它们真实的样子,就是说看到的山就像他们自己看到的。这个短语很好地阐释了儿童心智自我中心的无意识特点和虚假形状恒常性的特点。同样地,塞尔也选择了图片Ⅰ,因为"*图片中有全部的三山并且他就在对面*",而且"*因为山更像从这儿看到的*"。而且伊尔像其他的儿童一样给出了第二种类型的答案,给出了附属性的说明"*那里一定能够看到全部的山*",却没有意识到这需要站在和他一样的视点观察山。

尽管他们似乎理解很多景观,但是给出第二种类型的答案的儿童和给出第一种类型的答案的儿童事实上混淆了他们自己看到的景观和其他人看到的景观。除了把景观视为确定不变的,不能注意它们左右上下关系的变化外,像前面的儿童一样,他们在绘画的心智现实阶段,仅仅坚持认为所有的物体都存在。因此对选择哪一张图片漠不关心,并不意味着儿童能够根据透视定律理解这些关系(左-右、上-下)的变化,这仅仅意味着这些儿童根本没有想这些。

总而言之,不论儿童把这些关系视为固定不变的,还是认为它们和从自己的视点看到的一样,又或者是完全忽略它们,方法2得到的结果完全证实了方法1得到的结果。他们无意识地把每一种景观都比作自己看到的景观,即没有就射影关系而言区分这种景观,或者陈述、探索这种景观。

方法3与方法2有相反的问题(也就是呈现一张图片,找到对应的玩偶位置),对方法3,儿童回答的研究结果与先前研究结果完全一致。儿童认为应该把玩偶放到图片中主要元素的附近,而不是将其放到对应的视点上。他仅仅把玩偶放到图片中呈现的山之间,或放在他自己的视点上而不是相应的玩偶的视点上。

卢策(6;3)　对于方法1的反应,在上面已经进行了描述。现在要求他把玩偶放到能够看到图片的位置(图片Ⅸ,棕色山在右,灰色山在左,绿色山在中间)。卢策首先把玩偶移动到绿色山上,然后是棕色山上,最后是灰色山上,就好像试着把它依次放到图片中所呈现的每一个元素上。"但是我们应该把玩偶放到哪儿,它才可以看到这样的图片?——*那儿*(就是棕色和绿色山脚下,一个看不到灰色山的点),*因此他就能看到全部的山*。"然后我们又相继呈现了几张图片,他所有的反应都是一样的,也使用了相似的术语,然后是与卢策自己的位置对应的图片Ⅰ,他把玩偶放到三座山的中间。

奥里(7;6) 对于图片Ⅸ(参照卢策),把玩偶"*放到中间*。——那这张图呢(图片Ⅰ等于他自己的视点)?——*也在中间*。——他在那儿看到的图片和这张一样吗?——*不,他必须得转过来*(他把玩偶转过来,就好像向它展示每一座山)。*现在他看到的图片是正确的*"。

冯(8;0) 为了看到同样的图片(Ⅸ),他把玩偶放在棕色山的山脚下,面向绿色山的左侧,"为什么?——*因为那样面向全部的山*。——那这张图呢(Ⅰ)?——*同样也是*。——你可以站在同样的位置看到这两张图片吗?——*是的,是一样的位置*。——如果你从两个不同的地方照相或画画你会看到一样的东西吗?——*是的*。"……"如果要看到一张尽可能和那张图片(Ⅸ)一样的图片,你应该站在哪儿?——*这儿*(位置A等于他自己的位置)——为什么?——*能看到全部的山*。"

马尔(8;9,发展迟缓的) 反应的方式相似,并且以把玩偶放到他自己的位置告终,"*因为那儿是他可以看到全部山的最好位置*"。

我们没有必要为了证明这些答案和那些早已报告过的答案有明显的类似关系而写一篇冗长的研究报告。儿童对他自己要做的事情没有疑问,并且尽力去让玩偶看到的景观和图片中呈现的景观一样。不幸的是,他完全不能够掌握这样一个事实,一个特定的位置所能看到的是有局限性的,它与一种给定的景观是对应的。

取而代之的是,他认为自己看到了三山本来的样子,也就是说从任何一个视点看到的景观都与此相同。结果,无论给他呈现哪张图片,他的反应方式只有两种,事实上可以说成是一种。

第一种反应和我们熟悉的方式相似,包括把玩偶放到与他自己邻近的位置。"*他从那儿可以更好地看到它们*。"马尔说。或者卢策说,"*他看到了山的整体,所有的山*。"或者冯的话,"*因为那样面向全部的三座山*。"第二种类型的反应是把玩偶放到图片中呈现的全部山的正中间,或者是在一座山的脚下或者在两座山或三座山之间。在这种情况下,儿童把玩偶放在景观(他看到图片中所呈现的元素)之间。当然,还有其他的一些情况,和用方法2看到的第二种类型的反应相似,把玩偶放到任意位置,就好像观察者的位置与他们观察到的景观没有关系。然而,没有必要重新回到这一点。

当前的结果很显然与使用其他两种方法得到的结果是一致的。然而,它们包括一个新的证据,这会帮助我们完善对虚假的形状恒常性的描述,虚假的形状恒常性是非透视系统的特点。总体上,当儿童把玩偶放到三山中间或者尽可能地靠近山的时候,如当卢策把玩偶移动到山之间或者当冯把它放到其中一座的山脚下时,他们表现得就好像没有意识到不同的位置之间是相互排斥的,并且代表了不同的景观。他们把它们当作同一整体分开的部分,就像部分的照片拼在一起形成了全景。如果以上述方式组合,那么整体所呈现的外形是固定不变的,且这并不与众不同视点所看到的相冲突,因为这种不同仅仅是强调特定方面的结果,而不是包括顺序关系的翻转在内的不同景观。这种

解释之所以被提出,更大可能是因为这样一个事实:这同样适用于这个阶段的儿童自愿画出的图画。因此,吕屈埃所提出的术语"视点的混合"恰恰包括从不同视点看到的元素的并列,所有的这些元素都被呈现在同一幅画中。

第三节 第2B亚阶段:过渡期的反应,尝试区分不同的视点

为了让不同的景观之间相互一致,需要对透视进行协调并且转变射影关系,为了理解其中的机制,最有用的便是当儿童尝试区分不同的视点时,追踪儿童的发展。在这点,2B亚阶段是最有趣的。儿童意识到,一些关系是相对他人而言的,并且随着视点的不同而不同,但是他立即以错误—绝对或前概念的形式把这些新生的关系稳固在2A亚阶段的虚假的恒常性与第三阶段的相互的恒常性之间。

方法1,在2A亚阶段,儿童会用纸板重新搭建出从自己的视点所看到的三山模型,与此不同的,这一阶段的儿童尝试突破这个限制。他们搭建的模型偶尔会接近从玩偶的视点所看到的模型,但是也不过是一个简单的模型而已,他们的尝试仍然没有成功。有时候会对个别山的位置进行翻转,但是三山的结构没有出现过类似的情况。最后,尽管在决定纸板的最终位置之前,儿童会将其转向玩偶,但是偶尔的,如同在2A亚阶段一样,他们还是从自己的视点出发来搭建模型。

奥(6;10) 坐在位置*A*(从左到右的纸板颜色排列:棕色、灰色、绿色),把玩偶放到位置*B*(从左到右的纸板颜色排列:绿色、棕色、灰色)。奥拿起灰色纸板,与此同时看了看在灰色山的山脚下的玩偶;然后,他将绿色纸板放到灰色纸板的右边,并将绿色纸板掩盖了部分灰色纸板(与自己的视点一致且与玩偶的视点不一致)。完成这个活动以后,他用棕色纸板遮住了灰色纸板的左侧。奥认真地完成了模型的搭建,将自己搭建的模型的右侧放在前置模型木板的右边缘,但结果也是他所搭建的模型与视点*A*正好对应。也就是说,玩偶的方向,就好像把从结构*A*看到的模型向结构*B*移动,就可以把它变成与结构*B*相对应的模型。

同样地,把玩偶放到棕色山的山脚下(朝向*D*),只能看见左边的绿色山和右边的棕色山,灰色山被棕色的山挡上了。奥把棕色纸板和绿色纸板放在木板上最靠近玩偶的角落里,把灰色纸板拿在他的手中。但是并没有就此结束,他最终决定把灰色纸板放到棕色和绿色纸板之间,这再一次与视点*A*对应,仅仅是旋转了90°而已;然后,把玩偶放到位置*C*附近(绿色、灰色、棕色),奥毫不犹豫地把三张纸板进行摆放,使之与从他自己的视点*A*(棕色、灰色、绿色)看到的模型一致。然后,保持纸板摆放的顺序不变,儿童将它们拖到木板上最靠近玩偶的角落。最后,对于位置

D(灰色、绿色、棕色),他又一次把它搭建成从视点*A*看到的模型,为了把它放到木板的左边也就是模型中最靠近*D*的一边,儿童将之旋转90°。

拉茨(6;7) 坐在*A*的位置,要求他搭建出在视点*B*(*A*的右边)所看到的模型。他拿起灰色纸板,把它放到木板上并朝向*B*,然后添加了棕色纸板,把它放到灰色纸板的左边(尽管不是在它的后面,他本应该放的位置),也朝向*B*。最后,他拿起绿色纸板并且把它放到其他两块纸板的右边(就像从视点*A*看到的),并且旋转了90°。因此,结果就好像是,视点*B*的观察者可以看到看到视点*A*的景观。

安(7;0) 坐在视点*A*时,可以搭建出从视点*A*看到的模型,坐在视点*C*时,可以搭建出从视点*C*看到的模型。同样地,当坐在视点*C*时,他可以凭记忆搭建出从视点*A*看到的模型。当他仍然还坐在视点*C*时,要求他搭建出从视点*B*看到的模型,他回答说,"它会和从视点*A*看到的模型一样。"然后开始以棕色、灰色、绿色的顺序摆放纸板。然后,要求儿童坐在视点*B*的位置,对他刚才所搭建的模型进行更正。实验者坐在视点*D*(对面):"猜一下,对于我来说,模型看起来是什么样子的。"安坐在视点*B*,对纸板进行摆放,就好像是在复制从视点*B*看到的景观。但是,他却没有把它们的底部放在木板上最靠近他的位置,他对它们进行了很大程度的翻转以使得它们的底部朝向视点*D*,但是没有改变它们的顺序。通过这样的方式,他认为在视点*D*的实验者能够看到翻转过来的三山。事实上,从视点*B*看到的三山顺序依次是绿色、棕色、灰色,从视点*D*依次是,灰色、绿色、棕色。

旺(8;3) 坐在视点*A*,并且试着去搭建从视点*C*看到的模型。他把灰色纸板放在右边,绿色纸板在中间,棕色纸板在左边。完成这个后,他犹豫了片刻,把绿色纸板再一次捡起来并且放到灰色纸板的右边,结果就是从视点*A*看到的景象。然后,他试着去搭建从视点*D*(灰色、绿色、棕色)看到的模型,并且说"首先看到的是棕色的山",这表明儿童清楚地知道棕色的山在视点*D*的前景位置。然而,在这个充满希望的开端之后,他又开始搭建从视点*A*看到的模型,但是把所有的纸板都推到木板上最靠近*D*的一边。在这之后,他坐到视点*D*的位置,并且要求他搭建出从视点*C*看到的模型。他把纸板的底部朝向*C*,顶端指向*D*,但是三块纸板的前后、左右关系,仍然是与视点*D*(也正是他自己所坐的位置)对应的。当他仍然还坐在视点*D*的时候,旺试着去搭建从视点*A*看到的模型,发生了类似的情况。他又一次把灰色纸板放在左边,绿色纸板放在右边,并且相对其他纸板来说比较高,把棕色纸板放到右边靠近底部的位置(因此重新搭建出从视点*D*看到的模型),但是他转动纸板使得底部朝向*A*,顶端朝向*C*。

儿童开始尝试着去改变物体间的相对位置,这是很有趣的现象,因为它是2A亚阶段的空间自我中心和3A亚阶段开始出现的真正相对性之间的过渡。当然,儿童并没有根据观察者的视点改变三山之间的关系,他认为三山作为一个整体而言是固定不变的,

因此仅仅改变了观察者和作为一个整体的三山之间的关系。因此，在儿童还不能关注三山内部的上下左右关系时，他们认为观察者看到的模型总是一样的，在搭建从新的视点或者方向上所看到的模型时，他们的处理方法仅仅是把模型转向另一边。换句话说，就是将模型设法转向观察者的方向，却没有改变它的模式或者内部的排列顺序。

不管玩偶的视点是什么，所有的儿童无一例外地倾向于从自己的视点出发来搭建模型，这一事实清楚地表明这些视点与单个的错误-绝对视点是“绑定”的。并且应该注意到，不仅在实验的开始，而且在结束的时候，他们对自己的表现非常满意，并且完全相信他们搭建出了从观察者视点所看到的模型。显然，如果从视点A处看，棕色的山在左边，绿色山在右边，那么从C处看，它们将是相反的顺序。但是这一阶段的儿童并不比前一个阶段对此有更好的理解。他们同样不能理解这样一个事实，那就是如果从视点A看灰色的山在背景位置，那么从视点C看，它就会出现在前景位置。

左右、前后关系至今对于儿童来说还是不真实的。那也就是说，这些关系没有随着观察者位置的改变而进行翻转或相应的顺序调整。前后、左右关系是三山不变的、固有的属性，这些关系只被定义一次，然后对于所有的视点都适用。

儿童至今还不能思考射影关系的“群集”和对应性，不能在无数射影关系的改变中识别出对应性的稳定性。取而代之的是，他注视着某种僵化的、理想的“图片”。儿童认为只有这张“图片”(被视为一个“僵化的整体”)，才可以被转向不同的方向。

结果所呈现的这种现象，与我们在研究顺序关系时所遇到的、称之为“僵化的系列”的概念是类似的[①]。在那里，处于相同阶段的儿童不能分离一个系列并且从中间开始复制它，而是仅仅能够以一个“整体”去复制它。在现在的实验中，儿童认为尽管视点在变化，但是属于一个视点的关系和属于另一个视点的关系之间是不可分离的，虽然儿童也同时在尝试着对它们进行区分。

此时我们可以看到，儿童开始尝试着区分不同的景观，这一接近真正相对性的表现预示着第三阶段的出现。尽管儿童认为三山的外形是固定的、不可改变的，并且应该被同化为明确的、具体的表象，但是他们已经意识到其他观察者同化的表象和自己的尽管相似但并不相同。为了表明这种不同，他们将搭建好的模型转向观察者的方向，以使得观察者可以从正面看到搭建好的模型，但是模型的“内容”仍然没有改变。因此，儿童认为所有的观察者看到的三山和从自己的视点看到的三山是一样的。这确实是区分不同视点的开始，但是儿童的自我中心仍然在这个过程中扮演着重要的角色。

因此当奥坐在视点A，尝试搭建从视点B看到的模型时，他最后所搭建的模型是与视点A对应的，但是纸板指向玩偶，对于所有的视点都重复这个过程。同样的事情也发生在旺等儿童身上。拉茨、安和旺首先按照他们自己看到的模型摆放纸板，然后将每块纸板转向观察者，因此每块纸板的底部离观察者最近。这些儿童没有去考虑观察者在

① 见《儿童的运动和速度概念》，第二章、第三章。

左边、右边还是正对面，因此忽略了观察者的位置与儿童自己的位置是否对称。这样一来，尽管每一块纸板的方向改变了，三山之间的关系还是保持不变的，而没有进行翻转（或者只是偶然地被儿童翻转）。

因此，在这个阶段，儿童只是获得了部分的相对性，他们还是从整体上考虑问题，没有从细节上进行分析。他们仅仅考虑了作为一个整体的三山模型和观察者的关系，而没有考虑每一座山与观察者的关系。一种知觉或心理的关系只有当它能够在一个总体的群集（所谓群集就是将特定关系的不变性（在这里，指的是视点之间的相似）和其他关系的可变性（前后、左右关系，以及距离和明显的形状）结合在一起）中和其他的关系进行协调，我们才可以把这种关系当作一个概念，因为这里儿童还没有对关系进行“分组”（grouped），所有我们只能将其视为“前概念”。

方法2，它能够使我们对这些问题的细节和“群集”进行深入仔细的研究。因为它使用的是已经准备好的图片，可以让我们对大量关系进行比较。

菲尔（6;10） 在视点A（从左到右：棕色、灰色、绿色），玩偶在视点D附近（灰色、绿色、棕色）。从视点A看，玩偶位置最突出的特点就是离灰色的山近。菲尔选了一张图片，在这张图片中，灰色的山在前景位置且在右边，绿色的山在左边，棕色的山被绿色的山挡上了。“为什么是这一张？——*这一张符合要求。灰色的山在前面。他在右边靠近灰色山的位置。他最先看到它，因此它也是第一个*。”他排除了一张图片，在这张图片中灰色的山在左边，棕色的在右边（和视点D一样），并且说，“*棕色的山是第一个，不会是这张*（因此第一个意思就是“在右边”）。”菲尔选择了另一张图片，在这张图片中（从左到右）为绿色、棕色、灰色，“*这张也对，灰色的山在第一个*（等于在右边）”，并且最终舍弃了正确的那张图片，“*不会是它，灰色的山不在第一个，它在相反方向*”。换句话说，这张图片被舍弃是因为灰色山在左边，然而从菲尔的位置看，灰色山在玩偶的右边。

若斯（6;9） 坐在视点A（棕色、灰色、绿色），玩偶在他的右边视点B（绿色、棕色、灰色）。若斯选择了与视点D（在B的对面，灰色，后面绿色、棕色）所对应的图画，说，“*它们是一样的，小人也在绿色的后面*。”这是从视点A看到的玩偶位置，而不是实际的玩偶位置。若斯也选择了与视点A对应的图片（“这个也对”），但是舍弃了其他的。当要求他在两张图片中做出选择时，他最终选了第一张，“*因为绿色的在后面*”。

吉斯（7;7） 在视点A，玩偶在他的前面，但是在棕色山和绿色山中间；然后，他选择了与视点D相对应的一张图片（灰色、绿色、棕色），为了证明自己的选择是合理的，他用手在山周围做了一个圆周运动，“*就像这一个*”。事实上，他选择这张图片是因为棕色山在前景位置。相对其他两座山而言，玩偶似乎更接近棕色山的山脚下（当从视点A看时）。

埃利(7;11) 在视点A,玩偶在视点B(绿色、棕色、灰色)。他选择了与视点D相对应的图片(灰色、绿色、棕色),并且说,"*我认为是这一个,因为他在棕色山的前面*。"在图片中,棕色山在前景位置,然而实际上玩偶应该看到它在背景位置。除此之外,他没有考虑其他关系。

切尔(8;1) 在视点A,玩偶在视点B。切尔注视了好久玩偶和与他自己的位置A所对应的图片。但是,像埃利一样,他选择了与位置D(B的对面)对应的图片,"因为小人在绿色山的后面,在这里(在图画中),绿色山在后面"。因此切尔颠倒了前景位置和背景位置,因为他认为玩偶从视点B看到的和自己从视点A看到的是一样的。完成这个以后,他也选择了正确的图片(与视点B对应的)。并又一次拾起与自己的位置相对应的图片。最终,他选择了后者,"*是的,这个更好一些,因为你可以更好地看见灰色山*(就像从视点A看到的)"。

这些典型的案例是值得我们注意的,因为这里有两个一致的、互补的错觉。首先,即使儿童努力去理解玩偶的"视点",他们仍然非常确信三山之间的关系是僵化的、固定不变的,所以仅仅考虑一个从玩偶的位置看起来比较突出的特征,就好像没有必要去考虑所有的关系;或者说,这一个关系隐含了剩下的所有关系。

因此,看到玩偶在棕色山的对面,埃利选择了一张棕色山在前景位置的图片,而不去考虑棕色山相对灰色山和绿色山的关系,也不去考虑三山与玩偶的关系。这个"突出特征"的选择很明显与我们目前所得到的结论紧密关联。因为在儿童的眼里,山形成了一个僵化的"整体"并独立于视点,他认为正确地描述一种基本的关系就会自动地引出剩下的关系。

然而,即使"突出特征"也并不总是能被正确地提出来,因为儿童总是从他自己的视点出发来判断问题,而不是从玩偶的视点。因此就出现了第二种错觉。尽管尝试着去区分不同的视点,并且相对于观察者的视点去观察物体,但是这一阶段的儿童仍然被自我中心的错觉主导着。对于前后关系,若斯和切尔的例子对此进行了很好地阐述。比如,当若斯说"*这是同样的东西,因为小人在绿色山的后面*"时,他完全从自己的视点出发去考虑问题。对于左右关系,同样被两个小孩很好地阐释,菲尔的反应更具有启发性:"*不会是那一个,灰色山的位置是错误的*。"他从自己的视点出发进行阐述,就好像玩偶所看到的模型被以错误的方式颠倒了。无论他们是否局限于"突出特征",就儿童而言,左右、上下关系目前还不是真正相对的,因为它们不能随着视点的改变而改变。另一方面,尽管儿童仍然很大程度上受自己视点的影响,但是他们不再完全地以自我为中心了,因为很明显,儿童已经试着把自己放在玩偶的视点,并且相对于玩偶建立前后、左右关系。结果就出现这些"前概念",它们是自我中心的错误-绝对和分组射影关系的完全相对性之间的过渡。

乍看之下,这两种错觉可能与儿童对方法1的反应是不同的,在方法1中儿童搭建

从自己的视点看到的模型,然后把搭建好的模型转向玩偶。但事实上,使用这种方法的儿童同样受到单一"突出特征"的影响,因为不能确定不同特征之间的关系,他们必然一步一步地搭建从自己的视点所看到的模型,尽管他们自己没有意识到。使用第二种方法,给儿童呈现的是早已经准备好的图片,只要他看到了突出特征便不再考虑其他的关系,只选择和突出特征一致的图片。只有试着从细节上分析关系时,他才能把这些关系同化到自己看到的景观中。因此,尽管这些反应存在明显的差别,但它们是同质的,都以一种或另一种形式体现了2B亚阶段的过渡性特征。

方法3,当要求儿童给一张图片找出对应的位置时,这一亚阶段的儿童假定:每一个明确的、可识别的位置都对应着特定的景观。这毫无疑问地表明儿童开始尝试区分不同的视点。但是,儿童还不能正确地想象景观和位置的关系,因为这种关系还处在"前概念"(方法2中描述到的)水平。这一点儿也不惊奇,因为这仅仅是相同的问题不同的表现形式而已。

若斯(6;9) "你可以从哪儿看到相同的图片?——*不,从任何位置都看不到这样的景观*。——好吧,那么找到一点,从那里小人可以看到这张图片(位置*D*:从左到右,灰色、绿色、棕色)。——(若斯依次把玩偶放到每一座山的顶点。)——你为什么那么做?——*因为在顶端,你可以更好地看一座山*。——但是小人从哪儿看到这张图片?——(他把玩偶放到棕色山的山脚下最靠近A的一边。)——他看到的是这张图片吗?——*不,因为灰色山不在这一边*(若斯注视了很久灰色山,不仅从图片上也从模型上,然后把玩偶放到棕色山和绿色山之间,灰色山的对面)。——是这个吗?——*不,最好这样*(在三座山之间)。——为什么?——*因为他在绿色山的后面。这里*(图片中)*绿色山在后面,他*(模型中)*在绿色山的后面。就是这个*。"

安(7;0) 在前面已经描述过他对方法1的反应。他寻找一个和图片相对应的位置。在图片中,棕色山在前景位置,绿色山在右边,灰色山在左边(在*A*和*D*之间的一个位置)。他把玩偶放到棕色山的山脚下,但是在他的一边。"*在这里,小人会首先看到棕色山,然后是其他的*(手的圆周运动)"。棕色山在右,灰色山在左,绿色山被棕色山遮挡。安把玩偶放在棕色山的前面,也就是说相对于他自己的位置。"*在这里他用一只眼睛看到棕色的山,另一只眼睛看到灰色的山*"。

谢(7;4) 对于图片*D*,把玩偶放到棕色山的山脚下(几乎正确)。对于图片*B*,放到绿色山的对面(正确)。"*因为他仅仅能看到一半的灰色山和全部的绿色山*"。但是,后来把它移动到绿色山的山脚下,"*因为在这里,他在绿色山附近,他能够更好地看它。当你更近一点的时候,你能更好地看到它的全部*"。

伊尔(7;6) 对于同样的图片,他也把玩偶放到绿色山的山脚下,"*因为他在绿色山的附近,他会更好地拍到绿色山,并会将绿色山看得更完整一些*"。

贝尔(7;7)　对于与位置D对应的图片，他把玩偶放到棕色山的山脚下，但是最靠近他的一侧，“*因为他就是在棕色山的对面。——你还能把它放到其他位置吗？——是的，这儿，棕色山也在对面，正好在绿色山的对面。*”

范(8;2)　对于与位置B相对应的图片，他把玩偶放在棕色山的山脚下，朝向A。“为什么？——*绿色山应该在左边(在图片中就是这样)，因此我把小人放在左边(但是在他自己的左边，因此也在绿色山的左边)。*”

我们需要将这些结果和在2A亚阶段使用同样方法获得的结果进行比较，去判断儿童在这个过程中取得的进步。在2A亚阶段，无论呈现什么样的图片，儿童总是把玩偶放到自己的位置或者山的中间——两种把玩偶的视点和自己的视点混淆的方式——然而处于当前发展水平的儿童试着为每一张图片找到确切的视点。换句话说，从现在开始他们承认，我们在每一个视点看到的景观都是不同的。但是，在尝试区分不同的视点时，他们仅仅能够以前概念为基础进行推理，而不能在相互转换的系统内以“分组”为基础进行推理。全部的前概念仍然集中于儿童自己的视点而没有去中心化，只有通过去中心化，对应性的稳定性才能够与关系的多样性进行协调。

这些前概念中(或者是前关系)最简单的就是拓扑邻近性，尽管没有考虑射影差异就被运用。这包括把玩偶放到图片中呈现的主要元素附近，而不考虑透视或距离。这与我们在2A亚阶段看到的反应是类似的，在2A亚阶段：儿童将玩偶放到三山中间或者山的顶峰，这样可能能更清楚地看到总体(在采访若斯时我们又一次看到)。但是，现在并没有把玩偶放到山的顶峰或中间，他们开始把玩偶放到山(在图片中位于前景位置的山)脚下，并且尽可能地靠近它。正如谢说的，“*当你更近一点的时候，你能更好地看到它的全部。*”(或者像伊尔解释的，“*他能够更完整地看到它*”)一个人离山越近，就越能更好地观察它，这一观点在这一阶段是非常典型的。一方面，相对之前儿童混淆玩偶的视点和主体的视点而言，上述表现体现出了明显的进步。因为他们尝试把玩偶放到它应该看到的景观对面，而不是把它放到自我中心景观的“绝对”位置。另一方面，拓扑邻近性的概念对于解决射影问题的价值很小，因为它既不能考虑如何选择一个视点，以使得从这个视点看到的景观和图片中全部的景观对应，也不能考虑为了看到山的全貌，观察者需要和山保持多大距离。显然，由于缺乏经验，这些儿童不会以这种方式做出反应，因为他们自己已经发现，在近距离范围内是看不到萨利夫山和侏罗山的全貌的，而当再遇到这样的问题时，他们还是会欣然同意。把玩偶放到最突出的物体附近可以被视为自我中心的“残留现象”，因为把玩偶放到山(在所呈现的图片中处在前景位置)的附近，玩偶看到的山和儿童自己看到的山是一样的。更确切地说，这体现了儿童仍然不能完全区分他自己的视点和玩偶的视点，这在过渡阶段是很典型的。

除了在深度或距离上的错误(它们是这种方法所特有的)，使用前两种方法出现在左右关系上的错误，在这里也再次出现了。

比如，范发现绿色山在其中一张图片的左边（也就是棕色山和灰色山的左边），他把玩偶放到左边，既是绿色山的左边也是他自己视点的左边！“*绿色山应该在左边。*”他解释说，尽管事实上“在左边”就目前儿童所知道的而言，还不是真正的关系（*就像关系“在灰色山的左边*”），但是或多或少是一个稳定的属性或者准绝对的属性。因此，很有必要在儿童在往左边放玩偶的时候，问他“在谁的左边”?（事实上，当然是在一个人自己的左边）？同样地也适用于前后关系。比如，若斯试着找与图片对应的位置，在图片中绿色山在后面。他将玩偶放在绿色山的后面。这种对前后、左右的解释是由于无意识的自我中心造成的，而不仅仅是由语言习惯造成的。比如，在贝尔、安等的例子中，这些解释就是含蓄的、非言语的。因此，当应该把玩偶放到绿色山的后面时，我们发现贝尔把它放到了前面。也就是说，相对于他自己而言是在正前方。同样地，安把玩偶放到棕色山的前面，然而从他的视点玩偶应该在棕色山的后面。总之，所有的前后、左右关系，仍然处在一个前概念阶段，在这个阶段，儿童完全根据自己的视点而非观察者的视点进行评价。

现在假设儿童和三座山中任意一座的关系仍然很大程度上是自我中心的，那么根据玩偶的视点，他将如何去处理这座山和其他两座山的关系？就这一发展阶段的儿童而言，答案就是：根本不会存在这样一个问题。因为对于他们来说，三座山之间的关系不会随着位置的改变而变化，三座山形成了一个不变的整体，并且与从他们自己的位置所看到的一样。结果，只要玩偶相对于三座山中的一座山站立，那么它看到的其他两座山必定和从主体所坐位置看到的一样。正如当安把玩偶放在棕色山的前面时说，“*就是这儿，小人首先会看到棕色山，然后他会看到其他的两座山。*”换句话说，如果一种关系已经定下来了，其他关系也会自然而然地定下来。就像方法1指出的，三座山仍然形成一个固定不变的排列（就像一架飞机），这个排列也许会相对于观察者进行旋转，但是它的内部关系是一定的。这就是为什么在决定观察者的位置时，儿童只需找到一个参照点就已经足够了，因为在这个静态的、不变的整体内，其他关系是由这个主要或关键的关系所决定的。

当对使用方法3获得的结果的某些方面进行适当考虑之后，比如把玩偶放在靠近山的位置，因为玩偶可以更好地以一个整体来观察山，很明显这些结果与使用其他两种方法得到的结果很大程度上是一致的。确实是这样，不仅是关于左右和前后关系的前概念，而且关于被视为整体的三山不变的特性。

因此，我们可以这样总结出这一亚阶段的总体特征：即萌芽的、不完全的“相对性”概念。这个概念是“不完全的”，因为它仅仅把观察者的位置和三山当中的一座山相联系。这座山和剩下两座山之间的关系在现阶段是被忽略的，然而在真正的相对性条件下，它们是紧随观察者位置的变化而改变的。

与2A亚阶段相比，现阶段儿童已经向真正相对性迈出了明确的一步，在某种程度上，已经有了这样的意识：当观察者所站位置不同时，物体看起来是不同的。但是，这个

意识无论如何都不够成熟，还没能使儿童理解景观和它们的相对性。

感觉运算阶段的儿童最初是不能调整物体方向的。在能够将它们转向某一特定的位置或者相对于其他的物体(包括他自己身体的部分)来摆放它们之前，他们必须学会相对于他们自己来调整物体方向。同样，我们发现：现阶段的儿童将相对性仅仅应用于主体自身而没有应用于其他物体。确实，他尝试着把三山和观察者的每一个位置联系起来，但是却没有意识到三山之间的关系会随着位置的变化而变化。这就是为什么当使用方法1时，儿童总是从自己的视点出发搭建模型，然后将搭建好的模型转向观察者。同样的原因，当使用其他两种方法的时候，他愿意选取某个关键的特征为参照点，并且依照它做出决定，而不考虑其他的关系。由于前后、左右关系还保留着“绝对的”特征，因为它们仅仅是相对于儿童自己的视点而言的，因此突出的关系仅仅可以被称为前概念的。

第四节　第3A亚阶段：真正的但是不完全的相对性

第三阶段的突出特征就是儿童发现：三山之间的左右、前后关系(忽略上下)是随着观察者的位置而变化的。然而，因为三座山在不同的距离上，这些关系是多种多样而且复杂的，因此儿童不可能立即掌握它们，也不能将这些关系协调为一个整合的整体。因此，我们发现了一个过渡阶段，这个阶段介于自我中心(2A亚阶段和2B亚阶段)和一个完全客观的群集之间。这个阶段就是3A亚阶段。

方法1，清楚地揭示了这个阶段的过渡性特征，因为儿童的某些表现确实有实质性的转变，然而某些表现仍然有空间自我中心的特点。

伊尔班(7;4)　在*A*的位置(从左到右：棕色，灰色在背景位置，绿色)，要求他搭建出从对面的视点*C*看到的模型。他站起来看了看模型的顶端，然后拿起灰色纸板并把它放在木板上，把绿色纸板放到灰色纸板右边并挡住了部分的灰色纸板。接着，他把棕色纸板放在灰色纸板的后面。“*他看到了灰色山的全部，没有看到绿色山，看到了一点棕色山*”。因此，儿童可以用语言正确地描述*C*处的景观，但是在实际摆放的过程中却仍然犯了一个错误：儿童是根据自己的视点摆放绿色山的。要求他搭建从位置*B*看到的模型(在位置*A*的右边，绿色、棕色和灰色)。伊尔班首先正确地把灰色纸板放在右边，但是后来却把它移到了中间；像从他自己的视点看到的那样，将绿色纸板放到右边；最后把棕色纸板放在了左边。结果搭建的模型就是从视点*A*看到的，但是伊尔班自己进行更正，“不，棕色的在中间。”他把搭建好的模型拆掉，首先把灰色纸板放在左边，然后又移到了中间，绿色纸板在右边，棕

色纸板在绿色和灰色纸板中间，但是在灰色纸板的下面，并且说，“*我看到了灰色山和绿色山的全部，但是仅仅看到了一点棕色的山。*”可以看到在这种情况下，灰色山和绿色山之间的关系与从他自己的视点看到的模型对应，但是棕色山是与从视点*B*看到的模型对应（除了部分的棕色山应该在绿色山的后面，而不是在灰色山的前面外，最后这个关系也与从他自己的视点看到的模型对应）。

然而另一方面，儿童正确地搭建出从视点*D*（视点*B*的对面）看到的模型（在尝试和错误之后）。然后，让儿童离开视点*A*坐到视点*D*，他发现自己搭建的模型是正确的；当他坐在视点*D*的时候，要求他搭建出从视点*B*看到的模型。伊尔班把棕色纸板放到绿色纸板的后面：“*如果我坐在那儿，可以看到灰色山和绿色山的全部，但是棕色山就像这样（在背景位置）。*”因此，伊尔班成功地改变了前后关系，但是左右关系仍然没有改变。因此，从这方面来说，他仍旧受到自我中心的影响。

然后，要求儿童搭建从视点*A*看到的模型（坐在*D*），或者换句话说与他最初的位置对应的模型。他把灰色纸板放在左边，棕色纸板放在中间（在灰色纸板上面一点），绿色纸板放在右边且在棕色纸板的上面。“为什么？——*因为如果我在那儿，我可以看到绿色山、棕色山的全部，但是只能看到一点灰色山。*”因此，像前面一样，伊尔班一点一点再现出三山的前后顺序，但是灰色山仍然在左边，棕色山在右边，就像他从视点*D*看到的一样。同样地，当后来在视点*B*，要求他搭建出从视点*C*看到的模型，他把灰色纸板放在右边，棕色纸板放在左边，就像从视点*B*而不是视点*C*看到的。同时，他正确地把绿色纸板放在背景位置，就像从视点*C*而不是从视点*B*看到的。

雷斯（8;1）　在视点*A*，并且尝试去搭建从视点*D*看到的模型。他把灰色纸板放在右边，棕色纸板放在左边，没有去管绿色纸板。“就这样吗？——*是的，因为你看不到绿色山，它太远了。*”因此和伊尔班、雷斯一样，他正确地再现出三山的前后顺序，但是仍然基于自己的视点对左右关系做出判断。

埃克（9;0）坐在视点*C*，搭建从视点*B*看到的模型。他把棕色纸板放在中间，绿色纸板放在右边，灰色纸板放在左边前景位置。因此，棕色山和灰色山的前后关系是正确的，但是棕色山和绿色山的前后关系是不正确的（它们和*C*相距的距离相同）。而且，把棕色纸板正确地放在中间，但是把灰色纸板放在左边，就像从视点*C*看到的那样，而不是在右边，就像从视点*B*看到的那样。同样的方式，对于视点*A*，坐在视点*C*的儿童把灰色纸板放在中间，绿色纸板放在左边，棕色纸板放在右边且在灰色纸板的后面。因此，灰色山和绿色山的前后关系是正确的，但是灰色山和棕色山的前后关系是不正确的，而且绿色山和棕色山的左右关系被颠倒了，这些不正确的位置关系是儿童从自己的视点看到的。和这些相反的，后来在视点*A*，儿童正确地搭建了从视点*B*和视点*C*看到的模型。

阿尔(9;2)和最后的这两个儿童相反,他考虑到了从左右关系的改变,但是却没有考虑到前后关系的改变。坐在视点A,他试着搭建从视点D看到的模型。他把灰色纸板放在左边,绿色纸板放在右边,棕色纸板放在两者之间,这些都是正确的。但是,他没有正确地再现出它们的前后顺序。同样地,对于视点C,尽管他正确地再现了灰色纸板和绿色纸板的左右顺序,但是他把灰色纸板放在绿色纸板的后面而不是前面等。

因此,这些反应恰恰是真正的相对性与前面阶段的反应的过渡。最后,儿童意识到观察者位置的改变引起了三山内部关系的改变,这些内部关系将三山的不同部分连接在一起。他不再局限于仅仅考虑静态的"整体"和观察者之间的关系。伊尔班知道如果从视点A看灰色山在背景位置,那么从视点C看它就在前景位置,它的相对位置已经改变了。阿尔能够明白这样的事实:如果从视点A看,棕色山在灰色山的左边,那么从视点D看,棕色山就在灰色山的右边。这种对内部关系改变的理解,与第二阶段相比是具有决定意义的一步,并且标志着第三阶段的开始,这与我们在第六章和第七章得到的结果是完全一致的。

然而,伴随着这些正确的解决方法,尽管儿童受自己视点的影响越来越小,但是过去的错误也还在重复。在多数情况下,这些错误伴随着左右关系出现,儿童在颠倒前后关系上存在很少的困难。尽管总体上是这样,但也存在例外,比如阿尔。出现这种倾向的原因其实相当清楚,因为儿童更容易觉察到前后关系。直觉地也就是说自我中心地,一个距离较远的背景位置和一个直接接触的前景位置之间的差别要比同等距离的左边位置和右边位置之间的差别更大。因此,儿童可以翻转前后关系。前后关系对视点的变化也更具有反应性,比左右关系的翻转出现地更早。

方法2,在同样的阶段,用方法2得到的结果与用上述方法得到的结果在某些方面是一致的,但是某些方面是不同的。

施弟(8;1) 当玩偶在视点D(棕色山在前景位置,绿色山在右边,灰色山在左边背景位置),他选择了一张与视点A对应的图片,"*因为那儿看不到灰色山的全部*"。他也选择了另外一张图片,在这张图片中棕色山在左边,绿色山在右边,灰色山在中间,"*这样就对了,他看不到灰色山的全部,它在更后面。*——哪一个是最正确的?——*它们都是正确的,因为你看不到灰色山的绝大部分。*"因此,施弟仅仅考虑到了在视点D,灰色山在背景位置,没有考虑到左右关系,左右关系仍然是与他自己的视点对应的。

列伊(8;3) 当玩偶在视点B灰色山在右边,绿色山在左边,棕色山在中间背景位置),他犹豫了,不能在正确的图片和与视点D(在视点B的对面)相对应的图片之间做出选择。他认为前者是正确的,"*因为棕色山在中间*"。但是第二张看起来

也是正确的，"*因为棕色山也在中间。*"在此之后，他根据三山之间的前后关系做出选择，但忽略了左右关系。

戴尔（9;2） 在视点A，玩偶在视点D（灰色山在左边，棕色山在右边，绿色山被棕色山挡住了）。戴尔挑选出了正确的图片，并且解释："*从这儿看*（只要能够看到）*绿色山在后面。*"然而，他认为与A和D之间的某个位置相对应的一张图片也是正确的，"*因为在这张图片里，绿色山也在后面*"。但是却没有注意到在这张图片中，棕色山在灰色山的左边，而在正确的图片中其顺序是相反的。玩偶在视点B，戴尔首先也选择了与A和D中间的某个位置对应的一张图片，"*因为在那儿他不能很好地看到灰色山*"。最后他选择了正确的图片，因为在图片中，棕色山在背景位置。

和使用方法1获得的结果一样，儿童获得的也不过是一些有限的改变、部分的相对性，因为他仅仅考虑了一种关系而忽略了其他的关系。同时，对于被他忽视了的关系，他自己看到的景观和他选择的图片之间的联系与使用第一种方法得到的不完全一样。

我们必须澄清：在上面的实验中儿童正确再现的关系，不同于我们在2B亚阶段定义的"突出特征"。这些"突出特征"或者是错的，或者仅仅考虑了观察者和其中的一座山之间的关系，而没有考虑这座山和其他两座山的关系。与此不同，现阶段的儿童选择的关系，比如施弟把灰色山放在背景位置等是真正的相对性的表现，并且是这个阶段的主要特征。

另一方面，一些关系被忽略并不完全是由于儿童自己的视点仍然占据首要位置。它可以更好地被描述为仍然存在的"僵化的整体"的意识，但是以一种新的微妙的形式出现。儿童不再认为：随着视点的改变，三山之间的关系是保持不变的。但是他们有这样的一个内隐的假定，即改变这些关系的其中一种，其他的关系会自动改变，因此没有必要单独改变每一种关系。

方法3，当我们在2B亚阶段使用方法三时，儿童的典型反应是：把其中的一座山当作参照点，并且将玩偶尽可能地向其靠近，而不考虑角度或者距离。同样的，在3A亚阶段，儿童也只集中注意在一种关系上，把它当作参照点，而忽略其他的关系。但是就像我们刚才从第二种方法看到的，目前儿童能够对一种关系进行旋转，这种关系既是所参照的山和其他两座山之间的关系，也是玩偶和三山景观之间的关系。这些关系中只有第一种，就是参照的山和其他两座山之间的关系，是没有尝试去证实的，就好像它是不证自明的。这里有一些例子，第一个例子中的儿童的发展介于2B亚阶段和3A亚阶段之间。

阿尔克（8;0） 对于与视点A（他自己的位置）对应的图片，他把玩偶放在绿色山的半山腰，然后放在棕色山和绿色山之间，面向灰色山。"*最好像这样*"。给他呈现与视点D（从左到右：灰色山、棕色山、绿色山，棕色山在前景位置）对应的图片。

阿尔克把玩偶放到棕色山的山脚下:"为什么? ——*因为棕色山在中间*。——他从那儿可以看到灰色山吗? ——(他研究了几分钟模型,然后把玩偶移离山脚,放到和棕色山相距一定距离的位置。)"阿尔克起初的表现与2B亚阶段的表现是一样的,但是他将玩偶移离山脚和下面即将描述的表现是第三阶段典型的表现。给他呈现一张图片,在这张图片中,棕色山在左边,绿色山在右边,灰色山在中间且在背景位置。阿尔克将玩偶放到棕色山的右边,因此可以从远处看到绿色山,但是完全看不到灰色山。对于灰色山在左边,棕色山在右边,绿色山被棕色山遮挡的图片,他把玩偶放在灰色山和绿色山之间,但是面向灰色山和棕色山,这表明他明白:虽然玩偶在绿色山的山脚下,却不是必须要看它。不幸的是,在这个位置上灰色山在右边,棕色山在左边。

接着当图片中呈现的是:绿色山在右边,棕色山在左边,灰色山被遮挡,儿童把玩偶放在灰色、绿色和棕色山之间,背对着灰色山,因此它只能看到其他两座山。然而,在这个位置上,绿色山在左边,棕色山在右边。最后,给阿尔克呈现一张从任何一个视点都不可能看到的图片。在图片中:绿色山在左边,棕色山在右边,灰色山在中间的背景位置。然后,阿尔克把玩偶放在这样的一个位置上:灰色山在背景位置,"*因为他会看到灰色山的一小部分,还会看到其他两座山*"。但是,他没有注意到棕色山和绿色山之间的左右关系。

格拉(8;0)　对于与视点B对应的图片,他把玩偶正确地放在位置B,"*因为小人必须能看到绿色山的全部*"。对于与视点A对应的图片,他也将玩偶正确地放在位置A,"*因为这两个(绿色山和棕色山)在前面,灰色山在后面几乎看不到*"。但是,对于另一张图片,灰色山在右边前景位置,绿色山在左边一半被挡上了,他把玩偶放在绿色山的对面且距绿色山有一定距离;然后,他把玩偶移到三座山之间背对棕色山,但是绿色山在左边而不是右边,灰色山在右边而不是左边。"那是正确的位置吗? ——*是的,因为他可以看到这两座山*(绿色山和灰色山,但忽视了两者的左右关系)。"

罗布(8;1)　对于与视点D相对应的图片,他把玩偶放到了正确的位置,面对着棕色山,"*因为棕色山在中间*"。但是在这个位置上,左右关系却被颠倒了。第二张图片也是一样。

李(9;0)　相比前面所述的儿童,他的发展较快。因为他尽力依次去考虑每一种关系,因此提前进入了3B亚阶段,但是他还不能将它们进行综合。对于与视点B对应的图片,一开始他把玩偶放在绿色山的后面,然后他改变了主意,"*那是不对的,因为如果照那样的话,是看不到绿色山的*"。然后他把玩偶放在绿色山的前面。"为什么你之前把它放在绿色山的后面? ——*因为它的前面有灰色山*。——那这儿对吗(指着另外一个点)? ——*不对,它看不到在前面的灰色山*(他把玩偶放在三座山之间)。*不,在那儿他看不到绿色山。那儿*(一个新的点)*灰色山在绿色山的*

前面，但是他看不到棕色山（他把玩偶转过来，因此它看不到棕色山）。*不，他能看到。我找不到答案。*"给他呈现一张与B附近的位置对应的图片："*在那儿，他只会看到灰色山的一小部分……不，棕色山在后面*（他把玩偶放在视点A），*在那儿，我们……不，他看不到灰色山*（他把玩偶推到B附近），*在那儿他能看到灰色山的一小部分*（犹豫）。*如果它能再大一点儿*（图片中的灰色山），*这儿就对了。*"可以看到李已经非常接近正确的答案，尽管他自己不能确信。

这些结果和用方法1和2得到的结果是类似的。儿童以选择任意一种关系开始，只要这种关系是三座山之间的且是所参照的山和玩偶之间的关系（对于参照的山和玩偶之间的关系，现在儿童不再像2B亚阶段常见的那样，把玩偶尽可能放在靠近山的位置，而是放在一定距离之外）。选择这种关系为开始点，表明儿童开始理解真正的相对性和景观。但是，这个开始并没有很好地坚持到最后，这种理解仍然是不完全的。因为在这个阶段，儿童不能决定玩偶和其他两座山的关系，不管是左右关系（格拉），还是前后关系。当儿童，比如说李，尝试协调所有的关系时，他仅仅取得了很小的成功。

第五节　第3B亚阶段：景观的完全相对性

很明显，从3A亚阶段关系的部分相对性到完全相对性，是连续的发展过程，在这里我们将会给出以下例子。

方法1，我们发现用三张有图案的纸板搭建模型要比从一系列图片中选择与三座山对应的图片容易得多，因为后者包含了纯粹的心理过程。因此，相对使用其他两种方法而言，我们使用第一种方法能更早地找到正确的解决途径。

圣（8;1）　坐在A，要求搭建从视点C（他的对面）看到的模型。他把灰色纸板放在前景位置，把棕色纸板和绿色纸板放在背景位置（但是左右关系颠倒了）；然后，要求他搭建出从视点B（灰色山在右，绿色山在左，棕色山在中间背景位置）看到的模型。他把灰色纸板放在中间背景位置，绿色纸板放在右边，棕色纸板放在左边（这是从他自己的视点看到的模型），然后观察自己完成的作品。"*不，我错了。灰色山在玩偶的前面*（他把灰色山放在前面，但是棕色山依然在左边）。*啊，棕色山在靠近中间的位置。*——从你自己的位置？——*不，从那儿*（他正确地搭建出了模型）。"

允（9;2）　坐在A，像圣一样试着去搭建从视点C看到的模型。他拿起绿色纸板，从视点A看它在前景位置，从视点C看在背景位置，并说，"*他看不到绿色山。*"他用灰色纸板（在左边）遮挡了基本全部的绿色纸板，把棕色纸板嵌在灰色纸板和

绿色纸板之间,且在右边。因此,允正确完成了任务。

对于视点B,他首先把棕色纸板放在中间,然后把灰色纸板放在右边并在前面,绿色纸板在左边,同样也在前景位置。对于视点D,他开始把绿色纸板放在右边,然后把棕色纸板放在绿色纸板前面且在中间位置,最后把灰色纸板放在左边且在下面,这完全是正确的。

尤尔(9;5)　对于视点B,把棕色纸板放在中间,然后把绿色纸板放在右边,灰色纸板放在左边。完成这个以后,他进行了修改,交换了绿色纸板和灰色纸板的位置。

圣是直接或逐步地协调所包含的所有关系,和他相反的是,尤尔和允是从一种单一的关系开始的。但是,与3A亚阶段的儿童不同,允在这个最初的关系和其他的关系之间表现出一种逻辑乘法,因此正确地搭建了模型。同样的,尤尔是以"棕色的在中间"这种关系开始的,然后去处理其他的相对于它的关系。不管采用什么途径找到了答案,他们使用的推理过程包含了关系的协调或增加。因此,儿童在搭建模型的过程中,或者像圣那样对关系进行直接的转换,或者像允和尤尔一样依次把每个关系和其他关系联系起来。

方法2,第二种方法的程序是一样的。

马尔(9;0)　玩偶在视点D,灰色山在左边,棕色山在右边,几乎看不见绿色山。马尔选择了这样的一张图片,在这张图片中灰色和棕色山的位置与实际相符,但是绿色山在背景位置而且是可以被看见的,"*因为从那边看绿色山在后面*"。然后,他在选择一张绿色山在背景位置,但是在棕色山的右边的图片时犹豫了,"*或许这张也是正确的,因为绿色山也在后面*"。但是,他决定支持第一种选择,"*因为绿色山在其他两座山之间*"。对于位置B,马尔仍旧在A的位置,他一开始选择了一张错误的图片,"*因为他不能很好地看到灰色山*"。然后选了正确的一张,"*因为绿色山和灰色山在前面,并且分别在左边和右边,棕色山在后面*"。

因此,这些反应和对方法1的反应大体上是一样的,唯一不同的就是能成功完成方法2中任务的儿童,年龄要稍大一点。

方法3,这里有几个儿童立即给出正确答案的例子。

卢策(8;4)　给他呈现这样的一张图片,在这张图片中,棕色山在左边,绿色山在右边,灰色山在视野之外。他把玩偶放在棕色山和绿色山之间:"*因为绿色山必须在这边(右边),棕色山在那边。——*那灰色山呢? ——*当人在那儿的时候,他是看不到灰色山的,因为这个(绿色山的一个山坡)。*"对于下一张图片,绿色山有一点

遮挡棕色山，他把玩偶放在相同的位置，但是马上改变了主意，并移动了玩偶位置，“*那儿，因为从那儿看绿色山在棕色山的前面*”。

达尔（9;6） 给他呈现一张与位置 *B* 对应的图片，他毫不犹豫地把玩偶放到了正确的位置：“*因为绿色山是最近的，棕色山在后面，并且在这边*（指着左边）。——你还能找到另外一个位置吗？——*不，再没有其他位置了。*”然后，给他呈现一张不正确的图片，图片包含着不可能的方向。绿色山在右边，棕色山在左边，灰色山在中间，并且遮挡了绿色山的一部分。达尔犹豫了一会儿，然后用一种坚定的语气宣布，“*那也没有办法了！——*为什么？——*绿色山在灰色山的后面，那么棕色山不可能在前面！*”

相对 3A 亚阶段来说，这些反应有了一定的进步，不仅因为儿童能够完整地协调或逻辑相乘射影关系，而且因为引发这种反应的方法。

在 3A 亚阶段，关系的群集仍旧是不完整的，并且仅仅是通过零碎的方式实现的。所有关系被逐一地带入到对应性（逻辑相乘）中。结果，每带入一种关系都或多或少冲刷了系列中在它之前的关系，并且把这个过程导向一个不成熟的结论。与之相反，3B 亚阶段的儿童以一种预先的格式开始。我们可以从以下事实看出来，就是儿童从现在开始认为一张图片只对应一个位置。这是这两个发展阶段之间出现的最重要的特征。比如达尔拒绝为与视点 *B* 对应的图片寻找另外的一个位置，并且直截了当地说，“*再没有其他的位置了。*”简言之，观察者位置和射影关系的对应性变得一一对应了。这种一一对应的特征表明了一个运算的预期格式的存在，它的实现使得建构过程不再像 3A 亚阶段一样。

在最后的分析中，另外一个指向同一方向的重要指征就是，儿童对于错误图片的反应。3A 亚阶段的儿童还不能避免这个陷阱（见阿尔克），仅仅就是因为他不能同时考虑所有的关系。然而，3B 亚阶段的儿童清楚地感知到了矛盾所在（见达尔），正是因为对对应性一一对应特征的确信，使得他能够辨别一张给定的图片所假定的关系是否互相兼容。如果这些关系相互兼容，则表明它们和一个明确的位置对应；如果不能互相兼容，则表明不存在这样的一个位置与之对应。

总之，在 3B 亚阶段，协调景观所要求的运算是完整的，并且以以下完全独立的形式运行。首先，对于观察者的每一位置，都对应着三山之间特定的左右前后关系。这些关系是由射影和与观察者的视觉平面（景观）一致的截面决定的。在最后这个的亚阶段，儿童发现了位置和景观之间对应性的一一对应特征。

其次，观察者的一个视点和另外一个视点之间，也有一种对应性。这种对应性表现为左右、前后关系的改变，也就是射影和截面的改变。就是这种所有可能视点之间的对应性构成了景观的协调。也就是说，它提供了射影空间的统一和同质，尽管还是以一种初级的形式。

现在产生了一个与第六章和七章有关的问题。单个物体的射影发展使得我们所讨论的总体协调成为可能,还是总体协调使得单个物体的射影得以发展？在总结这一章之前,我们必须努力去回答这个问题。

第六节 结论:视点的协调和单个透视关系的精细化

在第六章我们研究过,当把单个物体比如一根木棍,转向不同的角度时,儿童如何想象景观的改变。我们发现,单一的物体像木棍或者圆盘,这些改变超出了2A亚阶段儿童的理解能力,被3B亚阶段的儿童完全掌握。而且,不仅仅是就单一的知觉概念而言,还有射影和截面运算的逐渐发展,以及它们之间的对应性的建立。

一开始,儿童不能像他观察物体那样去想象物体(比如在倾斜的角度,竖着的等),并且像一个固定的错误一样不去改变它。只有当建构起一个心理运算系统时,他才能够形成与知觉所对应的心理表象。第七章通过证明景观和真正的射影(就影子射影而言)是同时发展的,尽管前者与儿童主观意识到的视点所对应,后者与客观的只能被外部感觉到的信息对应,从而证实了这个假设。最后,我们现在所总结的这一章有了许多发现,这些发现第一眼看上去是与早期的发现相矛盾的。然而,我们会尽力去证明这远远不是事实的真正状态。事实上,最后的结果能够更好地帮助我们解释之前的结果。

最明显的矛盾也许会以这种方式被陈述。在2A亚阶段,面对单一物体,当我们希望他想象或画出它的时候,儿童不能考虑他所感知到的物体的样子。另一方面,当他面对一组物体像三座山(在相同的发展阶段)时,他看起来以最狭窄的、最局限的方式固定在自己的视点上,因此他除了自己看到的景观以外不能想象其他的景观。确实,他仅仅能想象过去几分钟看到的景观,因为随着位置的改变,他在新的位置上不断重复自己的表现。与此相反的是,在这里,不仅明显的矛盾被解决了,而且早期的研究互相阐明了彼此——当儿童能完成对运动物体的景观和射影的建构时,他同样能够建构出其他观察者所看到的三山景观。

在早期阶段看起来互相矛盾的这两种情况,在3A亚阶段接近一致,在3B亚阶段完全一致。事实上,这双重情形是最后三章所主张的假设的证明。

作为简单景观来源的儿童自己的视点,只有当能和其他的视点进行区分时,才能够导致真实的表征。所谓真实的表征就是能够预期、重构以及记录,这个过程仅仅能够在总体协调的框架内发生。只有当儿童能够想象其他观察者的视点时,他才能发现自己的视点。这就是为什么对于他来说,处理物体相对于自己的样子和处理同样的物体相对于其他观察者的样子一样困难。

因此,儿童不能理解景观(就像第六章描述的那样)和(在现在的章节所描述的),不管从哪个方面,相同阶段的儿童只能通过不断复制自己的视点去想象三山之间是没有

真正的矛盾的。事实上，他不仅不能意识到他拥有和别的观察者不同的视点，而且关键的一点，被他提升到绝对-错误的他自己的视点，并不是景观的表征，它仅仅是一个错误的自我中心的概念。就像我们在许多例子中看到的那样，这种在第二阶段盛行的主体视点的优势地位，导致了幼儿处理三山之间关系的不灵活的刻板性。它并没有对任何类型的知觉对应性产生有益的作用，却使物体显得"真实"，这种方式我们之前在儿童的绘画中见过，即虚假的现实主义和虚假的恒常性，它出现在透视之前，反映了儿童缺乏对第六章研究的透视关系的理解。

结果，等到儿童能够协调他自己的视点和其他观察者的视点时，他既能够成功地建构其他的视点，也能够将其他的视点和自己的视点进行区分（3A 亚阶段，尤其是3B 亚阶段）。通过这样做，他掌握了简单的透视关系，并且解决了全局协调（第八章）、单个的物体的景观（第六章）以及影子投射的问题（第七章）。

因此，从这个讨论中得到的主要结论就是：全局或全面的视点协调是建构简单的射影关系的先决条件。尽管我们可能认为这样的关系总是由一个给定的视点所决定，然而最后三章充分表明，一个单一的视点不能以孤立的方式存在，必须需要把所有的视点联系起来的完整的系统建构。就像在欧几里得空间内，距离和度量关系在一个坐标系统里被联系在一起一样。这就是射影空间和第一部分讨论的拓扑关系之间的主要区别。

第二个重要的区别来源于，心理运算将自身与知觉叠加在一起的方式，换句话说，就是心理运算整合知觉信息的方式。拓扑关系完全是物体所固有的，并且包含一步一步实现的运算。因此它对应的不过是一系列可能的、能够并列的知觉，这样的运算最主要的任务就是把这个空间内的信息整合成一个连贯的整体。这个过程所包含的群集主要包括邻近和分离的增加以及细分、有序的系列形成、借助于围绕的闭合，整个的过程上升到运算连续性、一一对应和同胚点对应性阶段。

与此相反，射影关系系统本质上包含这样的运算：不仅仅组合知觉信息，而且根据信息之间的相互关系去协调它们。因此，射影空间的功能并不是连接物体的不同部分，而是连接物体的数不尽的、所有的射影。结果，与这些不同的射影所对应的知觉并不像需要被组合的、不完整的图画，而是每一种射影关系完成了从不同角度得到的、需要进行协调的景观。三山实验所提出的问题并不是一个拓扑邻近和闭合的问题，也不是通过比较邻近元素或把单元从一个结构部分移动到另一个结构部分的测量物体的欧几里得问题，这是一个射影问题。正是因为这个特别的原因，与一个特定视点所对应的视觉图片或景观不能从整体上提出三山的空间特性。这需要通过将所有视点联系在一起的运算才能得以实现。也就是说，通过把某个特定视点和多个可能视点联系起来的运算。

也就是说，之所以没有一个单一的知觉能够包含三山的每一个方面，并不因为它仅仅指的是整体的一小部分（就像棋盘的一小平方相对其他而言），而是因为它仅仅和一个简单的视点相关。所有的这些方面的整合只有通过一种把所有可能的知觉通过运算

联系在一起的心智活动才能被儿童掌握。这样的运算相对于知觉视点的偏离程度比运算的邻近性相对于知觉邻近性的偏离程度更大,运算倾向于对由视点改变所导致的实际转变做出反应。

因此,儿童在这四个阶段所建立的透视系统在特点上不是知觉的而是概念的。和拓扑空间不同,射影空间的心理副本主要建立在一组“转变”的基础上。这个群集最初是定性的,但是在发展过程中变成定量的,并且具有数学集合的本质。

然而,我们必须深入探究一下:透视知觉和尤其是形状恒常性知觉是否能预测出完全主动的阶段,感觉运动协调(在第一章第二节所描述的知觉活动)作为这些心理运算的先驱在发挥作用。事实上,在讨论中所列出的四个阶段(第七八章)使我们非常生动地回忆起早期研究中所描述的阶段,尽管有相当大的时间差[①]。在早期的研究中,我们关心的是诸如深度、形状恒常性等经验关系的感觉运动建构过程,一个和格式塔假设相反的、被很多最近的知觉研究所证实的发展过程。在儿童发展的早期阶段,这与C.R.的第一章和第二章中前两个阶段是相对应的,空间看起来是缺乏深度的,就好像天空对于一个天真无邪的成年人而言。而且,由于儿童不能深入探究任何问题,因此也不能寻找从视线消失的物体。另外,儿童不能理解物体的旋转运动,不能注意到物体的后面,并且也不能意识到物体拥有一个恒定的三维形状。这个初级的阶段缺乏透视且显著的外观占优势,可以与第六一八章提到的三个阶段中的第一阶段进行直接对比。

与C.R.描述的第三阶段相对应的第二个时期,儿童通过操纵客体来学习区分不同的深度,也就是客体的不同的方面。同时,他仍然不能去寻找暂时被屏风挡住的客体,或者将一个客体转向自己(比如他的奶瓶)。因此,他还没有赋予物体恒定的知觉形状。这个过渡阶段相当于我们现在所描述的第二概念阶段(2B亚阶段)。

在第三阶段(C.R.的第四阶段),儿童学习去表现出特定的可逆行为(比如隐藏或寻找物体),这意味着对深度的一些理解,尽管迄今为止这些行为还不能与完整的关系进行协调(比如随后移动隐藏的物体,他仍然倾向于在物体消失的地方去寻找它,而不是他看到物体重新出现的地方)。现在儿童能够相对于自己转动物体,但是还不能相对于其他物体这样做(比如,把物体放在其他物体的上面),并且现在他把自己的头从一边转向另一边去观察物体的形状变化(C.R.obs.88—91),这意味着他开始意识到知觉的透视。这里所讨论的阶段和我们研究的3A亚阶段(第六到八章)具有显而易见的类比性。

最后,到了第四阶段(C.R的第五和六阶段),在这个阶段所有关系都被以一种全局性的方式联系在一起,因此导致了物体在各个深度上的有序排列,并且能够把一个物体放到另一个的后面。这个阶段理所当然的是与3B亚阶段的运算性协调相对应的。

简言之,透视知觉的感觉运动协调从最初就开始发展,以一种和射影空间概念的视点的运算性协调相类似的方式。我们认为运算性协调很大程度上概括了先前在知觉活

① Op. cit., *The Child's Construction of Reality*. 这里指的是C.R.。

动上所取得的成就,但是就推理机制而言是超过它的。

这两个发展过程都是从自我中心的现实主义向关系协调的过渡。几年以后,这个过程以同样的方式再次出现,这一事实证明这一过程在射影空间概念形成的过程中起到关键的作用。但是,它们之间是有区别的,因为在感觉运动阶段,这仅仅是一个将瞬间的知觉或行为和之前或之后的知觉或行为联系在一起的问题。然而,在概念阶段,从实质的自我中心到去中心化是通过这样的途径实现的:主体协调他自己的视点和所有可能的视点,以群集来代替自我中心。

这就是复杂整体协调的四个阶段。它们的发展与第六章和第七章所描述的单个物体的射影关系的四个阶段是平行的。通过比较这两种发展,我们总结出射影空间需要感觉运动,并且最终还需要视点的运算性协调。

第九章　几何学的截面[①]

由于几何学截面所包括的运算与特定的形状，而不是一个简单的、可塑的拓扑学结构，因而同样适用于欧几里得和射影几何学。因此，想象用屏幕遮挡照向圆锥的光所形成的圆锥截面(射影截面)和想象用小刀切固体所切出的圆锥截面(欧几里得截面)同样简单。

用心理学术语讲，截面的运算同样适用于“物体的几何学”和“视点的几何学”。物体的第一种处理就好像观察者与物体共同延伸，并且在某种意义上说，能够同时看见和摸到一个物体的每一个点。这当然是忽略运动问题的拓扑学观点。与此不同，通过从一个物体传递到另一个物体或者沿着物体的外围传递，物体的几何学或者欧几里得几何学引入了测量因素。因此，它带来了与物体有关的运动或位移，而脱离了拓扑学限制，在拓扑学中只考虑观察者的运动。

然而，实施这样的测量就好像观察者直接依附在被视为“僵化的固体”的物体表面或内部，类似于人类可能通过环游世界来探索地球或者通过坐电梯从一层移动到另一层来探究建筑物的内部。因此，就物体数量的几何学或测量物体而言，这是通过实质的测量而实现的，并且视物体为共同延伸的。比如，不管是在实践还是在思维中，我们认为当我们需要测量一条线时，我们是通过将一个长度单元固定不变地从一端复制到另一端从而进行的。尤其是作为物体几何学基础的坐标系统的发展，就是一个物体相对于另一个物体和同一个系统中沿着不同维度排列的参考点的方向。

然而，除了“物体的几何学”，想象“视点的几何学”也是有可能的。在这里，我们并不是从表面或者内部想象物体，而是从一个遥远的有利点。因此，观察者现在占据了一个位置，他从这个位置感知到的物体和从特定视点看到的物体是一样的。现在，物体在特定面上的射影，或者说是观察者的视觉平面(透视)，需要视点的几何学，我们在第六—八章中所研究的是视点几何学早期的表现形式。

因此，对于物体的几何学，截面和视点的几何学是同样被包括在内的，尽管在我们给出的形式中，4—12岁儿童遇到的问题直接来源于后一种类型的几何学。这个实验包括简单地观察由橡皮泥做成的物体，比如圆柱、棱柱、平行六面体、硬币，并且预测表面的形状，这些形状是用小刀沿着不同的面切固体产生的。比如，与底面平行去切圆柱体会产生一个圆，但是纵向地切下去会产生一个长方形。就射影几何学而言，也能产生同

---

① 与Mlle. E. Bussmann, M. T. Kiss和Mlle. G. Ascoli合作。

样的问题:并不是用欧几里得几何学的固体或表面制造截面,而是用同样物体发出的光线或者影子制造截面。这样的话,根据问题是关于固体内部的截面还是固体在三维空间的射影截面,我们可以使用欧几里得或者射影的方法研究截面的运算。

然而,在这两种方法中选择一种更远离实际经验的方法是没有任何意义的,不论在什么情况下使用欧几里得方法都需要透视和射影,因为在实际切割固体之前,我们都会要求儿童先画出可能的截面。因此尽管实验是在日常经验的范围内,就像观察用刀切割物体,但情况仍然是这样的:任何截面的图片或者想象的描述仍然包括将固体射影到二维表面。

因此,让儿童画出截面是很适当的,因为他的图画代表了客观存在的许多可能景观中的一种,并最终和所有的物体关联起来。比如,从截面看到的固体和从完整的面看到的固体进行比较。现在,儿童必须在切割以前预测截面的形状,而不仅仅是在后来把它画出来。因此,我们可以这样描述这个问题:用一个想象的面(可以想象为磨刀板)穿过暂且还完整的固体。换句话说,在想象中,穿过一捆直线;在物理空间内,没有实际地穿过任何距离。

我们一直应该铭记于心的是:我们仅仅可以通过射影来呈现一个固体,就像事实证明欧几里得几何学课本内的立方体、球、平行六面体等的图画仅仅是透视的图解(除了在描述性几何学中使用发达的、旋转的图形来表示表面外)。因此,我们认为尽管切割固体需要欧几里得运算,把它画出来则需要与截面相关的射影系统。

现在这些前面考虑的因素不仅仅是理论上的,而且提出了一个真实的心理学问题。这就是欧几里得和射影运算发展极其密切的联系;欧几里得运算处理的是运动或者位移,射影运算处理的是运动或位移的表征。从心理学角度看,不管建构单个物体(第六章)、影子(第七章)还是一组山(第八章)的景观,都需要我们知道这些物体相对运动或主体相对于它们运动的结果。但是,这反过来是以我们射影性地想象和表征这些固体为前提条件的,因为只有当可以想象出一些远离实际运动过程所占据位置的点时,才可以在空间中确定运动的方向。

在切割固体的过程中,欧几里得运算(以实际的运动穿过固体,比如切割橡皮泥)和射影运算(代表了沿着一个平面切割三维图形所产生的截面)之间的相互作用,在所有心理发展阶段都是明显的。在早期发展阶段,它们的相互作用是明显的,尽管儿童的绘画既不是纯欧几里得的,也不是纯射影的。儿童并没有把截面表示成欧几里得表面,他画的形状既包括截面的形状也包括完整的固体形状。或者当分开呈现截面和完整的固体时,他的图画很明显就是吕屈埃所说的“视点的混合”:同时存在许多可能的景观,这些景观之间既没有连贯性也没有系统性。在后来的阶段,儿童能够射影性地表征截面的运算,同时景观和运动开始相互影响。

为了确保儿童的反应是空间或欧几里得概念的真实体现,而不仅仅是对实验方法的反应,我们总是要求他:(a)在切割固体之前画出可能的截面,(b)从众多类似图片中

挑选出可能的截面图片。我们在与儿童谈话的过程中提出这两个问题,从而来追踪其思维过程。我们用这种方法研究了许多复杂的固体,从圆柱、棱柱、平行六面体、中空的球和硬币,到不规则的图形,比如卷曲物、蜗牛壳、纸卷等。通过使用不同的系列,我们就可以研究儿童对不同类型固体的反应,而不用把过多重点放在总体发展阶段的描述上。

与前面所研究的射影关系一样,截面的发展有几个普遍的阶段。事实上,这些阶段与射影和透视的总体发展阶段是对应的。在第一阶段,儿童不能区分不同的表面,所以问他们关于截面的问题几乎是没有意义的。然而,在2A亚阶段(见图16),大概是儿童4岁到5岁半的时候,实验结果是很有趣的。在切割固体以前,儿童不能画出截面,因为他不能区分代表物体截面的内部视点。当截面和固体的外部形状一样时,情况也是如此,比如圆柱的横截面。结果,在儿童完成的图画中,我们经常会看到完整物体的外部形状和想象的截面形状奇怪地"掺杂"在一起。尽管后者在外形上总是模糊的、概略的。儿童也不能够从样例集中挑选出正确的截面的图片。



图16　2A亚阶段儿童绘出的切割截面

在2B亚阶段(5岁半或6—7岁或8岁),儿童能够逐渐地区分截面和完整的外形。通常,儿童只是表现出了些许对固体内部形状的认识。这主要是通过想象切割固体这一动作的路径来实现的,或多或少是正确的。在第三阶段,能够实现运算的形式,儿童能够成功地根据物体的类型提出它们不同的截面,这一直延伸到第三阶段第一、第二亚

阶段，甚至到第四阶段。

第一节 圆柱、棱柱、平行六面体和中空球的横截面和纵截面

在儿童面前放一个由橡皮泥做成的圆柱或棱柱和一把小刀。在切割出一个横截面之前，要求他猜测横截面的形状。为了帮助他理解，我们把小刀放在橡皮泥上面，而不对其进行切割，但是清楚地向儿童表明我们想要切的位置和方向。给儿童的暗示和建议是随着儿童的能力变化的，从开始去切到把截面切出来作为对照。对于纵截面，我们也实施相同的实验程序，但并不是紧随横截面之后，而是在问完关于其他固体的一系列问题之后。

这里有一些2A亚阶段的例子，在这个阶段儿童不能区分截面和完整固体的外形。

布拉(4;6) “我将要从中间切这个滚筒，像这样(横向地)。你能画一下你将要看到的所切地方的表面吗(研究者摆出切的姿势)？——*不，我不能*。——试一下。——(他画了一个细长的椭圆表示圆柱的圆形末端和它的边。)——看(把它切了)。——*啊，它是圆的*。——你想到它会是这样吗？——*没有*。”

罗斯(4;6) 认为横截面是一个：“*直角*。——为什么？——(他指着圆柱的侧面和底面之间的边缘，想到了由底面和侧面形成的面。)——(它被切了)这和你想的一样吗？——*不，它是圆的*。”棱柱(横截面)。他画了一个锐角，然后画了一条长的、倾斜的直线。纵截面。他画了一个直角，然后画了一个直角三角形。从样例图画中，他选了正方形，排除了长方形。

埃贝(4;11) 对于圆柱的横截面，他画了一个和布拉一样的椭圆。但是，没有那么细长。对于纵截面，他开始画了一个长方形的阴影部分，且阴影部分没有明确的轮廓，说：“*那是圆柱的内部，它全被填满了*。——但是它将会是什么图形？——(他在长方形阴影部分的两端各画了一个圆，使底部看起来像马车的轮子)*那个*(细长的部分)*是里面，那个*(圆)*是外面*。——向我展示一下你会怎么切。——*你从长的部分切下去，一半在这儿，那一半在那儿*(他指着左边圆的右半部分和右边圆的左半部分，因此这表明他完全知道截面会将底面一分为二)。——画出当你切了以后，你将会看到的部分。——(他画了同样的画，并且说)*那个将会是长的*。——哪一个？——(给他呈现一系列的画，他选择了矩形和椭圆的画。)——*它会像那个，因为它是长的；那个也会是同样的*。——现在观察(它被切了)。自己画一下。——(他画了一个图形：中间的边是平行的，但是末端是圆形的，每一个末端都包含一个圆形。他指着左手边的圆说)，*你看不到那个，但是能看到那个*(*右手边的*

一个)。"因此,随着固体被切割,儿童开始区分不同的视点,但是仍然不能提前把截面的形状区别或描述出来。

佩尔(5;0)　画了一个小的矩形代表圆柱横截面的一半。"你画了圆柱的内部吗?——*是的*。——它和那个(完整的圆柱)是一样的?——*是的*。——(圆柱被切了。)——*哦,它是圆的*。"(过了一段时间后)对于纵截面,他画了一个长的矩形,但是矩形两端都是圆的。"但是这里是圆的吗?——*是的*。——那儿呢?——*是的*。——里面呢?——*也是圆的*。——(实验者将圆柱纵切了一部分,让儿童看到截面的起始部分。)——*哦,它是水平的*。——现在看这些图画。哪一个是正确的?——(他一张一张地翻看这些图画,认为没有正确的图画)这些图画中的图形和我们想要的图形不一样。——那我们想要的图形将会是什么样?——(它指着自己的画)*像那个*。"

皮耶(5;1)　圆柱(横截面)。一个椭圆。对于中空的球[1],他画了一个小圆,说:"*一个小圆*。——你画的是球吗?——*那儿*(他在一边画了一个大圆)。"棱柱:"*它的截面会像一个屋顶*(画了一个弓形)。——指一下这个点在哪里(脊)?——*那不是一个点,因为脊*(棱柱的上边缘)是长的。——但是如果你去切棱柱,你会看到像这样的截面吗?——*我不知道*(他画了一个正方形,顶部有一个三角形,然后画了一个模糊的、没有形状的表面,并将其涂成阴影来表示截面。"

佩奥(5;2)　对于棱柱的横截面,只能画出矩形,因为它的"*内部是水平的*"。然而,他最后在一边画一个形状为三角形的点。

马尔(5;9)　圆柱(横切和纵切)。他画了一个椭圆,椭圆的两端是圆,因此表示的是完整的圆柱。中空的球。一个闭合的圆,然后画了一个圆形,顶端开口表示内部的洞。

苏尔(5;11)　不能预测圆柱的横截面是一个圆形,但是画了一个细长的椭圆,这个椭圆几乎将底面在内的完整的形状包括在内,并且几乎不能区分底面和其他的部分。考虑到儿童可能没有理解我们的问题,我们切了圆柱并直接问,"这个是什么?——*这是圆*。——这是你所期望的吗?——*是的,你现在可以想,因为它已经被切了!*"换句话说,苏尔认为我们是不能提前想象截面的。

芬(6;0)　画了一个矩形(表示完整的圆柱),然后画了一条穿过中间部分的线(代表横切)。"但是如果你这样观察它(向他展示底面),那么截面看起来是什么样的"?他继续画了半个矩形,然后在矩形的两端各画了一个圆(就像埃贝的画),最后把一个圆放在矩形内部,因此矩形的一端是开口的。向他呈现样例图画时,他拒绝了把圆作为圆柱横截面的图画。

阿兰(6;3)　他不能仅仅用三角形来表示棱柱的横截面,而是画了一个矩形

① 我们在要求儿童预测中空的球的截面时,总会提前告诉他球是中空的。

(也就是棱柱的其中一个侧面),矩形的每一端有一个三角形。对于棱柱的纵截面,他画了一个长的梯形,说"*有一条线是倾斜的,有一条是直的*",并继续从样例图画中选了一条抛物线。当我们将棱柱纵切以后,他能正确地画出棱柱的纵截面(矩形)。

平行六面体(纵截面)。他画了一个大矩形,但是里面有三个小矩形,一端有两个,另一端有一个。"你画的是什么?——*你将会看到三个面。*"

布鲁(6;5) 圆柱(横截面)。"*它将全部都是红色的。*——但是它将会是什么形状?——*水平的*(画了一个大的正方形,并把它涂为阴影)。——如果你将要像这么切(纵向地)。——(他画了一个长的矩形,但是在矩形外面画了一条线,表明圆柱的一半是打开的)——那么如果你去切这个中空的球呢?——(他画了一个椭圆,椭圆的上半部分有一个结构良好的圆,圆的一半的外围与椭圆的边界重合。)"

如果我们根据儿童在实验中的表现去推测儿童没有理解我们的问题,并且认为我们要求他们画的是完整物体的一半,这样的推测其实是不合理的。因为以下两个原因:第一,在2B亚阶段,儿童能逐渐找到正确答案,这很明显地体现出他们理解了我们的问题,但是他们还是会犯和第二阶段第一亚阶段同样的错误。第二,上面所述的儿童为了更有效地表示截面,并没有画完整的物体,儿童并没有忽视这点,只不过不能区分截面和整体,这已经是能够通过抽象做到的极致了。

为了正确地理解这些结果,也许最好把它们和儿童实现射影的大体模式相联系。首先我们假设,没有要求儿童提前画出截面,而是让他们在切割以后再画。这样就会使得问题变得和第六章的一样,也就是,根据一个特定的视点想象物体,或者从一个给定的视点再现出物体可以看见的部分,而不是物体的全部。现在我们知道,第二阶段第一亚阶段的儿童还不能清楚地区分一个特定的视点,他所有的注意力仍然集中在物体整体的形状,就好像他习惯根据他的"视点的混合"去感知物体、画物体。同样地,我们知道,对于影子射影(第七章)或者想象一组物体(第八章);他的反应是大致相同的,由于整体仍然会阻碍对部分的分析。

对于截面问题,有两个新因素会影响儿童的表现,一个倾向于使想象物体截面的任务变得更加简单。另一个使之更难,尽管比一眼看上去的影响要小。然而,这些因素都没有使儿童的表现显著地偏离这个阶段平均的射影概念水平。

第一个新的因素来源于这样一个事实:儿童想象的是切割固体的结果。因为这是一种欧几里得运算,它实质性地改变物体的形状而不仅仅是观察物体的视点,所以儿童倾向于去想象这种改变的最终结果。与此相反,第二个新的因素使问题变得更加复杂。因为我们并没有切出截面,而是要求儿童去想象切割固体后将会产生的截面,因此射影性地想象固体的内部。然而,我们都知道:在儿童还不能区分射影关系、欧几里得关系和简单的拓扑概念比如闭合(见第二章第二节)的阶段,物体的内部和外部都会出

现在儿童的画中。比如,儿童在画房子的时候会画出房子的内部,就好像房子是用玻璃做的;儿童画的土豆或者在地下,或者在人们的胃里等。因此第二个因素的阻碍作用比我们想象的要小很多,除了以真正欧儿里得方式想象所画的截面和射影性地想象这个"内部"一样时。而且在儿童的画中仍然会出现"视点的混合",所谓"视点的混合"就是:同时从内部和外部看到的固体图形、沿着小刀路径的截面、截面的表面等都以随机的方式混合在一起,儿童没有尝试去区分不同的视点。

因此,结果表明了两种主要的反应。第一,儿童不能区分由截面所代表的内部视点和同一固体的其他视点。第二,我们要求儿童画的是固体的截面图,而儿童实际画的是每一个可能视点的混合,甚至包括固体内部的视点(尽管没有准确地区分)。

比如,我们看到布拉画了一个有两条长边、且两端都是圆(所有的都在同一个面上)的椭圆,来表示圆柱的横截面。罗斯画了一个直角来表示横切圆柱所产生的直角,画一个锐角表示小刀切割棱柱边缘所产生的裂口,尽管他闭合了直角和锐角的开口,从而形成了截面的边界。埃贝首先关注的是物体的内部(它是内部里面,被填满了);然后,他用一个椭圆来表示纵截面,以一对圆来表示圆柱的两端,所有的这些图形都在同一幅画中。芬首先用一条线将圆柱的矩形轮廓一分为二,代表实际切割固体的路径,然后画了半个矩形代表切掉的部分,并且在闭合的一端内部画了一个圆,在没有闭合的一端内部也画了一个圆。通过这种方式,所有不同的视点被即时或同时地混在一起。

对于圆柱的截面,大部分的儿童倾向于将圆柱的总体形状和截面形状结合在一起,通常会添加一条线或一个角来表示开始切割圆柱。儿童不能认出截面的形状,最直接的证据就是当给他呈现样例图画时,他不能把圆或矩形视为圆柱的截面,尽管所画的图画中包括圆或者矩形。第二,当固体被切割以后,他看到截面形状时总是目瞪口呆,"*啊,它是圆的*!"布拉和佩尔说。然而,他们中最聪明的苏尔说,"*你现在可以想了,因为它被切了*。"

棱柱、平行六面体(尽管它很简单)、中空的球的截面也是同样的结果。儿童将不同视点混合在一起,且不能协调不同的视点,不能区分截面和完整固体的轮廓。因此,佩奥把棱柱的横截面画成一个模糊的矩形(因为它的内部是水平的),并且添加了一个小三角形,代表被小刀切割的棱柱边缘。

从这里我们可以看到,第二阶段第一亚阶段的儿童就像我们在第六章和第七章中研究单个物体的透视和它们影子的射影时看到的那样:同样不能区分不同的视点。在2B亚阶段,儿童能够在某些情况下将截面和物体的整体轮廓分开,这标志着儿童开始区分不同的面,因此物体的截面、单个物体的透视和它们影子的射影继续并行地发展。

安斯(6;2)　像2A亚阶段的儿童一样,开始的时候画了一个长的矩形作为圆柱的横截面。然后,他用一条横向的线将矩形一分为二,并且又画了一个矩形,这个矩形比第一个矩形的一半还要小。"你为什么不能只画截面呢?——*如果不切割*

固体的话这是不太容易的。不，我不知道怎么去画（他看着放在圆柱上面的小刀，将他所画的矩形两端变弯曲）。*哦，它将会是圆的*（他画了一个圆）。"然而，对于棱柱的截面，他的图画中没有三角形，只有矩形。

雷恩（6;3） 以类似的方式开始，用一个一分为二的矩形表示圆柱的横截面，且在矩形两端的下面各添加了一个圆（就像2A亚阶段埃贝的画）。当我们开始切割固体的时候，他画了一个新的矩形：矩形的两端是弯曲的，类似一个椭圆。对于圆柱的纵截面，他又画了一个矩形，矩形两端的下面各添加了一个圆，然后用一条线把圆连接起来表示切割的动作，因此他画的图形类似一个不规则的梯形。

拉乌（6;4） 立即意识到圆柱的横截面"会是圆的"。对于纵截面，画了一段有弦的圆弧。"*那儿*（圆弧）*就是那个*（弯曲的表面），*那儿*（弦）*是切割圆柱的线*（截面）"。只有当纵切了圆柱以后，他才画了一个矩形。然而，对于圆柱倾斜的截面（椭圆），"*我不会画*。——那么从这些图画中选取一张出来。——（他指着抛物线）*就是那个*。——为什么？——……——可能是其他的吗？——*那个也是*（椭圆）。——那个呢（三角形）？——*不*。——那个（圆）？——*它也会像那个*。——那么从中选择一个（圆、抛物线、椭圆）。——（他看着圆柱）*如果你水平切的话，它是圆。但是如果你像那样*（倾斜的），*它就是那个*（椭圆）。"

梅（6;4） 对于平行六面体的纵截面，他开始画了一条短的水平线，然后画了一个被一条线一分为二的矩形，最后画了一个简单的矩形。对于圆柱的纵截面，他画了两条平行的线，但是它们之间没有连接。中空的球的截面，他画了一个不完整的圆（就像一个被切了一块的蛋糕）。

莱特（7;2） 对于圆柱的横截面，开始画了一个矩形，且矩形的两端各有一个圆，然后把一个圆放在一端的内部并且说，"*那一端是圆的，如果你从中间切的话，那一端也是圆的*"。

马格（7;4） 圆柱的纵截面："*它将会是一个椭圆*（画了一个椭圆）。*不，它和外面是一样的*（画了一个矩形）。"对于中空的球，他画了一个半球附着在一条直线上，并且半球还包含了一个半圆来表示球内部的洞。因此儿童画的是截面的侧视图，以及表示切割的一条直线。

瓦日（7;7） 对于圆柱倾斜的截面，开始画了一个三条边弯曲的三角形。然后他说，"*我不会。如果你把它切了我会感到很开心*。"我们没有那么做，而是要求他去继续猜。他把从一个侧面看到的圆柱画成一个矩形，画了一条对角线穿过它来表示切割。完成这个以后，他把斜线的两端画圆，以一个开口的椭圆结束。对于横截面，他毫不犹豫地画了一个圆。

在前一阶段我们可以看到视点的混合，相比较而言，在这一亚阶段，儿童在区分不同视点方面有了明显的进步。上面所描述的反应很清楚地阐明了射影概念和欧几里得

概念相互作用的机制，也就是说，运动和由运动所造成的视点改变之间的相互作用。从一开始我们就必须牢记：不仅仅对于几何截面，而且在整个透视和射影的范围内，欧几里得和射影概念之间的相互依赖是普遍规律。

在拓扑概念阶段，运动和视点之间是没有区别的。等到儿童的发展超越了拓扑概念阶段，便是位移或位置改变的欧几里得概念，欧几里得概念的出现导致了最初的透视和射影概念。反过来，透视和射影使得儿童能够区分不同的位置，并最终使得运动对于他们自己来说更形象。这才正是伴随截面所发生的。切一个截面的实际运动构成了欧几里得运算，同时由它所导致的视点改变构成了射影运算。也就是说，使一个截面变得形象化需要沿着某一个想象的面切割不同的固体。

我们尽力去追踪儿童的思维过程，把它们排列成某种顺序，但是通过这样的方式是为了发现上述所有被试共同的地方。这个发展过程的起点是：儿童画的是物体本身，就像2A亚阶段一样，画是所有不同视点的混合。比如，圆柱是一个长的矩形，在两端或两端内部各有一个表示上底面和下底面的圆(见雷恩和莱特)。因此，儿童所画的这幅图既不是欧几里得的也不是射影的，而是拓扑的邻近和闭合仍然占主导地位的表现。接下来出现的就是对切的动作的描述，因此也就是运动或者欧几里得位移的概念。比如，安斯画了一条线横切他所画的矩形(并且又画了一个小的矩形表示截面)。雷恩画了一条同样的横线，对于圆柱的纵截面，他画了一条斜线，这条斜线将图形两端的圆连接在一起。拉乌用一段有弦的圆弧，梅用矩形的中线，马格用把中空的半球闭合的一条线，范用对角线来表示切的动作。

在第三个阶段，儿童把上面所述的各种线弯曲，把它们改成所切固体的形状。这是极其重要的，因为它标志着从实际切的运动(由一条简单的直线表示)的欧几里得概念到截面的射影性描述的过渡。然而，儿童还不能完全正确地想象出截面的形状，不能想象出截面的外围(外围就是小刀切割固体的线)。这就是为什么安斯看见放在圆柱弯曲的边缘上方的小刀，然后将他画的矩形两端弯曲。雷恩的表现几乎一样，同时瓦日使他画的对角线变弯曲，从而形成一个开口的椭圆等。最后，完成的画就是半欧几里得、半射影的(小刀路径的一种发展[1])，儿童现在能够射影性地想象截面。“它会是圆的。”将矩形的两端弯曲后，安斯说。雷恩最后画了一个椭圆来表示圆柱的横截面，然而莱特通过类比圆柱的底面和截面，直接从这些阶段的开头跳到结尾。

最终在第三阶段，儿童立即并且直接就实现了截面的射影性描述，也就是正确的截面。这种结果是从3A亚阶段的圆柱、棱柱、平行六面体和中空的球的实验中得到的。

阿洛(5;8发展超前的)　圆柱的纵截面：“*它将完全是平的*(画了一个矩形)。——像这种呢(横截面)？——*它将会是圆的*。”中空的球：他画了一个大圆，

① 见“英文译者注”。

里面有一个小圆。

达恩(6;8) 对于圆柱的反应是一样的。对于中空的球,他画了一个圆说,"*它的内部是空的*。"然后画了一个小圆放在第一个大圆里。

多尔斯(7;2) 圆柱的横截面:"*它像那个*(画了一个圆)。——如果从这儿切呢(纵向的)? ——*它像那个*(矩形)——这个呢(棱柱的横截面)? ——(一个三角形。)"

赫尔(7;11) 圆柱横截面:"*一个圆*——如果穿过对角线切呢(椭圆)? ——*它会像树干,像那个*(一个椭圆)。"要求他从样例图画中选出倾斜的截面,他拒绝了抛物线,说"*底部也是弯曲的*"。

从上述的反应中会出现两个问题:第一,儿童立即画出截面证明他射影性地感知了它们吗? 第二,为什么相比类似或同样物体的总体透视和射影,儿童更容易想象和画出截面?

对于第一个问题,毫无疑问,这些确实是射影的截面,因为儿童几乎立即就将它们画出来了——相对于他们在2B亚阶段的表现——而且是在切割固体以前(就是欧几里得截面以前)。

即使我们成年人自己也只能在透视中想象固体(比如一个圆柱或者棱柱),因为尽管我们能够想象一个表面,就好像它能够通过真实的测量得到证实,但是对于一个固体我们却不能如此。确实如此! 为了测量,我们能够想象一系列小的立方体充满了整个空间,不论距离多远所有的立方体都是相同的,但是我们只能通过边界和结合点的一致来建立等价,而不是直接通过体积的一致。这就是为什么想象一个固体不能像想象一条线或者一个表面那样,可以通过连续视点的一个简单并列,每一个都是由一个物体直接运用到线或表面的某个部分(一致)。结果,对于想象一个固体而言,协调很多不同的视点是很有必要的;简而言之,产生一个想象的射影。正是因为这个原因,3A亚阶段的儿童在切割固体以前,也就是任何运动以前,想要想象截面的话就必须射影性地想象固体,就好像这些固体由一束直线构成,然后沿着某一个想象的射影面去切割这束线。从这个意义上来说,我们完全有理由认为儿童画出一个欧几里得截面,意味着他们能够射影性地感知固体。

下面我们将探讨第二个问题。为什么这个任务对于儿童来说,比描述同样物体的透视或射影(比如影子的射影)更容易? 比如,现在实验中用的圆柱和第六章的实验中用的铅笔或小棍子几乎一样。但是,儿童在2B亚阶段就发现圆柱的横截面是圆,然而到第三阶段才能发现如果将铅笔倒过来看,会看到一个圆。这无疑是因为欧几里得位移、射影视点与截面的联系比与透视的联系更直接。特别的,切割固体时会出现新的、特定的形状,然而物体的旋转或者观察者的移动,仅仅是改变了物体特有关系的平衡。然而对于圆锥的截面,这个小的区别变得很明显。

第二节 圆锥的截面

现在,我们想用同样的方法研究圆锥的截面,给儿童设置4个问题,这些问题是想象:1.和底部并行的截面(圆);2.垂直一分为二的截面(三角形);3.倾斜的截面(椭圆);4.穿过边和底面的倾斜截面(抛物线)。

我们再一次发现了相同的三个发展阶段,下面我们将列举几个2A亚阶段的例子。

罗斯(4;6) "这个是什么(一个圆锥)?——*一个尖塔*。——*非常好*。现在如果我像这么切(三角形),那么被切的那一面看起来会是什么样子(他已经能正确预测圆柱的截面)?——(罗斯画了一个圆,然后画了一个底边弯曲的三角形,因此画了完整的半个圆锥)"水平的截面:"*它将会是平的*(他画了一个闭合的图形,近似一个圆)。"抛物线:他画了一个大圆,"告诉我,我必须从哪儿切?——(罗斯用一根手指正确得表示了截面的轮廓,然后画了圆锥,被一条垂直的线所切。)——这个(他的画里面的圆)呢?这个在哪儿?——(他指着圆锥的底面。)——但是,那时如果你那么切能看到的全部吗?——不(他在圆的中间画了一个点表示顶点)。——但是仅仅需要画出截面,就好像你用自己的指头把剩下的藏起来了。——(他画了整个圆锥。)——但是如果我把这部分拿走(在圆锥上呈现出预期的截面),你将会看到什么?——(他画了一个直角,直角的顶点代表抛物线的顶点、直角的两边代表抛物线的两边。)——看这些画,哪一个是正确的?——(他选择了直角和矩形。)——为什么是这些?——*因为它已经被切了*。——那这些呢(椭圆和抛物线)?——也许吧。——但是哪一个是最接近的?——(矩形。)"

皮耶(4;11) 水平截面:"(他画了两个圆,一个在另一个上面。)——这个对吗?——*是的,因为它的内部是圆的*(他继续用两条线把圆连在一起,来表明上面的是圆锥的截面,下面的是圆锥的底面)。*不,它将会是长的,因为那个*(圆锥)*是长的*(画了一个椭圆)。*不,那是不对的*(画了一条水平的线来表示切的动作,用一段圆弧表示圆锥的外围)。"

椭圆:他画了一个圆锥被一条斜线所切,因此正确地表示了截面,然后画了一种有弯曲的顶点和底边的三角形。当我们给他呈现了样例图画,他拒绝了其他的画而选择了三角形。然后,我们给他画了一个阴影的椭圆、矩形和一对长的、不规则的平行线。从这些图形中,他选择了最后一个,说"*因为穿过中间截面会是长的*"。

垂直的截面:他画了一个圆,顶部有一个三角形(描述了整个圆锥),用一条线切了圆表示切割。

佩尔(5;10) 水平的截面:他画了一个扇形,然后擦掉顶点,只剩一个半圆。垂直的:他开始画了一个没有边界的阴影部分,形状是一个模糊的矩形,说,"*它是平的*。——*形状呢?* ——*圆的*(表示底面)。*并且全部是直的*(垂直的切割)。——像这样(画了一个三角形)? ——*现在是那样,但是切了以后截面是圆的*。"从样例图画中,他选择了矩形,因为它的角代表了圆锥的顶点,它的表面代表了圆锥的截面。

若拉((6;2) 对于椭圆和抛物线,若拉都预测是圆,因为:"*如果你从圆锥的顶部看,你将会看到它是圆的*。——但是如果像那样切呢(抛物线)? ——*那么它将会更像,但是仅仅除了这儿*(大致描画了抛物线的顶点部分)。*它必须是圆的。你可以把它放到图画的上面*。"他把圆锥放在圆上面,就好像这证明了他的意思[①]。倾斜的截面:他在开始便说,"*如果从那儿切,那么得到的是那个*(画了一个圆锥被一条斜线所横切)。——但是如果你看里面呢? ——(他画了一个不规则的四边形。)——从这些图画中选一个最接近的。——(他选择了矩形。)——它是怎么切的? ——(他在圆锥上指出了正确的轮廓)*你从这儿到这儿切*。——这个图画对吗(椭圆)? ——*有可能,因为它像这个,总是圆的*(指的是截面的边缘)。——那么哪个图画是最好的? ——*那个*(指着矩形),*而不是那个,因为那个太宽了。是那个*(矩形),*因为它是平的*。"即使如此,后来回到了同样的问题,他画了一个梯形,从样例图画中选了一个矩形,"*因为它不会是圆的,它将会是方的*(他记住了圆锥底面和面之间所成的角)"。

很明显,这些结果证实了我们在2A亚阶段研究圆柱、棱柱等固体时得到的结果。在上述的每个例子中,儿童不能分离出实际的截面,因为他们想同时看到物体的全部,不能根据一个特定的视点去考虑物体。因此不能分离物体的截面,也不能想象去协调截面和其他侧面。

对于与底面平行的截面(圆)或者从中间垂直切割产生的截面(三角形),这个问题和圆柱的横截面或纵截面是类似的。尽管儿童很确定:水平的截面大致是圆,垂直的截面大致是三角形。然而,他不能够分离出一个简单的圆或三角形。因此,尽管皮耶很清楚地表明"*内部是圆的*",但是除了画出圆,他仍然觉得必须画出圆锥的底面和侧面,因此表明圆并没有很好地描述截面。又一次,想要分离出截面时,他画了一个椭圆,同时表示圆锥的高和底面,最终他的画又结合了所有的视点。同样地,佩奥在处理三角形截面时,试着同时表示出圆锥的截面("*它是平的*")、底面、高("*它是圆的、所有的都是直的*"),尽管把上述的全部放在同一个平面上是不可能的。

对于椭圆和抛物线(在第三阶段之前已经被儿童发现,因此并没有超出7—8岁儿

① 他表达自己的方式并不意味着"相对于这个视点,圆锥是圆的",而是"这个视点使得我们能够从圆锥固有的属性中识别出是圆的"。

童的理解能力),想要表示这些截面,自然地就更加强调了在同一图画中结合不同的视点。因此,罗斯试着去想象截面(抛物线),他从上面观察圆锥,画了一个圆且中间有一点,表示圆锥的顶点。若拉以同样的方式开始,并且总结到:圆是圆锥的基本属性("它*必须是圆的*")。因此,抛物线被"降级"到圆。对于椭圆,他能够用手指沿着圆锥的外围画出截面的轮廓,但是若拉画了一个矩形,仅仅因为"*它是平的*"。

在下一阶段,也就是第二阶段第二亚阶段,不同视点的混合逐渐被视点之间的区分所代替。

乍(5;10)　通过直接与圆锥的底面进行比较,发现与底面平行的截面是一个圆。对于垂直的截面,他一开始画了一个圆,但是后来认为是不对的,"*因为里面不是圆的*"。并且认为截面将会是一个矩形,"*因为它是平的*"。另一方面,对于穿过侧面和底面所产生的截面,说完"*它会有点儿弯曲*"之后,他开始认真研究,说"*它必须是平的,像这样*(一个椭圆);*那个会比较接近*"。最后,当我们开始切割圆锥的时候,他决定截面是一条抛物线,因为注意到向下的两边永远不会相交。对于倾斜的截面(椭圆),他画了一个圆,但是用手指沿着圆锥的外围画了截面的轮廓之后,他最终从样例图画中选择了椭圆。

克拉韦(6;2)　对于与底面平行的截面,画了一个圆,但是后来又添加了一个三角形顶点。然而,他马上就把它擦掉了。对于椭圆,他开始画了一个矩形,然后说,"*如果是穿过……切……*"话还没说完,便从样例图画中选择了一个椭圆。另一方面,他没有成功想象出抛物线。

安斯(6;2在第1节圆柱的横截面中提到过)　水平的圆锥截面:他说,"*它没有顶点。*"画了一个顶点,但是又把它擦掉了,然后说,"*后来它会像那个*(指着底面)。*固体被切了以后,它是圆的;因为圆锥一端是尖的,另一端是圆的。如果你切圆柱,它也同样是圆的。*"垂直的截面:"*它将一直是这个形状*(他刚刚画的圆锥的三角形轮廓)。*啊,是的,它是三角形。*"但是,很明显,他还有些怀疑,因为他又弯曲了三角形的底部。抛物线:"*这个比较难。如果你切了一小块,它看起来会是那样*(从侧面看,他画了一个部分缺失的圆锥)。——但是你切的那部分是什么样子?——(他画了一个三角形,三角形的一条边是凸出的,另一条边是凹陷的,在凹陷的部分内又画了一个小圆。然后他画了一个椭圆,但是几乎马上意识到两边是不可能相交的。)"

马格(7;4,在上面的第1节中提到过)　对于水平的截面,他开始画了一个去掉顶点的圆锥侧面图,然后画了一个圆。抛物线:首先,他用一条垂直的线沿圆锥的中间而下,来表示切割的动作。然后画了一个矩形,研究了实际切割的线后,将矩形的角弯曲。最终他用一个内部有抛物线的三角形,代替了前面所画的图形。对于椭圆的截面,他开始画了一条斜线,"*它在一个斜坡上。*"然后说,"*它是圆的。*"继

续画了一段圆弧，然后画了一段椭圆的弧，且画了一条直线作为弦，最后画了一个倾斜的椭圆。从样例图画中，他选择了椭圆，但是说，"*是的，但是你必须倾斜看。*"也就是，轴必须保持倾斜。

在这些反应的开始，同样出现了前一个阶段所发现的视点混合。然而，在整个2A亚阶段，儿童不能区分固体的截面和其余部分，因为儿童并没有尝试把截面和其余部分联系起来，而是仅仅把截面放到其他面的旁边。尽管在切割固体之前，不能从整体轮廓中分离出截面的轮廓，然而有一点儿童是确定的，那就是：截面是水平的。与之相反，在这个阶段，协调和区分的共同发展使得儿童能够通过在想象中将切掉的部分和固体剩余的部分进行对比，并且想象切掉的部分被从切线的地方剥离出去，从而从固体的总体形状中分离出截面的形状。跟上实际的这个发展步伐有些困难，但是我们可以看到欧几里得概念的出现（就像第一节圆柱的实验中），并且相应地能够看到伴随这些运动的连续视点之间的相互作用。

在2A亚阶段，代表切割的线只是简单地放到了图形其他部分的旁边。在这个阶段，它变成了一个新视点的象征，与之前视点不同并且能够和它们进行协调而不仅仅是简单地并列在一起。同时，这个过程仍然是完全凭直觉获得的，而不能以运算的形式获得。

与之相反，在第三阶段期间，儿童能够直接和立刻想象截面，也能够协调截面和射影的固体全部。通过这种方式，截面的概念已经变得完全运算化了。

帕乌(6;4)　水平的截面："*它是圆的，因为是一样的形状。*"垂直的截面：他立刻画了一个三角形。椭圆的截面：他研究了截面的大概轮廓后，说"*它的形状将会像这样*"，画了一个椭圆。抛物线：他仔细地看了切割的线，然后立即画了一条底部有直线的抛物线。

莫特(7;11)　圆："*它将会是圆的，因为底部是圆的。*"垂直的截面立即就被正确地画出来了。抛物线："*它将会是方的，因为你从这儿切。不，上面是圆的*（截面的顶点）。"然后，他画了一条抛物线。椭圆："*它将会是一样的，只是除了角落*（底部的角），*但是也不是完整的圆，因为它向下倾斜。*"然后，他画了一个椭圆。

巴尔(8;0)　抛物线："*它将会是圆的。不，因为它向底部下降，它会有角。*"他立即画了一条抛物线。圆："*它会像底部一样，是个圆。*"椭圆："*圆；不，向外拉伸了一点。*"他画了一个椭圆。

也许我们会感到有一点惊奇，因为我们发现儿童能够在第三阶段开始的时候预测圆锥的截面为圆和椭圆，然而必须等到第四阶段才能预测由影子所投射的相同形状（见第七章第五节）。更为惊奇的是，我们发现心理年龄为7—8岁的儿童，通过在实际切割

固体之前想象切割这个动作，能够发现由切割固体所产生的形状。然而，在影子射影中，不同截面之间相互围绕，以至于儿童必须屏蔽其余的部分而去想象圆锥的最大横截面。在现在的实验中，他仅仅需要想象由小刀切割所产生的形状。对于抛物线，它来源于一个上端弯曲的矩形，或者下半部分开口的圆，可以从莫特和巴尔的例子中看到。一旦儿童能够把产生一条截面的线的运动概念和形成这条线的射影以及它表面的图像的视点概念关联起来，对于他来说，建构抛物线不再比画圆、椭圆或三角形困难。

第三节　复杂物体的截面

在这一章中，我们研究的物体包括圆柱、圆锥、棱柱等，之所以选择这些物体是因为我们想把它们的截面和第六章以及第七章中研究的它们的透视射影进行比较。单独从研究截面的立场出发去考虑，这些物体有这样的一个劣势，截面的形状和完整的形状或者至少完整形状的某个特别的方面太过相似。确实是这样，我们感到很困惑，第二阶段第一亚阶段典型的"视点的混合"是否在某种程度上是由这个原因所导致的？出于这样的考虑，我们试着通过研究更为复杂的固体横截面去检验早期的结果。

为了这个目标，我们使用了以下物体：1.一个闭合的橡皮泥环，横截面是一个圆。2.一个类似的环，横截面是一个正方形。3.一对由一个平行六面体连接的圆盘。横截面是一个小的矩形，纵截面是一个长的矩形。4.一个有四个角的星星，穿过它的角的截面是一个长的矩形，穿过它的根部的截面是一个短的矩形或一个正方形。5.一个短号，这个短号是通过卷起儿童面前的两条不同颜色的橡皮泥形成的。6.一个由两条不同颜色的橡皮泥缠绕所形成的弯曲形状。7.一个由一条橡皮泥形成的，像长的蜗牛壳或者螺丝锥一样缠绕形成的螺旋[①]。

这些形状比起之前简单的形状来说复杂了很多。然而，比之前的实验更清楚地表明：处在2A亚阶段的儿童依旧完全不能够从物体的整体结构中分离出截面。这里有几个对此阶段进行阐释的例子。

皮耶(5;1)　给儿童呈现环1。画了一个半圆，开口约为很小的几毫米。"为什么你在这儿留下一个缺口？——*因为它被切了*。——但是我仅仅想让你画出你所看到的里面，就是刀穿过的部分。——(他画了一条短的、垂直的线。)"第二个环也是如此，他只画了一条垂直的线。对于蜗牛壳，他开始画了一个螺旋，但是当我们要求他画出截面时，他仅画了两条线，表示切割的动作。给他呈现样例图画，他排

① 对于上述的图形，我们自然不要求儿童完全精准地做图。无论如何我们会给儿童呈现样例图画，让他们从中进行选择。

除了所有的图片，因为它们都没有对应物体的外部形状。对于短号的横截面，他不能想象出线之间的相互围绕，只是画了两条水平的、不同颜色的线，一条在另一条上方（而不是一个“螺旋”）。

马尔（5;9） 圆环1：也把环的截面画成了一个缺口的圆。“但是你从小刀穿过的里面看，是什么样子的？——（他重复了原来的画。）——看（环被切了）。——*它是圆的！*（他画了圆。）——那么这个（方环2）？——（他画了两条线，表示切。）”一对圆盘3：他画了整个物体，并且用一条线表示切的动作。“但是里面呢？——（他画了一条新的、垂直的线）*小刀像那样穿过*。——但是它不会仅仅是一条直线，你从里面可以看到什么？——（他慢慢地修改那条线，使其像一个面。）”对于蜗牛壳，他很满意地画出了物体外部的样子。对于短号，他把一个红色的圆放到绿色的圆里，而忽略了他刚才看到的由两条橡皮泥被卷起来而产生的螺旋效果。

索尔（6;6） 一对圆盘：他复制了总体的形状，且总体的形状被一条线所切。星星（长的截面）：他画了从上面看到的两个角，忽略了另外两个角。弯曲形状6：“*它将完全是平的*（画了一个矩形）。”短号5：他画了一个绿色的矩形，里面有一个红色的小正方形，并且小正方形的一条边和矩形的一条边重合。蜗牛壳：他仅仅画了一条线，表示切的动作。

达恩（6;8） 圆环1：一个圆被一条线所切，“但是画一下里面的样子。——*我认为那就是我现在所画的*。——看（它被切了）。——*啊，是一个圆！*——那么那个呢（方环2）？——*那个也是圆的*。——为什么？——（他指了一下整体的环，同样是一个圆。）”一对圆盘：他画出了整个物体，然后画了一个没有明确轮廓的面。星星：他画了一个锐角三角形代表其中的一个角。

里（6;10） 纵向地切一对圆盘。他画了整个物体被一条线横切。然后，要求他以他的画作为模型，用橡皮泥捏出物体的一半。“*我不知道，我从来没做过那个*。——但是你能试试吗？——*是的*（他做对了）。——非常好，现在尝试像你画的一样，把它切成一半。——（他完全改变了他的模型，使它更细长，就好像一分为二是纵向的，而不是他自己画里所表明的横向的！）——（物体现在被切了。）它像你做的那个吗？——*不，不像。我只能把整个物体用橡皮泥捏出来，不能捏出它的一半来！*”

在讨论上述结果之前，我们继续给出一些2B亚阶段的例子，就像我们期望的那样，在这个阶段，儿童开始区分截面和完整固体的不同侧面。

梅特（6;6） 圆环1：画了从上面看到的半个圆环，“*不，只画小刀切的那一端*。——（然后他画了一个小圆，但是在里面又画了一个圆，将截面的形状和完整的环的形状混淆了。）*哦，不*（他画了一个普通的圆）。——那么这个方环2呢？——

(他立即画了一个正方形。)”对于螺旋的截面,梅特画了整个螺旋,尽管他完全明白我们要求他只画出截面。之后,他用一个S样的吊钩取代了螺旋,最后他画了一个矩形,矩形内部有一系列圆弧(除了螺旋的斜坡,最后画的图形几乎是正确的)。

帕尔(6;8) 对于圆环1立即画了一个小圆;但是,对于方环2,他也画了一个圆。“你真的这样认为吗? ——(他从不同的面对物体进行了观察)啊,不,它是*方形的*。”对于一对圆盘3的纵截面,他一开始画了一条类似括号的线(⌒),因此画的是物体完整轮廓的一半,然后尝试去更正它,但是没有成功地画出矩形。对于横截面,他画了一个半圆(同样是外部轮廓的一半),最终画了某种正方形。对于星星4,他开始画了一段圆弧,后来正确地画出了矩形。另一方面对于弯曲形状,他画了一个长的椭圆,被一系列连在一起,但没有倾斜角度的小拱形围绕。对于短号5,他开始画了一个绿色的圆,在绿色的圆里又画了红色的圆,然后开始把它们变成螺旋。然而对于蜗牛壳7,他画了一条简单的波浪线。

在第三阶段(7—8岁到10—11岁)的过程中,对于难度和第一节以及第二节用到的固体差不多的形状1—4,儿童的表现很让人满意(除了在掌握圆盘和星星的时间上有一点推迟)。与之相反,引入的螺旋类形状5—7,尽管儿童坚持不懈的努力,仍然不能正确地画出它们的截面。

伊尔(7;4) 对于蜗牛壳7,开始画了一个形状像四季豆的闭合图形,后来画了一个错综复杂、相互缠绕的绳结,但是没有出现任何螺旋的形状。短号5,画了一段圆弧,外面的部分是红色的,里面的部分是绿色的。对于弯曲形状6,画了一条波浪线。

杰(7;9) 弯曲形状6和蜗牛壳7:在一条边界线内画了一系列的圆弧。短号5:画了一系列的圆弧,一个叠加在另一个上面。这些图形中,都没有出现螺旋的形状。

迪达(8;2) 弯曲形状6:两列对称的环,像一条卷曲的蠕虫的截面,但是没有出现任何螺旋的形状。蜗牛壳7:同样的想法,但这次是以球状的形式,像菜花头部的截面,但是有一些螺旋的迹象出现。

米克(8;6) 蜗牛壳7:他开始画了一个圆,然后画了相互叠加的圆弧。短号5:画了同心圆,但是没有任何螺旋形状。弯曲形状6:“*它是一个洞,从顶端到底部周围全是圆。*”他画了两条平行线,表示它们之间中空的部分,同时还画了一系列像迪达所画的弧。

格里斯(8;6) 对于短号和弯曲形状,画的和前面的小孩差不多。但是,对于蜗牛壳,画了一个一个堆积在一起的空碗,每一个空碗通过一段圆弧和另一个空碗连接。然而,这些圆弧没有形成一条线,而是远远地分开,出现了螺旋状的雏形。

埃皮(9;3) 对于短号,他画了一个简化了的螺旋形状。对于蜗牛壳,一系列的碗,一个在另一个上面。

德普(10;2) 对于蜗牛壳,很好地表现出向螺旋接近的倾向。他一开始画了一个个堆积在一起的碗,然后用半圆替代碗,将圆弧闭合,接下来向内部逐渐弯曲,最后刚好是一个螺旋或者螺丝钉的截面。短号:一开始画了同心的、有颜色的圆,然后是螺旋的起始部分。

鲁(10;4) 蜗牛壳:他一开始画了一个从外面看到的圈,然后用两条平行线将它进行切割。这时他开始画一幅新的画,这幅画呈现了从上面看到的那个圈的一个转折的一半,但是忽略了截面。同时,他成功地画出了短号简化的截面(只有一个转折)。

维(10;8) 蜗牛壳:他画了一条垂直的线,被一系列水平的线所切,然后在第二幅画中,把它们变得倾斜,最后是一个简化的螺旋的截面。短号:一开始是一系列的同心圆,红绿交替。然后,他开始以一种预期的、螺旋的形式把它们一个个连接起来。然而,他没有掌握弯曲形状6。

最后到达第四阶段,11—12岁,在这个阶段,我们发现儿童能够立即解决短号和蜗牛壳的截面问题,但是弯曲形状的截面问题至今还没有被完全掌握。

弗特(11;2) 蜗牛壳:一系列倾斜的椭圆,一个一个叠加在一起,形成了一个螺旋的截面。短号:首先是用绿色蜡笔画的螺旋,然后是一个红色的螺旋,遵从同样的路径。他不能成功画出弯曲形状的截面。

伯格(11;6) 蜗牛壳:他马上画了一系列倾斜的椭圆,一个在另一个上面,因此画出了正确的截面。对于短号,他画得和弗特的差不多。对于弯曲形状,他画的截面和蜗牛壳的截面类似。

这些有趣的结果阐明了截面发展的每一个阶段。这个过程以视点的混合开始,在此阶段,儿童完全不能区分截面和整个物体的外部形状(2A亚阶段)。接下来,儿童能够逐渐区分截面,尽管它还结合了图形的其他方面(对于简单的图形是2B亚阶段,对于螺旋是第三阶段);然而,到最后,儿童能够正确地提出所有物体的截面(对于简单的图形是第三阶段,对于螺旋和弯曲形状是第四阶段)。

从进一步实验中得到的结果使得我们能够继续进行在这章开头中断的讨论——探讨射影和欧几里得运算之间的关系。如果我们同意并理解一个欧几里得固体只能被射影性地想象(在视点几何学中),反过来,射影空间所固有的视点总是和欧几里得空间内的位置或运动有关(物体的几何学)。那么,我们怎么解释在最初的时候儿童不能画出截面,而最终还是能够将其画出来呢?

根据第二阶段(对于螺旋是整个第三阶段)最初的儿童反应,我们可以得出以下主要结论:归根结底,儿童不能描述出截面主要是因为一直不能区分视点几何学和物体几何学。这也是儿童在透视和射影邻域内不能解决类似问题的真正原因(第六—八章),但是它在截面的情况中更为突出,这也正是为什么我们选择在这里对其进行讨论。

开始,简单的拓扑概念使得儿童仅仅能够考虑物体自身,不能通过连续的闭合或同源对应关系将它们和其他物体进行联系(第一至五章)。但是,他们很快发现必须进一步探索,并且通过分组位移的整个概念系统(测量、距离、长度、坐标等)把物体联系在一起,或者通过不同视点的整体协调(透视、射影、截面)把它们联系在一起。

进一步,为了应用这两个全局性的概念,儿童必须把它们联系在一起。因此只要儿童仍然被简单的拓扑概念所主导,他是不能区分欧几里得和射影关系的,因为还尚未形成这两个概念。为了预测截面的形状,他必须想象切割的欧几里得操作(物体的几何学),同时为了分离截面的内部视点(视点几何学),他必须想象固体的一个射影。结果,当要求一个4—6岁的儿童(仅仅学会了画圆和正方形)预测截面的形状时,我们能期望的也就是他把不同的关系混在一起。

因此,儿童的画包括:完整物体的轮廓、各种不同的平面、小刀切割的方向,甚至切的动作(一条线),偶尔也会有儿童所谓的"平的"(意思就是截面,尽管完全没有形状或者轮廓)。这个年龄儿童的绘画中出现的"视点的混合",妨碍他们正确地画出截面,这并不是因为它阻止了他们考虑物体的内部。恰恰相反,心智的现实主义经常包括固体的内部景观,但是因为它暗含了不能区分固体几何学和视点几何学的能力,所以它阻止了儿童分离一个特定的视点,比如属于截面的视点。结果,当儿童沿着将要进行切割的线看着固体,并且试着去想象将会产生什么样的表面时,他不能避免不同的面和完整固体的总体特征分散自己的注意力。

然而,我们逐渐发现,截面并不仅仅是分离视点和物体几何学的问题。它还包括属于视点几何学的透视和射影运算与属于物体几何学的位移和位置之间相互作用的过程,或者可以说是更加紧密的合作过程。因此,要预测圆柱、圆锥、螺旋或者弯曲形状的截面,儿童必须想象小刀的运动和小刀将要追踪的外部路径(小刀和固体外围之间的交叉线)。为了能够做到这些,不仅正对儿童的那面,还有整体的固体,都要求其能够依次在射影中想象固体。换句话说,能够从很多可能的视点想象固体。

因此,我们发现在每一个发展阶段,穿过固体的运动的欧几里得概念是以这个固体的一个射影概念为前提的,反之亦然。这是正确的,不仅对于表面,甚至对于线本身。非常恰当的一个例子就是,由两个面交叉所形成的线——在现在情况下,由固体的截面沿着一个面,刀片沿着另一个面形成的线。这里的两个例子就是方环(上面的问题2)的横截面和圆柱(第一节)的纵截面。这两个物体的截面都是直线,或者沿着正方形的边(方环的截面)或者沿着矩形的短边(圆柱的截面,忽略在长边上的正切面)。

现在,想象这些线对于儿童来说绝没有看起来那么容易。在2B亚阶段,我们仍然

发现他们预测圆柱的纵截面为一段圆弧(比如,见第一节的拉乌),方形环的横截面是一个圆(见第三节帕尔)。直到3A亚阶段,儿童才能够把这条线感知并想象为由两个面相交而形成的,这就意味着它和想象由“瞄准法”(第六章,第一部分)产生的射影直线一样困难。这也正是我们所期望的,因为如果前面的讨论是正确的,两个面的相交是以射影截面的运算为前提条件,射影截面的运算与将物体之间联系起来的欧几里得运算同时发挥作用。

总体上,想象截面(或者我们刚才所叫的:面的相交)是一种明确的“形状分离”,因为它是从物体的整体形状中分离出一个特定的表面。但是,这种“分离”比第一章和第二章中讨论的基本图形(触觉和绘画)需要更大程度的主动性。这种分离不只是提取物体的基本特征,而是完全建立在主体行为的基础上,因为它不仅仅需要两种类型的运算——一个与物体相关一个与视点相关——而且需要在这两种类型的运算或行为之间建立对应性。这些行为是通过什么样的方式被保存或记录为图像的形式,这仍然需要我们进行讨论。但是,我们应该回到这个问题,它会出现在我们研究的发展过程的每个阶段中,当我们研究儿童射影概念的最后一个方面时这个问题更突出。这就是固体的“发展”和面的“旋转”。

第十章 旋转和面的展开①

在本章给出的儿童对投射问题的自我概念研究的最后例子中,出现了一种矛盾的境况,这一境况非常清晰地表明了几何概念是如何形成的。一方面,投射概念似乎依赖于视知觉并且仅限于用一种永久的方式来记录知觉信息。因此,根据投射和截面的复杂系统,客体只有在透视情况下才能被个体知觉。尽管在进行深度感知时,客体能够维持一种相对恒定的欧几里得几何大小,但是视觉仍然同时具有欧几里得几何特性和投射特性。换言之,尽管我们感知到的物体大小和它本身的大小相同,但透视似乎把它扭曲了。

另一方面,尽管这些概念可能看上去是直接通过知觉获得的,但直到7—10岁之间,这些概念才会在思维和想象层面上出现。这方面的直接证据来源于儿童自发的绘画,在他们的绘画中"视觉现实"或透视直到9岁才会出现。也就是说,正如第六章到第八章所述,在3B亚阶段,儿童开始理解了透视和投射。由此便产生了这样一个问题——为什么投射关系从知觉水平发展到概念水平,其间会存在几年的长时间间隔。

我们可以谨慎地使用大量有关知觉本身的研究来说明这是一个复杂的问题。在第一章第一节中,我们注意到对知觉大小的估计往往随年龄而发生变化,欧几里得几何"大小恒定性"是一种连续发展过程的产物,正如贝尔(Beyrl)②和布伦斯维克(Brunswik)③所呈现的那样,这一过程的发展会持续到9岁或是10岁,换言之,直到我们所说的3B亚阶段。

现在,这种发展独立于知觉的投射方面,并且与一种在估计看上去的(不同于真实的)大小方面非常独特的变化序列共同发展。在尝试研究儿童是如何估计投射大小(这对于非常小的儿童来说并非易事)时,尽管儿童能够提出或多或少一致的结果,但我们却惊奇地发现:7岁或8岁的儿童在判断大小方面往往比9岁或10岁的儿童更准确;只有在10岁或11岁之后,趋向于成人准确性水平的进步才会重新出现。

因此,对于较小的儿童来说,判断大小似乎相对容易,他们的空间概念很大程度上还没有形成。随着概念化的空间逐渐变得越来越具有组织性,大小的估计也会变得更加困难。当这种结构最终能够在知觉层面上实现时,儿童才会获得大小估计的准确性。④因此,最初的矛盾会变得更加严重,因为最后当9岁或10岁的儿童开始解决用透

---

① 与 Mlles Ch. Renard & E. Sontag 合作。

② F.Beyrl, "Untersuchungen über Sehgrössenkonstanz bei Kindern," *Psych. Forsch.*, Vol. VII, 1926, p.137.

③ Brunswik, E. and Cruikshank R. M., *Psychol. Bull.*, 34, 713, 1937.

④ Piaget, J., and Lambercier, M., "La comparaison des grandeurs projectives chez l'enfant et chez l'adulte," *Arch. de Psychol.*, 33, No.130, 81—130, 1951.

视角度来想象事物的问题时，他们的知觉相对较弱，而那些还没有开始这项任务的婴儿的知觉却相对更有效一些。

因此，显然投射表征绝非仅是相应知觉的复制，这也是前面四章中所得出的主要结论。相反，它是主体动作内化为表象形式的结果，且当表象达到可逆结合水平时，将以心理运算的形式告终。因而，在知觉和想象之间存在一整套逐渐系统化的、内化为表象形式的动作序列。

第八章中研究的多维视角问题与此有关，因为这些内容表明为了想象大量不同视角，主体必须对这些视角进行辨别。换句话说，主体需要对从不同位置看事物和把情境变化与位置变化联系起来的过程中所进行的动作加以协调。尽管知觉总是与某种视角相联系，但这却并非有意识的行为，而对某一视角的想象必然意味着个体将这一视角与其他视角进行了有意识的区分与协调。也就是说，它意味着一种关于真正动作的格式（位置的改变等）。在截面问题上，这一观点会更加清晰，因为在这一问题上，关于面的表象必须直接与切割的动作以及按照位置变化来协调不同视角的动作相联系。

但是在这点上，一个新的问题出现了。如果动作及其内化模仿（以表象形式存在）在运算水平上介于知觉和想象之间，那么便可以假设绘画在这两个极端之间提供了一种自然的中介。因为绘画是一种模仿性的表征，它保留了外在的、物质的特性，而它同时也是内化表象的基础。事实上，这正是第二章中所描述的几何形状的绘画所具有的功能，即与空间概念同步发展的物质表征。现在，关注截面问题时，我们发现某一年龄阶段的儿童在通过想象绘画物体时，他们会呈现物体的内部就像物体是透明的一样，完全不能想象用一个运算平面对物体进行横截。直到7—9岁，当儿童放弃继续产生这些“透明性”的想法时，才能够正确地画出横截面。然而，解释这种明显的矛盾所面临的难度远不及解释知觉和透视表征之间矛盾的难度。因为透明的绘画并不真正意味着儿童具有横截面或是对客体进行投射想象的最起码的概念。它还只是一种三维围绕的拓扑概念，能够说明这种绘画完全不同于投射空间的最具说服力的证据便是：这种绘画总是混淆了各种视角。

当我们在考察投射的唯一剩余方面——一个几乎可以被称为儿童的无意识画法几何学领域时，尽管情况看上去更为突出，但却基本相同。刚才提及的绘画中，在混淆了视角的情况下，儿童经常会在画一个物体时，例如从上面看的手推车，把它的轮子“旋转”到水平平面上（参考图17，2A亚阶段）。在已引用的吕屈埃的研究工作中，他已经定义了这种具有欺骗性的“旋转”，用以表示画法几何学中旋转概念之下的概念。[①]

因此，当儿童处于对日常绘画自发进行这些“旋转”的年龄阶段时，有理由询问他们是否可以用一种理智的方式来改变简单立体图形的截面。简单来说，儿童是否可以把一个立体图形的侧面旋转成为正面，打开或是“展开”诸如圆柱体和圆锥体的规则曲面。

---

① 参见“英文译者注”。

正如可能预期的那样,我们会发现:就像截面一样,旋转和展开面的方法是从一种自发且常规的改变过程中获得的,但这种方法只有在无意识的“假旋转”从儿童的日常绘画中消失后才会出现!因为对于旋转和面的展开的研究深刻地阐明了几何概念的起源,所以我们曾在这个令人好奇的问题上的徘徊可能会获得大家的理解。

第一节　方法和一般结果

为了帮助儿童理解这个问题的本质,我们一开始在他面前放置了一张普通的长方形纸片,把纸片的中间部分向下折,就像屋脊一样,并问儿童:“如果我们在桌子上把它打开摊平,它将会是什么样子?”并要求儿童画出他所假设的形状,之后把纸展开,儿童检验自己的预测。有时候,研究者向儿童呈现一张像隧道一样向上弓起的矩形纸片,以此来介绍圆柱体和圆锥体的展开。

现在,按随机顺序给儿童呈现一系列的立体图形,包括圆柱体、立方体、四面体以及圆锥体,并让儿童画出这些图形展开摊平后的形状。如果儿童发现这个任务太难完成,那么就让他来描述一下在他的想象中这些图形是如何放置的。除此之外,研究者会一直给他提供包含正确和错误答案的绘画,要求儿童从中选择正确的答案,并给出选择的原因。然而,我们很快就从经验中发觉:最后的这个方法并不能单独使用,因为儿童往往非常轻松地就选出了正确的绘画,但并不是通过真正的理解,而是通过在特定细节基础上进行的猜测。他们的选择也往往更不稳定,会随着每次新的建议而变动,但是用绘画展示展开的过程时,他们的意向会得到更明确地、更理智地激发。



图 17　“旋转”和“展开”的发展阶段

最后,在每次开始之前,通常有必要在儿童面前放置一些折叠起来的、与眼平视的立体图形。通过这种方法,我们便可以发现:儿童把一种特定视角和所有可能视角进行混淆的趋势,并据此对儿童在绘画中可能出现的一些自发旋转进行一定的预期。此外,在吕屈埃研究基础上,我们让较小的儿童画一个驾着马车的人,以此来观察他们是否会"旋转"车轮等,或者来看他们是否可以把自己限制于一种单一视角。当然,实验中所使用的立体图形总会在一开始便交给儿童,这样他们就可以把这些图形转来转去,并从所有侧面对图形进行观察。

这项实验的结果主要呈现了两个方面的问题,它们对于几何思维的研究来说同等重要。第一方面是关注儿童在试图想象外侧面的改变时所遇到的困难。似乎8岁或9岁以下的儿童用一种受约束的方式来进行旋转,这种旋转在他们6岁或7岁前的自发性绘画中具有恒常性!第二方面是对旋转的想象以及面的展开极大地依赖于立体图形的展开过程以及在这些动作中所包含的运动技能。尤其是,通过学校作业熟悉了折叠和展开纸张形状的儿童与缺少这种经验的儿童相比具有两年或三年的发展优势。

使用所有的四种立体图形得到的一般发展阶段如下(参考图17)。对第一阶段(4岁以下)的儿童不能进行研究,因为他们无法理解有关立体图形的问题。与其他的投射问题类似,第二阶段的儿童完全不能或部分不能对不同视角进行区分。在第一个时期(2A亚阶段),儿童不能对折叠状态的立体图形的绘画与展开状态的立体图形的绘画进行区分。他们把圆柱体画成一个长方形或一对相互连接的圆形(有时仅仅是一个圆形或是一个椭圆),而圆锥体则被降级为一个圆形或一个三角形。立方体往往被视为一个正方形,四面体像一座山峰、一个三角形或是一个正方形。因此,无论是要求将客体原封不动地呈现还是展开呈现,它都通过一种接近象征性的特定特征来进行表征。这些儿童在画马车的车轮时,也总会对车轮进行"旋转"。这一阶段一直持续到5岁或6岁。

与此相反,在2B亚阶段,儿童开始表现出对原图形和展开了的立体图形的区分。最初的区分包括对立体图形展开意向的暗示,儿童仅仅通过一条线来表示这一展开过程应当发生的方向。在这种情况下,当儿童只是把原立体图形画成一个面时,它的展开图形也只通过一条线来表示。或者,当立体图形通过一个角来表征时,那么它的展开图形用一种不规则的面来呈现,或者用水平放置的或与样例位置不同的原图形来呈现。

有时,改变后的图形通过明确界定的面来呈现,尽管这些面可能与最初的图形无关,或者如果两者有联系的话,这些面的放置缺乏总体的设计。简言之,当儿童试图去想象立体图形的旋转或者展开时,他们无法摆脱当前知觉的影响,被迫用手势来表达自己的意向,他们通过展开立体图形的方位或偶然将它分解来用线象征潜在移动。

第三阶段的特点是儿童能够发现真正的旋转和展开,至少对于某些立体图形是如此。这一过程涉及两个阶段。在3A亚阶段,儿童只表现出了展开中的一步,而并非这一过程的最终结果。总体来说,两种类型的答案大约在同一时间出现。在不完全旋转

的情况下(例如,对外侧面的部分旋转使其呈现半打开的状态),儿童或者把立体图形的部分进行分析而不加以有序重组,或者试图使部分保持或放置成相邻的状态。

在3B亚阶段,儿童能够得出正确答案,至少对于圆柱体和圆锥体可以做到如此。立方体和四面体似乎给儿童带来了更大的困难,并且对四面体的完全正确展开有时直到第四阶段才能够完成。换言之,直到儿童实现了真正的圆锥射影水平(第七章)。

第二节　圆柱体和圆锥体

众所周知,圆柱体和圆锥体是唯一的规则曲面。与不规则曲面相比,它们可以被界定为能够通过一条直线形成的、并且可以在平面上不间断且不重叠改变的面。儿童能够最快掌握的正是这些规则曲面。

在2A亚阶段,儿童对展开的面的绘画与对原立体图形的绘画非常相似,但同时,后者常会包括自发的"旋转"。

费斯(5;4)　他把原来的圆柱体画成了一个长方形。"现在我们要把这个圆柱体展开,就像屋脊一样,把它在桌子上放平。你能画出它的样子吗?——*我不知道*。——试一下。——*会是扁平的*。——和原来一样吗?——(他画了一个长方形,与先前的图形相比有些小)*这个有点小了,但我本来打算把它画成原来的大小*。——但是如果你把它展开,并且有一个小人从上方俯视的话,他会看到什么?——*他会看到纸*(他又画了一个长方形)——这个[1]足够大吗?——(他把原来的圆柱体放在自己的绘画上面)*是的,一样大*。"

切瓦(5;11)　他把原来的和改变后的圆柱体以及圆锥体都画成了圆形。当他通过想象来画马车时,他画了一个两侧有四个圆形(侧视图中的车轮)的长方形(从上方观看),因而他只要消除两个圆形就能够完成圆柱体的一个完整展开。然而,当他自己展开"屋脊"和"隧道"时,他仍然无法预测圆柱体的布局将会是怎样的!

胡伊(6;1)　和切瓦一样,他画出了马车(当然,这两个儿童都是在实验的最后完成这一绘画的,以此避免对结果的影响),但他增加了一匹从侧面看的马。这意味着必须对平面视图的马车和侧面视图的车轮增加第三种视角。根据类似原则,儿童画出了原来的圆柱体。他用两个圆形表示圆柱体的两端,并用表示曲面的两条平行线相连。但是,两条平行线间的距离比圆形两端之间的距离更近。他所画的展开了的圆柱体与原图形非常相似。"这是像打开屋脊一样,把它[2]完全打开以后

① 指长方形。——译者注

② 指原来的圆柱体。——译者注

的形状吗？——*是的*。——它看上去真的像这样子吗？——*是的*。——你看（把原来的圆柱体打开）。——哦，不！”他画出了自己看到的形状，但却没有从经验中获益，因为他在其他图形（例如圆锥体）上的表现与处理圆柱体问题时相同。

布（6;2） 他把原来的圆锥体画成了一个三角形，并说：“应当画一个圆形，但我画不出来。——如果你像展开屋脊一样把这个圆锥体展开的话会怎样？——*我需要把它弄得扁平，但它仍然像这样*（他画了一个三角形，尽管这个三角形更小一些）。——为什么？——*因为我们把它展开了*。”因此，他认为从立体图形到平面图形的变化，可以使用大小的减小来表示一个维度的降低。

热昂（7;1） 他把原来的圆柱体画成两端由圆弧相连的一组平行线。“画出它展开以后的图形。——（他所画的图形，除了圆弧被圆形所替代外，基本与原来一致。）——如果我们用剪刀把你画的图形剪下来，那么我们可以用它来做出这个（圆柱体）吗？——*是的，你把它弄圆*（把用两条平行线代表的中间部分卷起来），*再把圆形放在两端*（他又画了用圆弧连接起来的平行线，以此来说明复原的立体图形）。——试着去做一下（我们把他画的图形剪下来，他试着用这个图画来做出一个圆柱体）。——用这个来试一下呢（一个正确展开的圆柱体）？——（几次尝试之后他成功了。）——现在在不看图形的情况下把它画出来（他根据记忆很容易地画出了圆柱体的展开图形）。”

舍（7;6） 关于原来的圆柱体，他画了和热昂相同类型的图形，一个有直边的长椭圆。[①]对于展开了的圆柱体，他只是重复了相同的图画，并认为如果把绘画剪下来就可以通过折叠来做出一个圆柱体。我们继续把绘画剪下来，他只是通过把纸对折来完成圆柱体。

这些结果极为有趣，它既关注空间概念在儿童自发绘画中是如何体现的，又阐明了儿童关于旋转以及投射立体图形的发展。在儿童的自发绘画中，他们按照吕屈埃的“视角的混合”原则以及由此产生的假旋转对马车进行表征。因此，马车的主体部分在平面，马在侧面，车轮被转到了和车体相同的平面（参考切瓦和胡伊）。在画圆柱体时，儿童也遵循了相同的原则。胡伊、热昂以及舍都把圆柱体画成了由圆形或是圆弧相连的一组线，因而圆柱体的两端与侧面在同一平面上。圆柱体的两端被画成圆形还是圆弧并不重要。

因此，似乎儿童具有画出展开面和旋转面的所有必备先决条件，因为他们看上去能够在想象中联想到一组与大量不同视角相关的虚拟知觉。但当问题变为想象展开面时，无论形状如何，所有儿童都仅限于对原立体图形绘画的复制。此外，他们甚至期望能够把绘画剪下来（例如热昂和舍）进行折叠，用所有的面来复制原先的立体图形。

---

① 即两端由圆弧相连的一组平行线。——译者注

所以,在"混合的视角""假旋转"以及正确的几何投射(或描述)呈现方法之间不存在任何联系,并且后来也并未对此进行探索。这只是一种拓扑表征,关注物体的本质,并且只是表达物体不同部分之间的简单邻近性,而并没有任何形式的欧几里得几何或投射的协调。同时,儿童并不能超越这一水平,想象面的真正展开和旋转,因为它们[1]的基础与简单的知觉印象极为不同。它们意味着一系列由双重机制联系起来的动作(这些动作最初是物理的,但最终被个体内化),既具有机动性(欧几里得几何的),又具有知觉性(通过投射运算而非邻近所形成的群集视角)。

简言之,这些儿童缺少真正的折叠和展开经验,就和他们在试图想象截面时缺少分割截面的经验一样。同样,在自发绘画中出现的"视角的混合",从拓扑角度来说,与在截面中同样使用的从内部(围绕等)展现物体的方法类似——并且它们都远离了真正的平面旋转概念。

在2B亚阶段,我们首次观察到儿童对原来的立体图形和展开了的立体图形进行区别。使用的形式有两种:一种是用线来表示在某一平面上进行面的旋转的意向,另一种是把物体的一部分转向另一个方向。

阿尔布(5;5)　把圆柱体画成一个垂直的长方形,但补充说:"*尽管你看到它是直的,但它是圆的。*——现在我们要像展开屋脊一样把它展开。——(他画了一个水平的长方形)*它扁平地放在桌子上。*——你可以用这幅绘画再次做出那个圆柱体吗?——*我把它正确叠起来就好。*——圆形呢(指了指圆柱体的两端)?——(他画了两个独立于长方形的圆形。)"关于圆锥体,他画了一个没有底边的锐角。"*我只能完成到这个程度了。*——如果我们把它展开放在桌子上会怎样呢(他画了一个简单的轮廓,形状依稀像一个正方形)?"

佩奥(5;8)　画了一个圆形来表示圆柱体,然后在已经展开"屋脊"或"隧道"的情况下,同时评论道:"*当你把它放置成扁平状*(即,展开了原来的图形)*时,它会完全变成扁平的样子*(他只画了一条线)。——这足够制作出另一条管道(圆柱体)吗?——*是的,把这个也加上*(增加了一个圆形)。*你需要把它*(线)*卷起来,并把这个圆形放在下面。*"关于圆锥体:他又画了一个圆形。"*这里是圆的*(指了指圆锥的底部),*这里是尖的。你不能复制尖的部分*(他在独立于圆形的地方画了一个锐角)。——当把圆锥体展开后会怎样呢?——*会像这样*(他做了一个展开并放置成扁平状的手势)。"

乌拉(6;0)　把圆柱体画成一个长方形:"*因为它是直的。*——它不也是圆的吗?——*是的,它是圆的,但它是直的。*——如果你用之前的方式把它展开会怎样?——(他画了一条水平长线)*会像这样。*——这是什么?——*是整张纸。*——

① 指展开和旋转。——译者注

但假设我们只展开一点点呢？——(他画了一条斜线)*像这样*。——(现在给他呈现三种可能的改变情况，其中一种正确，一种也同样有一个大长方形但两个圆形连接在长方形的同侧，还有一种是一个与圆柱体直径相同宽度的小长方形且长方形的每一端都有一个小圆形。)这三种中的哪一种能够折叠成圆柱体？——*这种可以*(第三种)。*因为它是圆的*。”关于圆锥体，乌拉画了一个圆形。“*我画的是底部*。——这个呢(顶部)？——(他画了一个三角形)——然后这个(圆形)呢？——*不能把它放到下面；不，我不能这么做*(他在三角形下面画了一段圆弧)。——如果把它展开呢？——(他画了一个普通的锐角，并做出某种类型的手势。)——下面的圆形呢？——*你从里面看*(这样他在画改变的图形时比原来的圆锥体完成得更好，尤其是使用一个角来表示圆锥体的展开)。”

尼加(7;1) 把圆锥体画成了一个圆形的形状，然后做了一个把中间部分立起来的手势，以此来代表点，“*因为你画不出来*”。要求他使用画展开的“*屋脊*”的方法来画出展开的圆锥体。他把圆锥的底部打开，往里面看(看内部而非表面!)。他又画了一个圆形，并做出立起中间部分的手势，之后要求他把圆形折叠成一个圆锥体。在这一问题上，他用一个有一条线(表示潜在折痕)穿过的大长方形把圆形围起来。现在，圆锥体在他的观察下被展开了，要求他根据记忆重构曾经看到的面。他画了一个长方形，在长方形旁边是一个由许多射线围起来的圆形(像太阳一样)，并做了一个一直把它们[1]提起来的手势。

我们能够看出对原立体图形和展开后的立体图形所进行的区分是如何开始的。儿童或者满足于把展开过程看作是将他的绘画水平放置(阿尔布)。或者他用一条水平线(佩奥和乌拉)或一个近似长方形的面(尼加等)来表示展开的面。同时，整个绘画是对运动活动的表达(展开、延展等的手势)，而并非是对真正展开面的表达。因此，尼加使用带有射线的太阳形状来重构展开面的方法非常典型。他指出了整个展开运动，而非呈现在他面前的立体图形的面。

另一方面，在第三阶段，圆柱体和圆锥体的面通过真正的旋转来改变。但儿童会经历两个阶段。在3A亚阶段(7岁到9岁)，我们会看到一系列有趣的试误行为。这不再是2B亚阶段中对意向动作的描绘，而是对真正视角协调的开始。

在这一水平发现的第一类反应是：儿童对立体图形展开的一个或多个独立阶段进行表征，但他们却不能预测展开过程的最终结果。

尼德(6;6) 画了一个从单个侧面视角观察的马车，此时车轮在车身下面。他把圆柱体画成了一个圆形：“这样正确吗？——*正确，它是一根管道，完全是圆*

---

① 指射线。——译者注

的。——现在假设我们把它展开。——(他画了一个长的长方形。)——你可以用这个图形做出另一个圆柱体吗?——*可以,我们需要把它卷起来*(做了一个手势)。——那圆形(圆柱体的两端)呢?——*它们应当这样来弄*(他把它们分开画了下来)。需要把它们粘上去。"关于圆锥体,尼德画了一个三角形,然后又给它加了一个半圆。关于展开后的图形,他画了一个大的长方形。"你可以用这个图形来做出圆锥体吗?——*事实上它还不够大。它只能做一个非常小的圆锥体*(他画了另外一个图形,这次看上去像一个梯形,因为他想起了从侧面看去圆锥体的斜面)。——你可以再完成一下圆锥体吗?——*圆形需要画圆。你必须把纸张放置合适,顶点要放在最上面*。——但是你还没有对底部的圆形进行处理?——*不*。等一下,*你需要测量一下它*(他把原来的圆锥体放在自己画的梯形上,当看到梯形的面投射到圆锥的每一个面时,他觉得很满意)。"

梅伊(6;6) 他画了一辆从侧面观察的有两个车轮的马车,实际上只有一个车轮可以看得到。"*你看不到另一个车轮,因为它从左到右是直通的*"。他把圆柱体画得像罗马拱,"*因为我可以看到一点圆柱体的顶部*(像弓形一样),*但我看不到底部*(圆底)"。关于展开的圆柱体,他画了一个可以卷起来的大长方形,之后又增加了两个圆形。但是,这两个圆形并未与长方形接触。他把圆锥体画成一个三角形,把圆锥体的展开图形画成一个大的长方形。

博尔(7;2) 同样,他把圆柱体画成一个两端各有一个弓形的长方形。他把圆柱体的展开图形画成是两侧为两个独立圆形的大长方形。"你可以在画它的展开图形时把两个圆形连起来吗?——(他画了用平行切线相连的两个圆形。)——如果你把它剪下来的话,可以制作一个圆柱体吗?——(然后他注意到长方形的宽和整个圆柱体的直径相同)*不可以,因为它已经被折叠了*。——那么画一个更大的吧!——(他画了一个大的长方形,并且在长方形的内部而非外部画了两个与边界相接触的圆形。研究者给他呈现正确的画法,但他仍然更喜欢自己的绘画。)"关于圆锥体(他画了一个三角形),他把展开的图形画成一个三角形和一个独立的圆形。

阿乌(8;0) 这是一个试图对透视图形和展开图形进行区分的很有趣的例子。他把原来的圆柱体画成是两条平行直线,尽管阿乌补充道,"*我不知道怎么做。这里*(圆柱体的两端)*是扁平的,但我把它弄圆了*。——你看到什么就画什么。——*在顶部和底部,它是扁平的,因为这里有一个圆形*。"关于展开以后的图形,他画了一个大长方形:"*你像这样把它卷起来并粘好,把小圆片放在两端*。——你并没有画任何的圆片。——*我不知道怎么画。我不知道把它们放在哪里*(他把圆形放在长方形的两端,但并未与长方形接触)。——*我把它们画成圆形了,尽管它们应该是正方形*。——为什么?——*因为大的正方形*(表示圆柱体透视图形的长方形)*是正方形的,但我却把它们弄圆了。当你把它*(圆柱体的主干)*弄圆时,你必须把它们*(顶部和顶部)*也弄成圆形,当它是正方形的时候,你也必须把它们弄成*

正方形。”

布尔(8;8) 他给圆柱体的透视图形画了一个圆底等,实际上都是正确的。但关于圆柱体的改变图形,他首先画了两个同心圆,“*因为圆柱体变成扁平状了*”。之后又画了由一组平行线相连的两个圆形。“*不,这个还是有一点点卷起来的*”。最后,他画了一个大长方形和两个独立的圆形。关于展开的圆锥体,他画了一个带有弯曲底部的大三角形“*为了让它变圆*”,[①]*他用一条线平分这个图形*“*这样它就可以被转动了*”。

最后一个例子部分展现了第二种反应类型的特点。儿童使用单一的图形来表示立体图形的展开,但是平面只进行了部分旋转,似乎展开的动作在完成之前只是一种粗略的叙述。下面是一些例子。

卢高(7;7) 把圆柱体表征为一个四边图形,三条边是直的,第四条边,即最上面的边轻微拱起,以此来表示弯曲的透视图。在他所画的圆柱体的展开图形中,圆柱体的宽度并未改变,但两端的圆形却被旋转成长于圆柱体宽度的椭圆。因此,所有这些都说明卢高略去了对圆柱体曲面的展开,并且他对圆柱体两端的旋转并不充分。

德加(8;2) 把原来的圆柱体画成两条向外凸出的线连接着两个椭圆,为了描绘圆柱体的曲面,整体形状看上去像一个桶!关于展开的图形,他把同样的圆柱体表征为两条更外凸的线连接着两个更圆一些的椭圆。因此,这里出现了双重(尽管并不完整)的旋转。

拉瓦(8;2) 画出了圆柱体,“*像一根管子*。——现在你必须像展开‘屋脊’那样展开这个圆柱体。——*会有一个十字交叉*,(他画了一个大椭圆)*不,我画错了,应该像这样*(他画了一个像蘑菇的十字形状)。*太有意思了,这个*(蘑菇头的左侧面)*是上面*(他指了指构成圆柱体顶面的圆形),*这个*(蘑菇头的右侧面)*是下面*(即,构成圆柱体底面的圆形),*这个*(蘑菇干)*是这个*(圆柱体的侧面)。——现在仔细观察——*哦,不!*(最终他画了一个长方形,且两端均为半圆。)”

格拉(8;6) 画的圆柱体和德加类似,像一个两端看上去为椭圆的隧道。他把圆柱体展开后变成了一个长的长方形,长方形的边构成了圆弧的弦。“你怎样把它折叠起来?——*我把它们*(圆弧)*转动,我去后面转*。——你可以用你画的图形做出另一个圆柱体吗?——*我不知道,好像并不容易*。”他又重复了绘画,这次画的长方形更大一些,这个长方形被一条线均分且在每个拐角处都有一个小半圆。

维(8;9) 把原来的圆柱体画成两个椭圆和连接它们的两条平行直线(圆柱体

① 指变得立体。——译者注

的侧面)。关于展开后的图形,出现了以下两种形式:首先,两条平行线垂直于圆柱体的侧面(这表示展开圆柱体时所进行的运动)。其次,经过仔细考虑,他用另一条线把这两条线的两端连起来,由此形成了一个长方形,用以表示圆柱体曲面在某一平面上的展开。他把圆锥体画成一个圆形的上面有一个箭头,箭头干表示对卷起来的圆锥表面的连接,箭头尖表示顶点。这样,在绘画中就体现了圆锥体形成的运动。

乌拉(8;10) 关于圆柱体的展开,他说,"*你需要把它剪开。*"他随即把曲面分成两个,就像两端的圆形一样。最后,他画了两个圆形,并且用和原来的圆柱体相同宽度的长方形把这两个圆形连起来。因此,他的行为介于对立体图形展开运动的描绘和透视绘图之间。

卢特(9;1) 把展开的圆柱体画成一个两侧为连续半圆的长方形。展开的圆锥体像一个梯形,后来又像一个三角形,最后是一个底部有一个圆形的三角形。

拉兹(9;2) 一开始他把展开的圆柱体画成是包含两个圆形的长方形,且长方形的两端附近各有一个圆形,然后他又画了两个半圆,且这两个半圆与长方形接触(就像卢特)。他把圆锥体画成底部有一个圆形的三角形,这是在3B亚阶段之前对圆锥体展开的常见描绘方式。

这些便是3A亚阶段中出现的两种典型反应。在第一种反应中,儿童把面的展开用一种静态的且分离的方式表示,它与第二种反应相比,发展水平略低。在第二种反应中,儿童使用一种单独的、包括一切的图形来表示立体图形的展开,更具有动态性的特点,并且它描绘了面的真实旋转过程中的一个阶段。

第一种反应类型是一种从2B亚阶段到3A亚阶段的过渡。尽管第二种反应比第一种反应的持续时间更长,但在7岁到8岁半之间的这段时间里,这两种反应都将出现,并且有时甚至可以互换,就像布尔在实验中从第二种反应又回到了第一种反应。

这说明:我们可能注意到了这两种反应类型之间的联系方式和2B亚阶段中一样。这些反应有时用模糊的线来表示一种运动意向,例如展开立体图形,有时用不具有清晰轮廓的扁平面来表示旋转表面的平面特征。这两个方面(一个是动作的,另一个是射影的)表现出欧几里得几何运动和射影视角之间的相互关系,且它们再次出现在此处所提到的3A亚阶段的两种反应类型当中。

首先,第一种反应说明儿童具有这样一种概念,即旋转的表面继续具有一种扁平的或是平面的特点,尽管儿童不能把它们联系成一个连贯的整体。阿乌的例子很好地说明了这一点,他试图对旋转表面的外观和原立体图形的透视图进行区别。另一方面,第二种反应主要说明了动作本身,儿童在动作发生之时并不能对其最终结果进行完整地预测。德加、拉瓦、维以及乌拉的反应尤其清楚地说明了这一点,他们都表现出了意向运动以及在旋转过程中的表面。换言之,第一种反应表明了一种由于完成得太快而跟

不上且不能理解的动作，结果便是儿童不能把不同视角进行整合。那些用于反映表面被完全展开但却彼此不相关的绘画就说明了这一问题。第二种类型的反应表明了一种儿童努力去遵循并理解但却不能在想象中从头至尾维持下去的动作，因而他们绘画中所表现出的展开和旋转依然不完整。

因此，从当前阶段的儿童行为中所得出的主要结论与从2B亚阶段的儿童行为中得出的结论相同（2B亚阶段中的儿童行为是区分原来的和展开了的立体图形的开始）。它再次强调了有关运动的欧几里得几何概念和源于特定位置且随运动而展开的视角的投射概念之间所存在的重要相互依赖性。特别是，在面的展开与立体图形截面的展开（第六章）中存在一个同样明显的问题，即为了想象一个不曾知觉到的视角（即，在立体图形展开之前形成的关于展开的面的表象，或者在把立体图形分割之前形成的关于截面的表象），儿童必须具备有关将要实施的动作的某种观点。但这种观点反过来也说明了在位置和运动方面相互协调的多种不同视角的概念。

事实上，对将要展开的立体图形的不同侧面的感知并不足以让儿童想象即将发生的过程。并且与截面情况相比，这一问题在当前情况中更为重要，因为这里所有与问题有关的信息都能被儿童感知到。为了实现从对原来立体图形的知觉到对其展开图形的表象或绘画，儿童必须要进行一种心理动作，并同时在头脑中协调好不同视角之间的关系。3A亚阶段表明单独考虑其中的一种观点是不够的，这些观点彼此互为补充。

最后，在3B亚阶段，正确答案出现了；换言之，两种运算系统获得了对应性。一方面是在展开立体几何图形的面时实现了对旋转的运算组织，另一方面是对表征立体图形改变时所包含的投射旋转的协调。下面列举了一些儿童在这一水平上的表现，前三个儿童的发展介于3A亚阶段和3B亚阶段之间。

卡姆（6;9） 看着圆柱体，毫不犹豫地画了一个长的、展开了的长方形，并在长方形的左右两侧各画了一个圆形。他立刻把展开了的圆锥体画成一个底部有一个圆形的大三角形，尽管这和3A亚阶段中常见的一样——展开的圆锥体底部仍然是一条直线（以他这个年龄的视角来看，这并不奇怪）。

博斯（7;7） 关于圆柱体，他先画了彼此独立的两个圆形和一个长方形。随后，他把圆形连接到长方形的短边上。“你怎样把它折叠起来？——（他呈现了正确的方式。）——你是有意把这两个圆形放在中间的吗？——*是的*。——如果把它们中的一个放在这里，另一个放在那里（一个在左边，一个在右边），这样做还对吗？——*它们两个必须彼此正对*。——那么你不能把它们放在任意位置（沿着长方形的边）？——*哦，是的，可以，因为它们是圆的*。——甚至可以在同一侧吗？——*不可以，因为上面会丢掉一个圆*。”

本（8;7） 起初画了一个透视的长方形，然后用一组线把它纵向分割。中间的空间表示一个空隙：“*当你把它展开一点时是这样子的*。”因而他表现出了进行中的

动作,甚至是刚开始的动作,正如3A亚阶段中那样。然后,他突然画了一个大长方形以及与两条长边相连的一个圆形,并指出了圆柱体的正确展开方式。他立刻正确画出了圆锥体的展开图形,即一个有曲底的三角形和一个与之相连的圆形。

马尔(9;2) 当研究者向他呈现一个圆柱体时,他立刻说,"*它是一个长方形和两个圆形。*"关于圆锥体,他没有说话,准确画出了图形,即一个底边弯曲的三角形。

吉埃(9;8) 关于圆柱体,他画出了正确的图形。"*你必须把这两个(圆形)封闭起来,然后把纸绕起来(长方形的环)*"。他正确画出了圆锥体。

关于儿童是如何找到正确答案的研究非常清楚地表明:静态的感知观点并不足以成为想象旋转和表面展开的基础。只有把具体动作内化为符号表象才可以实现对旋转和表面展开的想象。

显然,儿童对圆柱体或圆锥体的感知和我们一样都独立于其表面展开的动作。他们同样用三维的眼光来看待这些物体;他们同样知道这些立体图形的底是圆的,顶是圆的或尖的,面是弯曲的。当要求展开立体图形时,他们所不能理解的并非是像这样的立体图形的表面形状,而是这些形状在单一平面上的放置。儿童直到3B亚阶段才能够想象关于这一问题的动作并将其内化为运算形式。

同时,我们有必要意识到这一成就本身依赖并得益于视角间的协调。由于立体图形需要在三维上进行想象,而不仅是单维或二维,因此如果没有这一成就,儿童便不能想象发生的动作。把圆柱体或圆锥体的曲面投射于相同平面,以此作为从一个视角到另一个视角的基础,同时对它们进行区别和协调。这一过程,正如前面四章所呈现的那样,无疑会比知觉更为复杂。

因此,在解决平面旋转问题上需要内化的动作不仅包括那些与物体或位移有关的动作,同时也包括与主体有关的动作:这些动作把不同的视角联系起来,使之与改变的平面所表征的特定视角相一致。

所以,这是一个关于使得儿童能够在立体图形展开之前对其进行预期的心理表象或符号表征机制的理解问题。在这方面,刚才所描述的行为的变化相当清楚地说明儿童对立体图形外表面的感知并不足以把它们置于想象的平面当中。因此,想象并不是对感知的继续,而是对施加于物体的动作的继续,并且正如2B亚阶段和3A亚阶段的实验结果那样,在成为运动结果的想象射影之前,它(想象)包括一种对运动的内化模仿。

考虑到在画马车,有时甚至是圆柱体时,年龄较小的儿童尽管不能对必要的几何旋转进行想象,但他们却相当自发地使用了"旋转"的方法(按照吕屈埃的观点),因而这种符号表征出现得如此之晚更值得注意。所以,单从绘画技术角度出发,较小的儿童似乎已经相当具备完成真正的平面旋转的能力。然而,由于儿童的"假旋转"并非源自欧几里得几何或投射的观点,而只是表达了物体本身固有的邻近关系,因而他们所缺乏的正是由适当控制的动作所引起的模仿格式。离开这种格式,儿童便不能完成真正的旋转。

圆锥体和圆柱体之所以比立方体和四面体(这是我们现在准备去研究的)更容易改变,很可能是因为圆柱体和圆锥体的表面并非扁平状,而是弯曲的,结果便是曲面本身往往暗示着将其展开的动作。此外,与四面体和立方体的四个面或六个面相比,这些立体图形只有两个或三个面。[①]

第三节 立方体和四面体的改变

由于在第一阶段中,儿童把圆形和正方形都画成了一个模糊的封闭图形,因而要求他们画出立方体或四面体的展开毫无意义。尽管在第二阶段开始对不同立体图形的绘画进行区分,但他们还是把这些立体图形画成(想象成)一样的,无论这些图形是应当展开还是保持原样。下面是这一水平的一些例子,第一个儿童处于第一阶段和第二阶段之间。

安布(5;1) 首先,他把起引子作用的"管子"(一个卷起来的长方形)画成一个没有完全闭合的圆形:"你能画出它完全展开以后的样子吗(我们把它展开)?"他画了一个开口更大一些的圆形,尽管这一图形暗示着一种螺旋形状,但是却没有复制长方形。因此,他所表达的是像这样的运动。如果他在画出图形之前没有看到展开后的"管子",那么这种反应对于2B亚阶段来说是很适当的。关于原来的立方体,安布把它画成了一个封闭的圆形(就像第一阶段中画的正方形)但增加了一根短线。这形成了位于圆形顶部45°位置的一条切线。圆形表示立方体的一般封闭特性,切线表示纸翼,它使得立方体的两个侧面连在一起。当要求他画出在桌子上展开的立方体时,他又画了圆形,但这次的圆形更小一些且没有切线,从而表示立方体现在被展开了。

谢乌(5;11) 把原来的和展开了的四面体画成了长方形。

乌拉(6;1) 把原来的和展开了的四面体都画成了三角形,尽管他采用与安布在立方体问题上相同的原则,把展开了的四面体画得更小一些。他把原来的和展开了的立方体都画成了正方形,尽管在立方体问题上维度并没有发生变化。

没有必要再进一步列举这一水平的例子,因为它们具有同年龄阶段中圆柱体和圆锥体绘画方面的特点。尽管儿童非常明白自己需要完成的是展开立体图形并画出展开的面,就像他在演示模型中所看到的那样,但他把展开的面画得和原立体图形的面一

① 尽管儿童在自己已经能够画出改变的图形后便能够对原图形进行重构,但他们却不能只从对改变后的立体图形的绘画研究中重构原来的立体图形,这具有重要意义。

样。然而,在这一问题上,有必要注意一下所有这些关于原立体图形的绘画所共有的,在第二节中我们将其忽略的一个特点——2A亚阶段的儿童往往把展开的面画得比原立体图形的面更小(尽管它们具有相同的形状)。所以布曾说:"*尽管它比这个(相同形状的图形)小,但它们的形状还是一样的……因为它被展开了*。"现在,在立方体和四面体问题上,安布给出了相同的答案。要彻底了解这一回答的原因并不困难。当把立体图形在单个平面上改变或投射时,先前封闭着体积的面便失去了一个维度,这种变化在儿童看来是大小上的减小。儿童并非完全无意义的反应立即能够说明,他们理解了抛给他们的问题。他们自然而然地期待展开立体图形最终将产生一个单一的平面,但却不能使自己摆脱原立体图形的视角,因为他将面减小为一种对原客体的压缩表象！相比之下,我们在2B亚阶段看到了区分方法的熟悉痕迹。

卡特(5;3)　把四面体画成了一个正方形的顶上有一个三角形。展开的四面体是一个被圆形所覆盖的正方形。对此,他做了如下解释:"*那*(圆形)*是你展开四面体的地方*。"

拉兹(5;11)　把立方体画成了一个正方形和一个锐角,以此来表示"*那里的那些点*"(拐角处)。另一方面,展开了的立方体被画成了比原立体图形大一些的长方形。四面体用一个三角形来表示,展开后的四面体是有一条斜线穿过的一个长方形,"*因为你在这个地方*[①]*进行折叠*。"

布尔(6;2)　把立方体画成了:"*一个正方形*——我们用一页平整的纸来做出这个盒子。你可以画出纸的形状吗?——(他画了一个大正方形。)——你可以用它来做出像这样的一个盒子吗?——*可以*(我们剪下他画的正方形,他试着把这个正方形折叠成盒子的样子)。*没有用*。你需要很多个正方形——多少个?——(他转动立方体)*这里有1个,这里有1个……6个*(他画了6个独立的正方形)。——(现在给他展示立方体的面并不是粘起来的,而是叠出来的。)——现在,你能画出我们用于折叠立方体的大片纸张的形状吗?——(他画了一个大正方形。)——折痕呢?——(他用小的边缘把正方形围起来,这些边缘表示进行折叠的面并形成了狭长的长方形。)——现在试着去折叠(我们把他画的图形剪了下来,递给他)。——*做出来的图形的和原图形不一样*。*这个太高了*(原立方体)。*你需要给它加一些盖子*。——真的吗?用另一页纸再重新做一次。——(他又画了一个正方形,这次他把正方形分成了9个差不多相等的部分。)"

吕斯(6;2)　他把四面体画成了一个三角形,把展开了的四面体画成了一个大正方形。立方体被画成了一个正方形,展开了的立方体被画成了一个稍大一些的正方形,并且它被分成4个较小的面积相等的正方形。

① 指斜线处。——译者注

与圆柱体和圆锥体一样，2B亚阶段仅仅是对原立体图形的绘画和展开后的面的绘画进行区分的尝试行为的开始。事实上，尽管儿童还是把它们的形状画成一样的，但这一阶段中改变了的立体图形通常比原图形更大一些，这与2A亚阶段相比是一个很大的进步。遇到(原图形和改变了的图形)不同之处时，他们主要关注于图形侧面数量的不确定性增加，或者是对折叠或运动的模糊暗示，就像卡特的圆形那样——“*这是你折叠的地方*”。布尔的一幅绘画也可以归入这一情况之中，他表现出试图把展开了的立方体的边缘进行回折的动作。因而，这一行为已接近随后阶段中的典型表现，但他的另一幅绘画只是通过独立的或是连续的正方形来表示侧面数量的增加。

与当前水平不同，第三阶段值得注意之处便是，儿童在理解展开和旋转的真正本质方面的进步。在3A亚阶段中，曾在圆柱体和圆锥体上表现出的反应会再次出现。也就是说，绘画所表现的并非展开的最终结果，而只是这一过程的一个阶段；或者，只对侧面进行了部分旋转并对所包含动作进行暗示。下面是关于第一类反应的一些例子。

皮尔(7;2) “你把这个(立方体)叫作什么？——*正方形*。——画出它展开成扁平状之后的样子？——(他画了一个长的长方形。)——你从哪里把它折起来？——*像这样来折叠，把这两端*(指向了长方形的短边)*提起来，并把它们折起来。那里*(长边)*我不知道该怎么弄*。”

阿格(8;0) 把立方体画成了一个正方形。把展开了的立方体画成了两个大的长方形。“*我做了两个长方形。把一页纸这样卷起来*(表示立方体的三个连续侧面)，*另一页纸这样卷起来*(表示另外三个直角面)。——你可以画出它们的折叠之处吗？——*我画不出来*。——如果你愿意的话，再画一个新的图形。——(然后阿格画了三个水平粘起来的正方形以及三个垂直粘起来的正方形。)——*这些正方形在下面*(垂直方向的三个正方形)。——你是否发现这两页纸可以放在一起？——(他把它们连成了字母T的形状。)”

瓜奇(8;8) 把展开后的立方体画成一个大正方形，并且在大正方形的每个拐角处各有一个小正方形(大概是大正方形的小的十分之一)。关于四面体，他画了一个长的长方形，长方形里面是一些表示折痕的斜线，然后他画了一个大的三角形，在这个三角形下半部分的中央是另外一个更小一些的三角形，表面的其余部分被一对斜线分割。结果便是在一个较大的三角形里面嵌套着四个三角形，其中三个是不完整的，一个是完整的。简言之，出现了4个三角面的迹象。

布朗(9;5) 起初把四面体画成了一个普通的三角形，然后把这个三角形进行了均分，最后又在原图形的基础上增加了一个同样均分的三角形，由此便形成了一个有对角线的菱形。“四面体像这样(我们把他画的图形剪了下来，他试着对此进行折叠)？——*哦，天呐，我叠的不好*。”他把这个图形剪成两个三角形，但还是没有成功折叠。最后，他画了很多独立的三角形。他说，“*你需要三四个三角形*。”

第二种类型的反应与3A亚阶段中关于较为简单的立体图形的反应类似,尽管这里的反应形式更为突出。虽然儿童处于发展过程中的一个不完全阶段,但他们努力去做出展开的动作。然而,从一种状态过渡到另一种状态的抽象运算,已经超出了表象或符号思维的边界,它几乎不能用一种静态的图形来表达。因此,儿童依赖于一种符号表征或图表,并且画出了部分旋转的图形侧面,但他们还未到达最终的目的地。

斯普(7;6)　起初,他把立方体画成一个普通的正方形;然后,他又增加了三个狭窄的梯形面,这样看上去就像一个立方体的透视图形。"如果我帮你把这个图形剪下来,你可以用它做出一个盒子吗?——*可以*(我们把图形剪了下来,他一边观察立方体,一边把图形进行折叠。当他的做法不奏效时,他看上去很难过)。——这个给你(给他一个立方体的模型来解决这个问题),再试一下。——(他展开了一点立方体并画了一个正方形,然后时常观察立方体模型,并在原图形基础上增加了四个面,但这些面仍然是狭窄且半开放的,它们并没有得到完全的旋转。)"从样例绘画中,他首先选择了交叉的五个正方形,然后完成了正确的绘画。

德斯(8;6)　首先画了一个普通的正方形,并且说,"*下面我将完成旁边的另一页*(即另一面)。*还有这里*(其他面)*等*。"通过这种方式,他在最初的正方形基础上增加了四个面,尽管这些面只是半开放的并且源于透视角度。最后,他给这些正方形中的一个增加了一个更大一些的正方形,由此形成了第六个面。因此,这幅绘画能够正确表示半开放的且顶部完全旋转的立方体。从样例绘画中,他立即选择了一个七个正方形的十字交叉。关于四面体,就像在2B亚阶段那样,他起初画了一个被分割为两个三角形的大菱形,但随后他在菱形的下面两条边上增加了两个狭窄的三角形透视图形。他说,"*你看不清楚它,因为它被隐藏起来了*。"要求他画出完全展开的四面体,但他只画了与第一个类似的图形。

布隆(8;10)　先画了一个普通的正方形,然后把正方形分为了四份。"你想怎么做?——*我试一下,然后再看看*。——这样对吗?——*不对,因为我画的图形并没有扁平放置,而是都竖着*(因此,他把这些部分看成是侧面)。*这部分*(第一个四分之一的正方形)*在顶部,这个*(第二个四分之一)*在底部,这部分在前面,这部分在后面*(剩下的两个四分之一正方形)。*还需要一个正方形*(他又单独画了第五个正方形)。——这样就可以做出一个完整的盒子了吗?——*不,我不知道应该怎么去做*(然后他画了立方体的透视图形,一个面是半开放的,好像处于展开的过程当中!)。——如果我们把这个图形剪下来,它可以做出一个盒子吗?——*不可以,因为这些正方形有点画错了*(即,所有的面都是透视图形)。*我想再试一下*(他先画了一个真正的正方形,然后增加了一个正方形的透视图形,之后又为底部和侧面增加了长方形,这样便构成了介于透视图形和完全旋转的正方形之间的中间图形)。*我准备在这个地方进行折叠。不,这样不对,这里太狭窄了*(因为它属于半透视状态)。"

施奈(8;6) 他把展开的四面体画成一个被分割成四个三角形的菱形。菱形的顶角辐射出许多形成锐角的线,这表示展开的动作。然后他试着用表示旋转了的侧面的一对二分菱形来代表展开图形。最后,他画了一个大三角形,且它的每条边都与较为狭窄的三角形相邻。这些图形表示在展开过程中从透视角度观察到的四面体的侧面。

瓦洛(9;6) 首先画了一个正方形,然后又画了一个立方体的透视图。"如果我们把这个图形剪下来,可以用它做成一个盒子吗?——哦,*可以*(他试着去这么做,折叠,展开,再折叠,他并没有意识到一个透视图形的侧面是绝不可能做出一个立方体的!)。——你觉得自己可以做出一个盒子吗?——*可以,只要继续尝试*(他再次开始折叠)。*少了些什么!*"最后,他画了一个类似展开的盒子的图形,然后放弃了对这一问题的解决。

拉兹(9;6) 同样,他也试着把展开的四面体进行了一种半完成的展开。他画了一个大的正方形,且正方形的对角线在图形中央交叉。由此画出了四个缺少垂线的三角形,好像四面体进行了部分的展开。

在这一中间水平,这两种对比鲜明的反应比对圆柱体和圆锥体的反应表现得更为明显。我们有必要对这两种反应进行仔细研究,因为它们很好地阐释了在想象展开立体图形时所包含的机制类型,并且整体上通过符号思维进行运算。

在圆柱体和圆锥体问题上,这一亚阶段儿童的反应无非是以下两种。他们或者表现出展开动作的某种静态的、不完整的方面,因为他们不能同时想象整个过程。或者,他们试图去遵循展开动作的动态的、可运算的特点,但却只能对这一过程的开端进行预期,描绘了稍微打开的立体图形,而无法预期其他的动作。

第一种反应可归结为对展开结果的不成熟预期,儿童不能完全详细地想象这一过程,他们只能呈现出这一过程的某些方面。因而,皮尔把立方体看成是一个长的长方形,而阿格把它看成是两个长方形,布朗把四面体看成一个菱形。这些都是改变了的立方体的真实表象——它们与2B亚阶段中仅仅给出的暗示不同——但它们并不完整,因为只涉及了所需完成的运算中有限的某些方面。另一方面,第二种反应直接与运算本身有关,强调运算的连续性,并通过这一方式强有力地表达了这种运算和物理动作之间的联系。

事实上,第二种类型的绘画在展现整个立体图形的方式上与第二阶段非常相似,除了现在的绘画是透视图形且稍微展开,好像暗示着展开过程真的发生了。尽管儿童可以非常明确地画出这一过程的起始阶段,但却不能想象接下来的阶段,更不用说是最后的结果了。儿童在画了各种展开面,并让其中的一两个面稍微展开后,他猜想现在可以把他的绘画剪下来,并把它做成一个立体图形。当然,他惊讶地发现情况并非如此。例如,瓦洛认为所画的立方体侧面的透视图可以被折叠成一个真正的立方体。简言之,儿

童认为自己画的展开过程的草图将会帮助他发现接下来的情况。这是一种很合理的假设,但这样的一幅绘画只表现了一种符号的展开,是一种关于正在发生的情况的图画;与此同时,儿童却不能继续想象他已经符号化的动作的直接后果。

这是为什么呢?为什么对这一过程最初阶段的正确表征却不能通向对其结果的正确描绘呢?最重要的是,在一眼看上去平面旋转(较小儿童自发绘画中所出现的动作)都以相同方式进行的情况下,如何对这一困难进行解释?

在这一点上,我们可以充分理解在诸如简单的展开这样的普通动作与诸如平面旋转或展开这样的运算之间的基本区别。一个简单动作可以在不与其他动作配合的情况下实施,并且一旦完成,就可能在想象中再次生成一种模仿的或符号的表象。但只有在简单动作真正完成后才可以进行想象,我们从儿童在第二阶段的反应中多次看到这种现象。至于当前水平的儿童,他们正处于从动作到运算的过渡阶段——尽管在其他领域中,他们已经能够采用运算格式——他们还只能想象动作的开始(第二种反应类型),或者是这一动作的某些结果(第一种反应类型),而不能想象完整的最终结果。

与此相反,运算是用可逆的、可传递的方式连接起来的一个动作系统。这意味着单个的旋转(例如,立方体的一个面)或是一个三维立体图形面的改变,事实上是假设对客体大量投射视角的整体协调以及在一种参考系中对欧几里得几何空间的相应组织。换言之,虽然运算会假设存在一种整体系统,但是简单动作却对这一系统进行预期。但它们却导致了这样一个系统,从动作到运算的转变所需要的正是对这些动作的逐步协调。

第三阶段代表着这一过程的开始,但从儿童的两种反应来看,这一阶段的局限性还是很明显的。儿童可以想象立体图形特定部分的展开或者是整体进行改变的最初阶段。但他们却不能完成这两个过程,无论是向心的(从动作的结果开始)还是离心的(从动作本身开始)。在这两种情境中,儿童都不能预见已经开始的绘画动作的结果,因为不能把该过程的不同方面联系起来纳入一个单一的、相互支持的系统之中,而只能对这些方面单独进行分析。

关于立方体和四面体的正确答案分别出现于3B亚阶段和第四阶段。但是,在立方体问题上,我们有时候发现一些超常儿童能够在3A亚阶段之初便给出正确答案,因为他们具有特殊能力或是有过在学校中折叠或制作物体的经历。关于四面体,同样在3B亚阶段有些儿童已经能够给出正确答案,尽管这种情况与前一种情况相比出现的频率更低。下面是一些正确回答的儿童的例子。

卡姆(6;9) 我们已经观察到卡姆解决了圆柱体和圆锥体的问题。现在他正在解决立方体的问题。"*这个有些难:你看不出来它是怎样制作的!*——和前面一样尝试一下,怎么样?——*哦,知道了。我有办法了*(他画了一个长的长方形,并把长方形分成了四个正方形)。*这一轮很顺利。现在我们需要这个和这个*(他把另外的两个正方形分别加在排列成行的四个正方形中最后一个的两侧,做出了正确的

图形)。——你怎样把它折叠起来?——*你把这些*(围绕着一个做立方体底面的正方形的其他四个正方形)*拉起来,然后把这个*(正方形)*弯下来放在顶上*。"

特尔(6;10) 同样,他也画了四个排成直线的正方形,观察着说,"*当把立方体展成扁平状时,你会得到四个正方形*(侧面),*但是你仍然想再获得两个正方形,一个放在顶部,一个放在底部*(他继续增加了这两个正方形)。"

鲁克(7;7) 在他展开并画出"屋脊"之后,研究了一会儿立方体,然后他没有再做进一步检验,并且什么都没有说,便在第一次尝试中就画出了一个正确的、完整的改变图形。

埃贝尔(8;2) 首先做出了3A亚阶段的第二种反应,把一个正方形作为立方体的底面,并在它周围围了四个从上方观察到的稍微展开的侧面透视图形。之后他在顶部增加了完整旋转的第六个面。在此之后,他能够画出一个立方体的完整改变图形。

本(8;2) 像特尔一样,他画了排成一行的四个正方形。"*这是四个侧面,然后这些*(位于倒数第二个正方形两侧的两个正方形)*是顶面和底面*。"接下来给他呈现一个四面体。"*我需要想一想。那个图形,这里是底面*(他画了一个正方形),*那里是侧面*(他在正方形上连接了一个三角形,然后又画了三个与第一个三角形相连的呈扇形展开的且越来越窄的三角形)。——那个(最后一个三角形)是故意画得狭窄的吗?——*是的,因为你从远处看它*(他混淆了透视和对远侧面的旋转)。"

雷伊(9;2) 第一次尝试便正确画出了立方体,但他画的四面体和本一样(一种混淆了透视和旋转的3A亚阶段的反应)。此外,他故意把三角形的底边画成"弯曲的",以此表示它们围成了原来的形状。

别尔斯(10;9) 立即画出了正确的立方体展开图形,但却把四面体画成了四个三角形面(底部包括三个呈扇形排列的三角形,且外侧的两个三角形比中间那个更窄一些)。

阿里(11;0) 立刻画出了立方体,但把四面体画成了四个呈扇形排列的三角形。他把自己画的图形剪下来,试着对它进行折叠,但不能理解自己为什么不能成功。

最后,我们给大家呈现一些第四阶段儿童的例子。这些儿童或者立即画出了改变的四面体,或者在试误之后获得了成功。

曼(12;10) 起初他画了一个被对角线分割的正方形,这样就有四个三角形,然后他试着把这个图形进行折叠。"*这样做没有用。我没有正确理解*"。然后,他又尝试把一个菱形分为四份,然后把四面体转来转去,最后他画了四个三角形,一个作为底面,另外三个将其围绕。

米(11;5) 一开始他画了一对连续的三角形。然后,他在这两个三角形的顶

点处画了第三个三角形，并认为只要我们把这三个投射三角形拉起来就可以得到一个四面体——这一答案完全正确。

切瓦(12;0)，弗赖(12;5)等都立即画出了正确的图形。

伴随着立方体和四面体之间轻微的时间差，这种复杂的演变便完成了。但我们如何解释儿童在最终得到这种简单答案的过程中(从第三阶段到第四阶段)所面临的巨大困难呢？为了回答这一问题，我们有必要回顾一下整个研究，通过对研究中主要细节的总结得出结论。

第四节　结论：符号表象的本质以及投射运算与欧几里得几何运算之间的联系

与圆柱体和圆锥体相比，从这些实验中所得出的第一个重要结论，在立方体和四面体上表现得更为明显，这便是：如果儿童想要想象立体图形面的旋转，那么单靠对立体图形的清楚感知，或者是通过表象形式来记录这种感知是不够的。直截了当地说，立体图形的展开并非普通知觉的直接结果。即使对像立方体这样的立体图形的六个面的感知本身也不足以产生一种六个面都旋转到同一平面的心理表象。介于对立体图形的感知和对其平面旋转表象之间的便是动作，即一种对感知的动作反应。因此，表象是对未进行动作的一种图画形式的预期，它使个体从当前所感知到的提前到达可能会但却还未感知到的。儿童在2A亚阶段之前完全不具备的正是这种潜在的感知，这种3B亚阶段和第四阶段儿童能够连接起来的心理图像。

因此，当2A亚阶段的儿童在观察立方体的时候，他们看到的只是一张被折叠起来的纸，并不具有如何在头脑中将其展开的概念。在这种状态和成功预期之间存在一系列过程，这些过程可用于解释从最初的简单知觉概念到对未来潜在知觉的想象之间的转变。这种转变需要大量从简单动作到协调运算的其他(过程)，并且它带来了真正的特点——不仅包括符号思维或表象思维，而且也包括整体的投射运算。

关于第一个问题，当前章节中的研究结果证实了已经表达的观点，即表象是一种内化了的模仿动作，是一种复制或改变，并非针对物体，而是关于将动作施加于客体之上的动作反应。因此，与知觉相比，表象在更大程度上提供了一种动作格式。这便是为什么表象与知觉相比会立刻变得不那么生动，但却更机动，并且有时会在内容上更加丰富(尤其是在几何概念上)。在这一点上，可以对前述信息中的三种不同类型的表征表象加以区别。首先是关于客体本身的心理表象。当要求2A亚阶段的儿童来画出展开的立体图形时，他们只是对面前的原有立体图形进行了复制。但显然，他们一定具有关于这一客体的表象，这种表象不同于对该客体的展开面以及展开动作的表象。现在，尽管

这种表象可能只是静止的，因为它只涉及客体本身而忽略了客体可能的改变，但这第一类表象已经是一种动作格式了。它是对知觉活动所体现出的运动的模仿记录，与纯粹的被动感知不同。这一结果的真实性通过以下思考便能非常清楚地说明：即使是对一条直线的感知和想象格式也意味着主体的活动，例如把线穿过去，把线的各个部分彼此联系起来等，因为在物理客体中并不存在像直线（本身）这样的事物。

第二种类型的表象出现于2B亚阶段，并一直发展到3A亚阶段。这种表象取代了先前与客体变化无关的、仅仅是对客体本身的表象，它所反映的是施加于客体的动作的某一阶段或某种结果。无论是在2B亚阶段中暗示展开动作的一条线或一个展开的面，还是在3A亚阶段中稍微展开的立体图形和部分旋转，表象已经超越了表示静态客体的感知信息，并且能够对转变的结果进行预期。然而，这类表象最有趣的特点是：它不能用一种完整且准确的方式来预期转变的结果。这些表象包括一种对展开和旋转动作的模仿，或者正因为如此，它们几乎不能与动作齐头并进。换言之，在动作正式实施之前，儿童是不足以想象出它的最终结果的。

这一章中，最令人惊讶的结果之一便是，只要表象没有并入一个完整的运算系统，那么儿童就不足以进行表象思维（并且这一观察结果与我们观察到的儿童在解决截面、投射以及透视问题上的各种表现完全一致）。为了解释这些局限性，仅仅认为起源于动作模仿的表象只能够表征状态而不能表征动作，并且动作只能通过一系列的静态表象来表征的说辞绝不充分。相反，运算一旦开始被构建，表象便可以将运算结果灵活地加以符号化，并足以对其进行预期，尽管这些运算从未在动作层面进行。之所以第二类表象不能在动作实施之前便对其结果进行描绘，是因为它只与简单动作有关；也就是说，是一些还处于相互联系过程中的动作，这些动作并未达到聚合于完整系统的运算水平。

事实上，3A亚阶段（这一阶段标志着从动作到运算的转变）的表象特征用一种可能最清楚的方式说明，动作在体现于运算之前会一直保持相对不协调的状态（顺便说一下，只是通过第二种表象类型内化的动作）。因此，在这一阶段，儿童可以想象一种特定的旋转，但由于不能想象一系列连续的动作，因而他们便不能完成这一过程。或者，他们保留了想象成展开的立体图形的各部分间的顺序和邻近性，但却不能继续进行动作来获得最终结果，并且满足于把整个立体图形想象为稍微展开的侧面。在这两种情况下，表象都不能与动作同步，因为不像运算，这些动作彼此之间并不协调。

最后，在3B亚阶段出现了第三类表象，这类表象能够在动作实施之前便对其结果进行预期。这种表象具有动态性和机动性，它摆脱了先前表象的缺点和不足，完全关注于客体的转变。当这种可塑类型的表象变得完全具有理智性且超越了感知觉的边界时，几何学家把它称为"空间概念"，这与我们称为"前运算的"初级空间概念相反。

此外，这种类型的表象似乎只和完全发展的运算系统紧密相关。与之前的表象不同，这种类型的表象不再是思维不可或缺的助手，因为它所表征的动作已经独立于其物理现实而只包含以自由、可变、可逆的结合方式聚集而成的转变。

简言之,现在的表象只是一种运算符号,一种与先前表象类似的模仿符号,但它时常赶不上改变的力度。它当前唯一的功能便是通过提供参考或给予象征性暗示的方式来表达某种发生在转变过程中的暂时状态。

由此引出了第二个问题,这个问题再次出现于研究过程当中。从动作到运算的转变是如何发生的?投射运算和欧几里得几何运算之间的关系是怎样的?

正如对截面、投射以及透视的研究一样,对展开和旋转的研究能够得出两个结论。首先,运算与动作的不同之处在于运算意味着在一个整体框架中不同动作之间的协调。其次,投射运算依赖于协调的视角与协调的运动之间的相关。关于协调的运动,我们认为它是按照自身协调系统组织的欧几里得几何运算。

现在我们需要回答的是:与3A亚阶段所看到的儿童仅仅给出展开的暗示不同,运算是通过何种途径使得儿童在3B亚阶段和第四阶段给出正确答案的呢?在3A亚阶段,儿童不能改变立方体。但依然意识到了立方体的六个面,尽管只是把这六个面看成是立方体的连续方面。因而他把立方体转来转去,依次观察它的每一个面,或者是从把它理解为一个整体的特定角度来观察,但无论使用哪种方法,儿童都不能把他已经区别开来的不同视角加以协调。与此相反,立方体的改变需要结合六个不同视角来思考每一个面,并且通过把其他五个面都旋转到某一平面的方式来把这六个面整合为一个单一的整体。

这种运算需要保留像邻近与分离、顺序与包含这样的拓扑关系以及连续性,无论是在整体(所谓的"展开的"面)中还是在部分(立方体和四面体)中。[①]但它也需要使这些关系从属于一个包含不同视角的系统,并且实现关系内部的协调。因此,显然单独的展开运动以及彼此相连的(且通过表象实现符号化的)特定视角是无法解决立体图形的展开问题的。与此相反,但同样明显的是,在一种可逆结合的系统中把这些动作加以协调将会使动作变成运算。

显然,和截面问题一样,在旋转和展开中,这些运算将会呈现两个互补的方面。一方面是施加于客体的或主体描述的运动。这些运动需要建构一种协调系统的欧几里得几何运算。但另一个方面与第一方面紧密相关,以至于不能对二者定义先后顺序,这个方面便是"视角"。根据所考虑的特定平面,视角取决于主体或客体的位置,并且正是对这些视角的协调才组成了投射运算。

总之,关于表面旋转和改变的研究证实并澄清了从其他投射概念研究中所获得的结果。它强调了在儿童空间概念的发展过程中这些投射概念所组成的一个整体系统的独立性,以及这些投射概念和欧几里得几何概念之间的联系。关于这一问题的考察也意味着我们对儿童日常几何概念中主要投射概念研究的终结。当前需要考察的是从投射空间概念到欧几里得几何空间概念本身的转变。

---

① 参见"英文译者注"。

第三篇 从射影到欧几里得空间的转换

概　　要

不论是从数学建构还是从心理发展的角度来说,射影和欧式空间都是双重相关的。首先,虽然是各自独立的,但是它们都源于拓扑空间。从数学的角度来讲,射影一致或者同源异形可以被看作是一种具有守恒直线和一定量化关系(不协调关系)这种附加性质的拓扑学上的异质同晶。至于一般测量关系,这些关系直接来自于欧几里得测量的拓扑关系,而此处,欧式测量被认为是一种特殊情况。

从心理学的角度看,我们已经知道直线的概念和射影关系的基础是在视角的系统中合并过了的拓扑观念。在另外一项工作[①]中,我们将会看到儿童从同样的拓扑概念中汲取距离和测量等欧几里得概念。因此,从数学和心理的角度来讲,射影和欧式空间是源自于拓扑空间的两种不同的方式。

但是,除了这点以外,我们要考虑射影和欧几里得空间在另外一种形式上的空间关系,考虑[②]到二者之间关系的相似性和类同性,建立两者之间互相转换的平台是有可能的。从数学的角度来讲,类同可以被定义为保留平行关系的投影相关,也可以被定义为两个对顶角的相似性。可移动就像相似性一样,保留了距离。因此,从数学的角度来说,有着一系列连续的层次,有着从引导同源性映射到欧式位移的一系列规范。从心理发展的角度来讲,也是一样的吗?这是我们在这一研究的第三部分和总结部分将要努力回答的问题。

做这项研究,我们首先要调查关于平行的保留的问题,不仅是在知觉领域,当它出现在图形转换的领域时也一样。在这项第十一章将要完成的研究里,我们将通过儿童在一个简单的类同转换中的表现来进行研究。也就是说,在一系列"懒人钳"中菱形宽度的增加或减少中研究。

在这之后,在第十二章的研究中,我们要解决比例的发现和角度的保留;而在第十三章中,我们要检查建立水平和垂直轴所需要的简单合作系统。最后,在第十四章中,

---

① *La Géométrie Sponatanée de l' Enfant*, Paris, 1948.

② 第一种类型的关系的一个特征是,被用来建构协调系统的公理是与射影几何学所需要的是一样的,这个理论是由Hilbert最先阐明的。

我们主要解决建立地形格式的结构方面的问题(例如,画出一个花园或者山庄),这将会使我们再一次应用这些观点的概念,如平行、比例,来解决一些相似的常见问题的整合,从而展示映射和欧式空间概念的联系。

第十一章　菱形的仿射变换与平行线的保留[1]

在第一部分中，我们研究了简单的拓扑概念，并表明它们仅与物体本身及依赖经验建立起的物体的内部特性有关。随后，我们在第二部分中看到了这些相同的概念一旦与"视角"(points of view)相联系，将如何在保留直线并受投影关系支配的条件下形成特定的图形。因此，投影空间表现为对象间的协调，这种协调并非是对客体本身的分析，而是相对于特定视角的协调，简言之即作为实际视角本身的协调。

现在到了研究将坐标应用于此类对象的时候，其中坐标系的发展是最典型的例子。但是，在讨论由这样的系统构成的欧几里得空间的一般组织之前，首先要看一下介于投影和度量概念之间的不那么复杂的系统。平行性和比例(以及相似性)对于空间概念都是必不可少的，并且两者都可以在儿童作图的自发发展中找到。

正如相似性问题，平行性问题也很难用精确的术语来阐释。但是，我们可以从回顾第六章(第一节)中提出的观点开始。儿童可以感知甚至画一条直线，但这并不意味着儿童可以想象或构造一个独立于知觉"地面"的直线序列。这一点正与平行性问题相同。从6个月大起，儿童就可以在知觉层面区分正方形和三角形，到4岁时他甚至可以正确地画出正方形。但我们不能由此得出结论，认为他在平行性问题上拥有任何直观的想法(更不用说可操作的想法)。要绘制直立的正方形，他必须绘制两条垂直线和两条水平线。但是，这些线是平行的，并不意味着如果正方形以一定角度倾斜，这种关系就仍可以维持。事实上，儿童画一个倾斜的正方形或菱形要困难得多。而直到6岁左右，儿童才可以画出令人满意的菱形，而此时，平行性也并没有被很准确地掌握。儿童直到7岁时才可以在任何精度的要求下绘制菱形。

因此，在研究对平行线的保留时，我们当然应该使用菱形之类的图形，而不是仅包含直角和垂直水平线的图形，例如直立的正方形和矩形。除此之外，我们还必须花费精力关注的不只是静态图形，还有它们的变换。

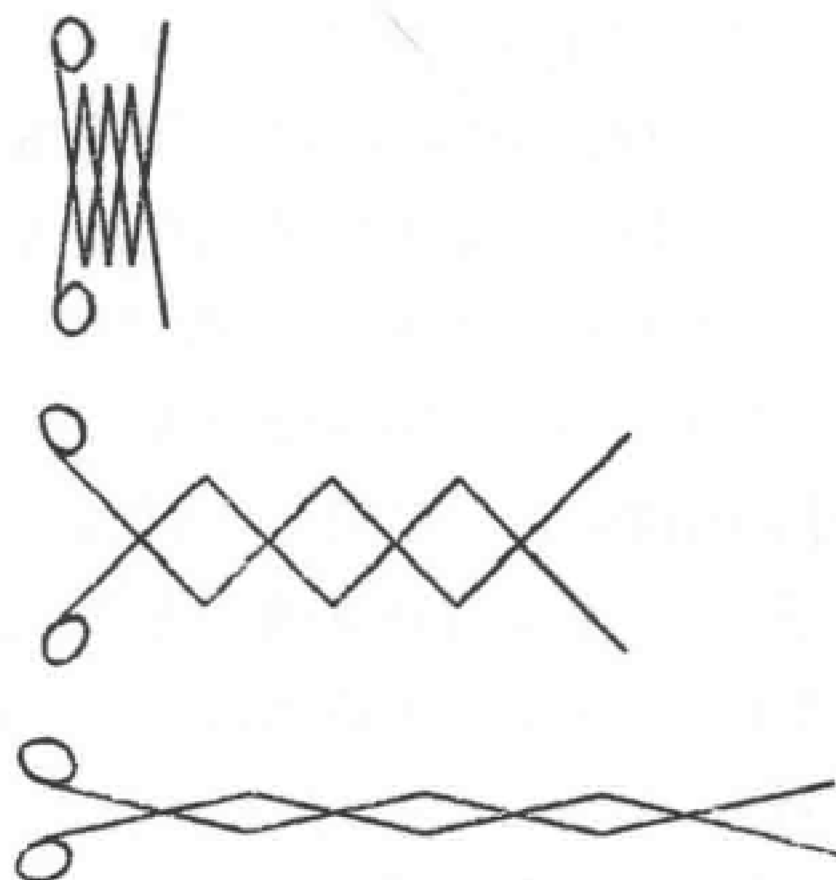
然而，菱形的正确复制本身并非是儿童具有平行性观念的真正证据。这样的复制可能仅仅是知觉和运动活动的产物，而设想一个图形或基于想象的作图无疑假定了被修改的可能性。因此，对平行线的表征意味着一个允许一定的变换同时保留平行性的操作系统。这意味着如果我们打算借助一个像菱形这样有平行边但没有直角的图形来研究平行性，我们必须寻求分析的变换，而不是仅研究特定的菱形。

---

① 与 Mlle. G. Aseoli 和 Mme. Denis-Prinzhorn 一起合作。

在射影概念和相似性之间,几何学家认识到由"仿射"概念定义的一组特殊关系。这些是保留了平行线和直线但不保留角度(相似性)或距离(运动和欧几里得度量)的关系。因此,研究菱形相对两侧平行性的最佳方法是对图形施以一系列的"仿射"变换。通过相互联系的想法和预期的运动反应,引导主体的活动形式从知觉和思考图形到作为其最终目标的操作性思维,儿童对这些变化的反应便在过程的每一个阶段被记录下来。

事实上,有一种众所周知的工具,它遵循仿射图形的规律,并实际产生菱形的变换,这就是"懒人钳"(图 18),其机制在许多家用工具(自动开瓶器,剪线钳等)中得以应用。可以看出,它仅由像剪刀刀片那样的交叉杆组成,但两端成对连接在一起,因此它们形成了一系列相连的菱形。当钳子闭合时,图形的表面积为零,因为杆全部压在一起,形成一排垂直的直线(钳子保持水平)。当钳子打开时,杆分开并形成一系列菱形,首先变窄,然后变宽,同时在另一个方向变窄。打开至中点时,呈现出对角放置的正方形,然后宽度开始超过高度。当杆完全伸展时,菱形的宽度最大,高度最小,这使杆的外观再次变为平行线,但这时垂直于原始位置。



菱形的仿射变换

图 18 懒人钳或纽伦堡剪子

因此,我们将要研究的问题是预测菱形在变换过程中的形状变化,尤其是相对两侧之间平行性的保留。[①]可以看出,以这种方式处理平行性问题与一个转换系统相关联,因此它以操作性而非知觉的方式呈现。

当然,这并不意味着可以忽略问题的知觉方面。但就这一点而言,我们已经掌握了同事沃斯腾(H.Wursten)在垂直或倾斜放置杆的平行性知觉实验中获得的结果。[②]因此,我们没有必要回到知觉问题上来,因为 H.Wursten 的发现是非常直接而有力的。同时,在讨论目前的实验时,我们有必要回到对平行性的知觉与呈现这二者的关系上来

① 显然,这些变换只包含了一种特定的仿射变换,它不仅包括菱形,还包括所有的平行四边形。在现在的案例中,我们不仅设计平行关系,还有边长度的不变性,而这不涉及仿射概念。

② 见第二章(第一节)。

(见第六节)。因为与预期相反,对斜平行线的知觉似乎并不领先于它们的呈现,因为后者似乎会对前者产生追溯性的影响,而不仅仅依赖于前者。

第一节 方法和一般的结果

首先向儿童展示处于关闭状态的装置,让他预测并画出当"通过将手柄按在一起,剪刀被打开"时会发生什么(图18)。在他做了第一次预测(这通常是价值不大的预测,但有助于激发他的兴趣)之后,我们轻按手柄,轻轻打开钳子,出现了一系列非常窄的菱形。我们再一次让儿童预测最后的结果,即让他们画出菱形(我们通常称之为"窗口"),因为它们会出现在扩展仪器的过程中。我们在更有趣的转换阶段做以停留,然后一直操作到最后。然后可以反向执行相同的步骤,从而返回到原始位置。

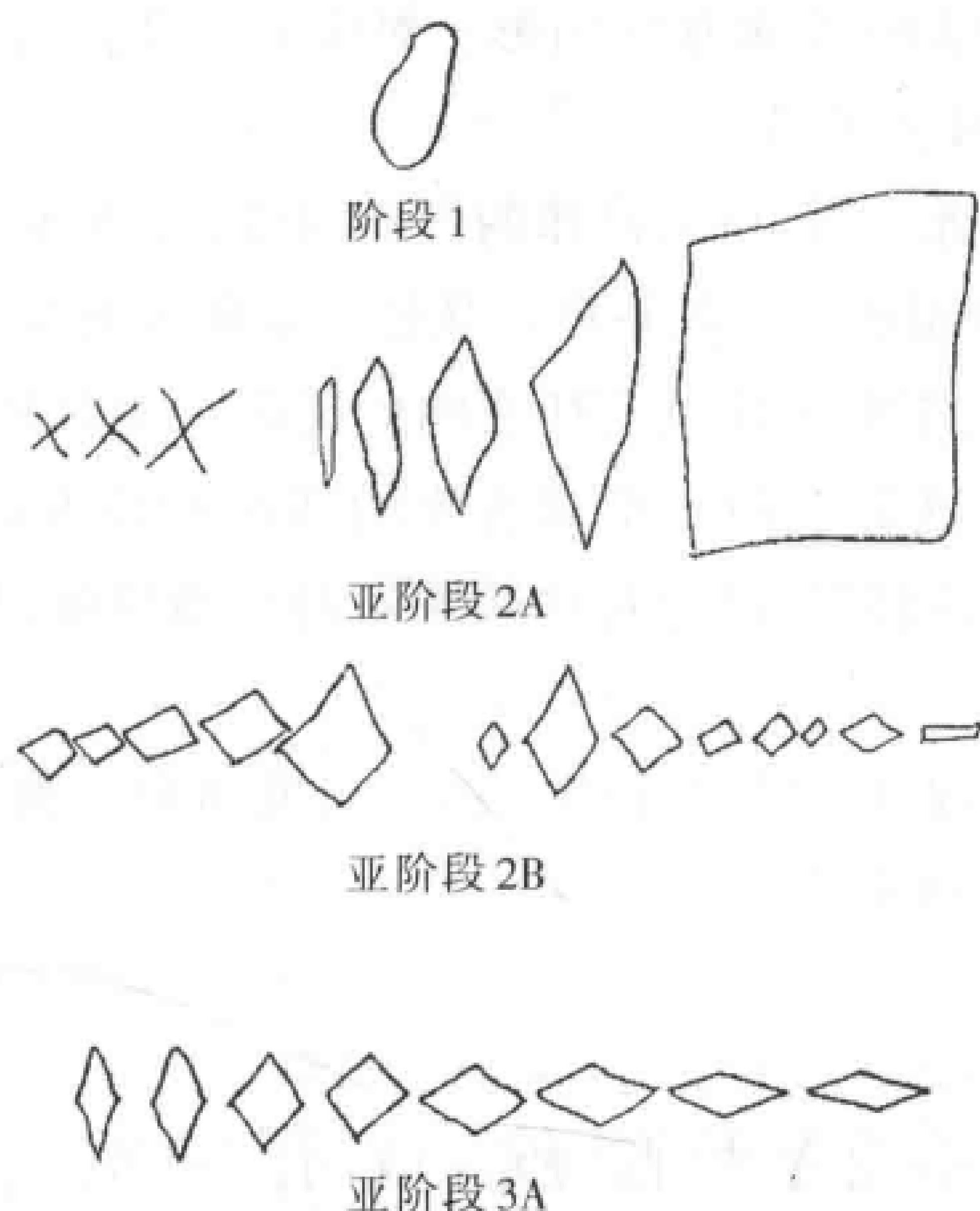


图19 菱形的仿射变换(阶段1到阶段3A)

为了帮助儿童克服画菱形的技术困难,儿童被给予一些不同大小的杆子来作为绘制菱形装置的一种模仿,并以此绘制出一系列图形。最后,我们偶尔会给儿童一组需要被整理出的与钳子变化的开口大小相对应的不同比例的菱形,或者一组真菱形和假菱形(对边平行和不平行)。在后一种情况下,菱形的角被隐藏起来,这样儿童就只能通过边的平行性来识别真正的菱形。为了进一步研究这些问题,我们发现,除了纸板上的图形外,由旋转杆制成的大菱形很有用,它能根据所提出的问题进行相关的调整。

我们明确了以下发展阶段(见图19):在第一阶段(4岁以下),首先,儿童不能预测到"窗口"的任何变化;其次,除了或多或少的圆形闭合形状之外,儿童不能画出菱形(任何比正方形或三角形更复杂的图形)。因此,我们将直接进入第二阶段。在初始阶段

(第2A亚阶段),儿童一开始无法预测到即使仪器打开、菱形可见时装置静止时的任何变化。另一方面,当看到变化开始时,他可以想象到变化会继续,当然仅仅是无休止地扩大"窗口"。在这种情况下,儿童从不为最终的结果烦恼,也不怀疑"窗口"在达到最大尺寸后会再次变小。至于"窗口"的形状,处在这一阶段的儿童不知道如何画出菱形,更有趣的是,他们也不能有从整个结构中抽象出这一形状。正相反,他们满足于画十字来表示交叉点;只有在用一根手指跟随轮廓一圈之后,他们才会尝试将闭合图形分离出来,然后将其显示为椭圆、矩形、闭合的尖图形等。

当钳子处于打开状态时,处于第2B亚阶段的儿童(5岁半至6、7岁)可以预测到菱形会逐渐变长,同时也可以发现菱形最终会再次逐渐变小。但是,这一预测仍然是从总体上进行的,它在两个重要方面还不够充分。首先,尽管菱形有渐进的结构变化(儿童在6岁左右就可以正确地复制出一个菱形:参见第三章第六节),在这个水平上,儿童仍然可以在变换过程中改变边的长度,同时不会使对边平行。其次,预期的变换仍然不意味着高度和宽度成反比的一系列连续图形。对边的长度,尤其是它们的平行性,是未被保留的,表面也不是连续排列的。

与此相反,在第3A亚阶段(明确操作的开始阶段,大约在7—8岁),我们发现儿童可以画出对边平行且长度相等的正确菱形。从这一亚阶段开始,伴随着这些进展,我们便试图探明钳子的拉长与图形的连续变换之间的关联。尤其是,我们一开始就发现菱形是沿长度方向绘制的,这就表明儿童对宽度的增加和高度的减少之间的联系有所认识。然而,到目前为止,我们还没有对这些关系的明确理解,也没有对实际绘图时应遵循的程序的合理阐释。

最后,在第2B亚阶段和第四阶段(9—10岁),儿童可以通过有意识地理解图形的变换来明确地阐述所有这些关系。

第二节 第2A亚阶段:没有确定形状的菱形,通过装置的无限扩大调整产生的图形

忽略第一阶段的消极影响,在描述第2A亚阶段的反应时,我们将仅仅重点关注儿童的第一个几何构想的主要静态特征,这也是迄今为止我们每个实验中该水平下的一致特征。儿童严格地将自己局限在他所看到的范围内,而没有试图将这些转变可视化。当看到这些变化发生时,他只是重复并继续这些转变,而无法协调可操作的预期方案中的不同因素。给儿童留下这些装置,他们既不能画出他们在装置中看到的菱形的实际形状,也无法设想到除了不断扩大的过程以外的其他变化。

祖尔(4;10) 开始,我们将设备轻微的打开,"你看到两个洞可以将手指放入,

如果我像使用剪刀一样挤压它们,将会发生什么?——……——你将会看到什么?——长条。——如果我按压,这些长条将会发生什么?——……——看(我们将它再打开一点)。——*将会有更多的长条*(他认为这个组成要素是复杂的)。——你可以将他们画出来吗?——(他画了一系列的交叉线XXXX。)①——如果我们再将它打开一些呢?——*它会变得更长,窗口将会变得更大*(他画了更大的交叉线)。——请将窗口画出来。——(他并没有画菱形,而是画了一个X。)——用你的手指给我指出一个窗口。——(他沿着菱形的轮廓移动他的手指,但仍然画了一个X)——用这些来试一试(杆)。——(他开始把木棒排列成十字交叉形,但是最终成功地构建出了以某一角直立的一种方形,但是这种方形有两组边。)——如果我们继续挤压呢?——*如果你继续拉刀柄,你可以看到窗口将会变得越来越大*。——看,我们已经使菱形的宽达到了最大。——*不,更小了*。——如果我们继续呢?——*将变得越来越大*。——看(再次挤压)。——*噢,不,依然在变小*。”

安布(5;0) 相似的反应。为了帮助他研究菱形本身,我们给安布看了由四根可转动杆做成的简单菱形,它就像懒人钳那样可以随意变化。“ 你可以将他们画出来吗?——*我不知道怎么画?*——用这些杆试一试(给他提供了一系列的杆,长度分别为1.5,3,11和15厘米)。——(他开始在模型周围摆放杆,但是对边没有平行,随后构建了两个独立的角<和>。)——现在,我将挤压这里(菱形的宽度将增加,高度将减小)。——(通过将已经确认了的角拉开,安布只把他所看见的进行了复制。)——如果我继续呢?——*它将会像这样*(伸开他的双臂,并且将桌子上的角拉的更远了一些。——看,(实验)这是你看到的吗?——(安布摆了一个五角形,随后又用他的杆摆了一个三角形。)——如果我继续呢?——*它将会变得更大*(用最大的八根杆摆了一个大的梯形)。——看(实验),它是一样的吗?——*是的,这就像我的这个*。”

罗(5;6) 一开始并没有想到会有什么变化,然后看到最开始的移动:“*它变得更大了*(总体来说)。——那些窗口将会发生什么变化?——*它们将不断变得更大*。——你可以将它们画出来吗?——(他画了交叉线XXX。我们随后试图让他沿着轮廓移动他的手指。克服了较大困难后,最终成功地分离出了一个菱形,并在这之后模仿着探索性的移动或多或少正确地画出了菱形,尽管画出的对边是不平行的。)——如果我们将它变得更长一点,窗口将会变成什么样子?——(他画了一个更长的菱形,用7厘米的高替代了4厘米的高)*更大了*。——如果我们继续拉呢?——*将会变得越来越大*。——(他画了一个高12厘米的,然后是15厘米高的,或多或少的在宽度上成比例。)——直到结束呢?——*仍然更大*(在整页纸上画了一个25×15厘米的菱形)。——看(我们拉伸了懒人钳,然后他指出了哪张他画出

① 当然不会平行。

的是与他看见的图形相对应的)。——窗口变化形状了吗? ——不,它总是一样的(他画了一系列菱形,高度越来越低,但是弯曲得越来越像矩形和梯形)。——试着用这些杆。"结果还是一样的。平行性没有像长度一样持续保持,只是偶尔地出现。

加布(5;10)　没有预想到任何改变。第一个移动结束后,他说,"它会变得更大。——这之后呢? ——继续变大。——最后呢? ——变得三倍大。——看。——它们更低了(那些窗口)。——这之后呢? ——仍旧变低。——如果我继续呢? ——变得更大"。他的作图包含了一系列的交叉线,然后随着触觉的探索,他画了某种两头尖的椭圆形。

这些反应从两方面来说都很有趣。首先,尽管在装置移动的第一阶段他们意识到"窗口"会变得更大,这些儿童仍不能从一般的图形中抽象出菱形的形状。他们只能画出交叉线,并且只有用手指追踪了"窗口"的形状时才能发现菱形。甚至此时,他们也不能将图形再现出来。就算可以近似地做到,他们也不能有意识地将对边的平行性再现出来。考虑到再现平行性是这样的情况,因此这个阶段的反应显然是消极的。

其次,与画菱形这一困难相似,除非儿童们确实看到了,否则无法预测将要出现的改变。儿童是如何将自身限制在他们实际看到的内容上是值得观察注意的。到目前为止他们还不能掌握基于对将要在客体上进行的动作预期的对第二种类型(见第五章:结论)的想象。正相反,一旦最初的转变被感知到,在想象中进行重复就会变得非常简单,而窗口无限增大的想法也正来源于此,不论其对边的固定长度(尽管他们已经被看作了硬杆)或者具体数目(参考祖尔)。

总而言之,第2A亚阶段的众多反应是一个整体,它们彼此之间以及我们在这一水平上的其他实验中所看到的也是如此。由于此阶段儿童想象相对固定的特性(与下一水平上的相关想法相比,尤其是第三阶段可移动和可逆操作的发展),他既无法预测装置中发生的变化,也无法分析在过程的特定阶段所产生的形状。

因此,这些反应表明,仅仅感知到线条的平行性(正如在菱形中)以便能如此的想象是不够的。要做到这一点,就有必要区分所有方向的线,并只将那些成对的线挑选出来。但是,只要平行性没有被可视化,我们就能完全确定这种关系可以在这一水平上被感知到吗? 儿童的描绘和用杆做出的作品似乎使我们怀疑这种假设。此外,Wursten的探究也表明,在这个水平上,儿童们不可能把杆斜平行地放置,更不用说尝试构造出菱形这样雄心勃勃的事情了。

这样的考虑立刻引起了我们对知觉和概念之间关系的疑问,这也是一个我们将在下一个阶段中会再次遇到的问题。

第三节　第2B亚阶段:菱形的逐渐建构,预期的开始,但没有对平行性和边长度的保留

在这一阶段我们再一次看到了已经在之前的试验中发现的反应类型。它以儿童想法的进一步明确表达和在接下来阶段出现的可操作建构的概括性描述为主要特征。

以下是一些实例。

赫尔(5;6)　"如果我们挤压手柄呢?——*它将会变长*。——窗口将会发生什么?——*它们将会变得越来越大*[就像那些在2A阶段的儿童一样,他开始画交叉线(X),然后在用手指探索形状之后,它画了一个菱形。他画出了四个在大小上增长的菱形]。——如果我们继续挤压,它们将如何变化?——*它们将会变得更小*。——怎么变?——*以更大的序列变小*(=以一个更拉长的序列)。——画出它们将要变成的样子。——(它继续画了相同形状相同宽度但不断变小的菱形。)——看(实验)。——*那是正确的*(他最小的作品)。"

他为增大的图形挑出了更长的杆,为减小的图形挑出了更短的杆。只有当复制过实际看到的东西,他才通过相同长度的杆呈现了变换:"*它是被压扁的*。"但是他没有付出努力来保持对边平行。

丁(5;11)　"*当我挤压时会发生什么?*——*它会张开*(我们挤压,然后他画出了不规则方形状的轻微张开的菱形)。——如果张开更大一些呢?——变大一点(仍然画出了一个方形,但是更大了)。——如果继续挤压呢?——(他画了更大的方形。给他杆后,他一开始画了一个矩形,随后画了一个一角站立的方形)——如果我继续挤压呢?——*继续变大*。——现在呢?——*依然变大;不,更小了*(他画了更小的依然接近方形的菱形)。——这之后呢?——*变得更小*(画了同样的图形,越来越小)。——看(实验继续到钳子完全关闭)。——*这太紧了,不再有洞了*。"因此,丁预知先不断增加而后减少这一事实,尽管没有保持对边长度的恒定,也没有考虑到对边的平行性。

米克(6;0)　"它将发生变化,*窗口将变得越来越小;不,是变大*(他首先画出了一种在尺寸上不断变大的蜿蜒线,然后画出了一系列不断变大扭曲的菱形)。——如果张开更大一些呢?——*继续变大*(打开了一半)。——如果继续呢?——*窗口将变得越来越小*。——为什么?——*因为当你在按压时,它们在变紧*。——然后呢?——*变得越来越小*。"他画出了越来越小但形状一致的扭曲的菱形。

布(6;0)　通过一系列一开始闭合在一起,随后越离越远的垂直的竿子展现了"窗口"的变大。可调节的菱形就放在他的面前,并且向他展示图形变宽的开始。他被要求画下来他看见的和即将要发生的。布画了四个菱形,每一个都比前一个

更大,其中第四个菱形占满了整张纸。因此尽管有一个实际的菱形作为模型,他也没有保持边的长度恒定,更别说关注到平行性了!“如果我继续拉呢?——(他开始画一个更小的菱形,依然是相同的形状)——再拉呢?——它将会变成一条线。”因此,他一举把固定形状的菱形变为完全展开的菱形!当恢复收集棒的实验时,布这时尝试(已观察到实际的变化)构造逐渐变宽变平的菱形,尽管他仍会改变整体的大小。他选择了不同长度的杆,还特别建造了不对称的对边不平行的菱形。在实验结束时,我们向他展示了一些示例图形(一些对称的图形和其他一些不对称的图形),这些图形被隐藏了边角,因此他只能根据对边的平行性来加以判别。布认可了除了两个极其不对称的外所有形状的图形,包括正确的和错误的。

亚克(6;6)　看着可调节的菱形,画出了一个打开一点的,有不对称的对边的不平行的图形。“如果我打开它呢?——(画了一些宽度上增加,但是对边更长且不平行的。)——如果我再拉开一些呢?——依然变得更大(有着不等对边的更宽更大的菱形)。——再拉开一些呢?——(甚至画得更大了,然后突然画了一个窄的竖直图形,仍然在形状上不规则。)——就结束了吗?——(非常窄的水平菱形)”。因此,他意识到了一开始增加然后减小的发展,但是只能在不保持对边平行或长度相等的情形下,通过突然的变化得以发现。为了检验这最后一点,我们给他看了角被藏起来的样例菱形。亚奇忽视了它们的对边是否平行。当它们再一次被呈现时(这次完全是可视的),他将他的估计基于了整体的图形,仍然没有考虑到对边的平行性。

罗儿(6:8)　比亚克领先,因为他在表面区域预测先增加最终减小上做得更好。他开始所画的菱形高度长于宽度,进而画出的菱形轴近似相等,最后所画菱形的宽度长于高度,尽管所有的图形仍然是不对称且对边不平行的。当用杆时,他选择了不同长度的竿子来呈现变化的图形(仍然不具有平行性),这一点表现出这不是一个作图技能的问题。

拔(7;4)　仍然接近产生一个正确的先变大后变小的图形系列,其中更狭小的菱形依然建构的不好(不对称),同时最大的菱形被矩形所替代。用竿子建构菱形时,他要么选择不同大小的杆,要么将几根竿子拼接起来形成一条边。因此,图形有不平行和不同长度的对边。

总而言之,从两方面来讲,这些反应较之前的水平有了明显的进步。首先菱形开始有了确定的结构。现在几乎所有的儿童都能画出或者用竿子建构出菱形,甚至可以从装置整体上识别出这一图形。第二,至少在整体上形状的变化可以被预料到,即当钳子伸展时增加后伴随着减小。因此,就以上两方面而言,相对于在开始显然静态和独立的概念,现在我们可以说儿童具有一系列相关的概念了。

但这两项成果在其研究范围上都受到了一些类似的疏漏和缺陷的限制。首先,无

论是画出的还是用杆拼出的所有的菱形都是不规则且没有平行对边的。其中后一缺陷已经通过纸板对比图的试验结果得到了证实。当儿童在观看图形时,他们不能区分真正的菱形和非菱形。这同样适用于在这一阶段开始时画出弯曲甚至形状严重畸形菱形的儿童以及在更高阶段画出完美比例的儿童。此外,他们的菱形随着形状的变化而变大,他们无法想象一个菱形在不改变其边长的情况下能够膨胀和收缩,他们所想到的只是一系列越来越大的菱形,它们以某种不清楚的方式在变化,而这个过程又不受任何确定操作的控制。

正是未能理解所发生的实际细节才引发了这些反应中的第二个缺陷。儿童可以想象表面的增加和减少,但只能以一种整体的、全局的方式。在儿童看来,这些变化不是一系列连续的,而是突然的、不连贯的变化。特别是,他们无法预测到中点时发生的反转,这仅仅是因为他无法意识到这些转换影响的是图形的维度关系,而不是其绝对大小。有趣的是,这些儿童中没有一个刻意画出中点菱形(立在一角的方形),甚至儿童,例如丁,也不会像画正方形那样画菱形。

简言之,儿童的反应表明,在这一水平上,他通过或多或少的一系列连续想法来预测转变的过程,尽管还不是通过操作性思维来实现的。正是这种操作的缺乏导致了儿童预期的变化的割裂,以及画出的菱形仍然对边既不平行也不等长。

第四节　第3A亚阶段:保留对边平行性和长度的操作性建构的开端

第三阶段大约开始于7—8岁,以具体运算的出现为标志。自第3A亚阶段的一开始,它与之前阶段相比就有了明显的进步。儿童不再试图把菱形的形状预期的变化解释为边长的变化,而是在对边长度恒定下的高宽比的变化(目前还无法明确地表述)。他们还做出了一个明显的以保持对边平行的尝试,并将转变表现为一个连续的过程。

韦耶(6;6)　预言随着"懒人钳"的扩张,"*这些窗口会更大地扩张*(他画了一系列对边平行,长度相等,表面连续扩张的菱形)。——如果我们继续呢?——(同样的,重复。)——然后呢?——*它们将会是这样*(画了一个宽比高长的菱形)。——然后呢?——*它将变成两条线,最终会变成像这样的两条直线*。"他画了一对平行杆。他被给予一些杆,"你可以挑出一些杆并做到同样吗?"他挑出了四条等长的杆,构建了一系列高和宽均不同的菱形,直至最终的水平图形(一个平躺着的窗口)。

科尔(6;10)　说:"*它会变得更大*。——然后呢?——*依旧变大*。——(画了一系列对边平行,长度几乎恒定,但宽度增加的菱形。)——如果我们继续呢?——*它将张开得越来越大然后变低*(他指的是在高度上的降低,同时保持对边长度恒定

且仍平行)。——最后呢? ——它会完全地关闭。"

达恩(7;4)　以预测大小的绝对增大然后绝对减小开始(形状上没有变化)正如第二阶段,以不受限制地变小结束。用杆也是如此。他挑选了更大更短的竿子,随后突然大喊,"不,永远都不会是那样的,因为杆永远是不变的。它们一直保持相同的大小,那幅画是错误的。"他现在通过宽和高比例上的变化来表示形状的变化,而非通过对边长度的变化。同时确保对边是平行的。现在,给他出示一些对边不平行的样例:"不,它绝不会看起来是这样的,这(顶端)太宽了,它应该和下半部分一样。——(角在视野中隐藏起来。)——这仍然不对,它不会这样的。"他指的是对边不平行,同时也不仅仅是大体上缺乏对称性。

格罗(7;6)　"它们将再扩大一些。——以哪种方式? ——高度将变低,宽度将变长。——哪幅画将变得最宽? ——这幅。——(他画了五个宽度增加高度减小,且对边几乎平行长度不变的菱形。)——然后呢? ——高度几乎都变成了宽度(正确的画法)。——最后呢? ——不能再变了,它已经足够宽了。"它选择了长度相同的杆并将其平行放置,正确地构建出了菱形。

维德(7;6)　有相同的反应方式。他画出了对边平行且长度相等的菱形。"高度将变小,长度(宽度)将变大。——最后呢? ——不会再有了(他将杆画成了平行的样子)。"

马尔(7;7)　直接画出了增加和减小直到最后的变化过程。随后给他看了一些菱形样例。"那一个不是,因为那一条边太长了(他基于不对称来判断)。那个也不是,因为其中一条边比别的边都长。"角是隐藏起来的。"这个也不对,因为那条边比这条边更倾斜。那个也不好,因为一边是直的,另一边是倾斜的。那个不错,因为两边倾斜同样的角度。"在这里,他是在基于对边的平行关系做出明确的预测。

韦尔(7;8)　同样的反应。角被藏起来的样例图形是基于对边的平行性来判断的。"这个不好,因为这里太尖了,那里又太平了。"

布鲁(8;5)画了一系列增大又减小、对边几乎平行且等长的菱形。给予他一些杆。"你如何使它们变得更小? ——我让它们彼此靠近一些(宽度增加,高度减少)。——那如何让它们变得更大呢? ——我将它们再拉伸一些。"因此,他保持边长不变,只改变了它们之间的关系。

佩尔(8;6)　"它不会变大只会变得更狭窄(正确地画了出来)——如果我们继续按压呢? ——窗口将变方(他预测到了中点)。——那之后呢? ——几乎平了。"他依据倾斜的方形画出了变化,然后继续,同时保持对边平行且等长,宽度比高度大。

这些反应和第二阶段中的反应显然有巨大的不同。首先,出现在一个连续过程中仿射变换的序列可以被正确地预测出来。我们也发现了一些意识到半开状态的儿童可

以做出方形(例如,佩尔)。其次,这些变换的细节在操作上被理解为菱形高度和宽度变化之间的简单关系,而边长没有任何变化,因此绝对大小可以被视为保持恒定。达恩向我们提供了一个突出的例子:他首先犯了一些典型的错误,然后突然意识到正在发生什么。

此外,一旦儿童发现图中的变化是如何产生的,他就会自动意识到菱形的对边必须保持平行,否则菱形将不再对称,并且两侧的长度不再相等。因此,从这一阶段开始,对边的平行性在操作上与整个图形的转换相关联起来了,而不再是简单地直观知觉或想象。只有在这个阶段才开始可以感知倾斜的平行线,这也使得概念间的相互依赖变得更加重要。对于处于第2B亚阶段的儿童,他们可能会被期望在操作上不了解其原因的情况下注意到菱形的对边平行性,但他们通常在实践中会忽略了这一点。

第五节　第3B亚阶段和第四阶段:关系的明确表述

对关系起作用方式的更明确表述以及最终对整个过程提前的推断是从第3B亚阶段和第四阶段的研究中得出的唯一新特征。

佩斯(9;10)　当整个装置几乎完全关闭时他被问到,"当它的宽度打开一点的时候,它将变成什么样子?——*两端相互接触,会变得更长*。——(他画了一个几乎完全展开的1—2毫米高,10—11毫米宽的菱形。)——杆将会变成什么样子?——*彼此越来越近*。——它们的长度呢?——*不论是打开还是合上,长度都不会发生变化*。——形状呢?——*当它快要打开时,它是方形,当它打开的程度很大时,它是菱形*。——在什么时候他会变成一个方形?——*在中点的时候*。——表面会变化吗?——*不,它不会变,或者会变。先变得越来越大,然后变得越来越小*。"

考(10;6)　"什么会发生变化?——*形状,菱形会变得更长*(他指向宽)。——在菱形的形状里还有什么?——*还有角,它们变得更大或者更小,绝不会保持不变*。——这些直线如何?——*以一个角度保持平行*。"

范(10;8)　"*不论你打开或者关闭它,杆都会保持平行*。"

拉德(11;4)　"*它就像一对剪刀一样工作*。——那么将它打开呢?——*它仅仅会变得更宽一些*(正确地画出)。——宽度什么时候会变得比高度长呢?——*打开一半以后,当它产生直角的时候*。"

阿扎(11;6)　提前画出了所有的变换;"我们什么时候能看到方形?——*中间的时候*。——第二次呢?——*不,它只出现一次*。"

科尔(12;0)　"*当你把它们打开的时候,菱形会变成正方形*。——杆会变成什

么样子呢?——斜的而且是平行的。——对边变化吗?——不,角变化,但是边是不变的。”

这个进步是不言而喻的,尤其是在第四阶段。儿童注意到的关系与第四阶段注意到的相同,但是包括何时会出现高度小于宽度等,它们都是被提前阐明和推断出来的。

第六节 结论:关于平行性的保留

为了从这个相当简洁的研究中得出正确的结论,首先我们必须将这里的发现,与从试图估计普通线条平行程度的儿童的概念,尤其是知觉研究中获得的发现进行比较。在理解上述实验的同时,读者一定也在不断地问自己,菱形的实际结构在实践中是否因为没有趋向复杂化而鼓励了对平行性的感知。因为从表面上看,没有什么比想象到尤其是感知到两条线总是等距且从不相交更简单的了。

然而,仅仅是问一个儿童两条斜线的平行性就足以使我们意识到这一问题的复杂性。首先,如何提出一个问题以使平行性的概念易于理解?大概可以通过询问这些线是否“以相同的方式倾斜”,因为任何诸如“等距”之类的想法的引入,都引入了更为复杂的概念和测量,这些概念和测量本身就取决于关于平行性的假设(例如直线间特定角度的平行性就引出了以等距表示的平行性的循环定义)。另外,我们说两条直线“以相同的方式倾斜”则意味着引入直线和空间方向的概念。我们已经在第六章中看到了直线变得可视化有多迟了。对于方向(orientation)这一概念,这要么是一个测量角度的问题,要么是一个其他寻找确定倾角方法的问题。但是,平行性这一概念与角度这一概念同时出现并不令人惊讶,因为一对直线在不平行时必然会相交形成一个角度。在下一章中,我们将看到这两个孪生概念是心理上相互依存的。如此,必然得出以下结论:角度的概念不能先于平行性,也不能用作衡量斜线平行度的方法。这使我们有了确定方向的办法,但当意识到空间方向这一概念是坐标系本身的基础时,这一点便很快被排除在外了。正如在第十三章中所看到的,它们的进展是极其复杂且耗时的。

简言之,想象两条直线之间的平行性,并不比想象一个像菱形一样的封闭而组织良好的图形两边之间的平行性更简单。但是,也许有人会问,即使不去想象,也是否会更容易被感知呢?在这里,比较知觉估计和概念估计的结果非常重要,因为对平行性感知的实际研究所得出的结论是,对平行性概念的认识先于其精确的感知,而不是像以前可能认为的那样。

沃斯腾(同上)进行了以下实验:要求20位成人和20位5—6至12—13岁间的儿童比较卡片上绘制的斜线的长度。此外,他们还邀请画垂直、水平或倾斜的平行线,或将扭转的金属棒调整到平行位置。沃斯腾的发现如下:首先,即使是有经验的成年人,也永远不会完全没有错误地感知到平行性。这进一步证实了几何概念的智力和逻辑特征是支配和影响知觉的,而不是完全依赖于知觉的。其次,也是最重要的一点,临界变化的比较和误差的一致性表明,7—8岁以下的儿童,其对倾斜和空间取向的知觉非常差。儿童在比较指向不同方向的线的长度上要比成年人表现更加好的原因恰恰是因为儿童对它们的相对方向并不敏感和关心。[①]这些实验的总体结果表明,年幼儿童的知觉空间在方向上相对来说没有得到很好的组织,因此缺乏参照系。从7—8岁开始,表现会逐渐提高直至机体成熟。

因此,直到7岁或8岁的第3A亚阶段,正如我们已经看到的,与菱形相关的平行性概念才可以得到掌握,它并不是早期知觉发展的直接产物。正相反,它更可能是与知觉相互作用,逐步完善并增强知觉的整个操作性因素的一部分。

那么,如果不把平行性这一概念仅仅为解释知觉的产物,那如何解释它的发展呢?首先以一条线为例,我们在第六章(第一节)中指出,与"瞄准(taking aim)"的实践相关联(即用透视的观点协调拓扑线)的直线的概念,与保持固定方向这一观点一起(确切地说大约在7或8岁)出现。显而易见,后一个概念在它的训练中引入了大量直线共同方向的概念。当第3A亚阶段的儿童开始意识到铁路线似乎在远处相交时,尽管看上去会相交,但他们认为它们实际上是平行的。[②]简言之,一旦儿童掌握了直线的操作概念,他也可以设想一对平行的直线。至于菱形对边的平行性,在本实验中,它与理解图形所经过的一系列仿射变换有关。只要儿童仅将这些变化视为菱形的绝对膨胀和收缩,他就没有理由将图形视为等长的对边彼此平行且围绕两个不相等的轴摆放而成的四条线。但是,当他意识到菱形的角度和轴可以发生变化,同时不会以任何方式影响对边的长度(就像他在第2A亚阶段所做的那样),他也将意识到对边的平行性是不变的,这也使得这些变化可以被预见。因此,在我们一直研究的仿射变换系统中,菱形对边的平行性起着操作不变的作用,而这正是儿童解决问题的关键。

我们还有一个问题待解决,即孤立的一对直线的平行性与菱形中的平行性之间的关系,但这是一个相对简单的问题。在讨论绘制菱形的问题(第二章第六节)时,我们发现它比正方形、矩形或三角形更困难。这主要是因为儿童必须考虑成对的不垂直的平行线,并且判断图形正确的唯一标准是两半部分之间的对称性。因此,显然菱形不能在平行线之前被建构(如果我们将斜线、垂直线和水平线包含在内,而将任何可感知的参

---

① 对于水平的和垂直的平行线有较少的困难。因此在这两个案例中,似乎对平行性的感知领先于这一想法。

② 对于此,需要注意的是,当第二阶段的儿童画并不相交的线时,它们只是近似平行的。类似地,当他们构建一条与桌子边缘平行的线时,只有在这一边缘线存在的情况下平行性才会得以实现。

考系排除在外)。同时,一旦儿童可以独立于知觉到的环境而学会画出单独的直线,他便可以画出彼此相互平行的直线。因此,菱形中平行性的保留、斜线的构造以及任何方向平行线的绘制都将变得十分接近。而以上的每一项都基于一种处理空间方向的所有概念所共有的操作性机制。

这些想法有什么共同点呢?让我们忽略形成直线的投影方法(通过“瞄准”),而只考虑恰好同时出现的保持固定方向的想法。应该清楚,直线和平行性概念的共同点在于,两者都构成了相互协调的空间方向的起点,而这是通过构建真正的坐标系或参考系在欧几里得概念这一层次上得以完成的。

然而,在继续讨论这一话题之前(第十三章),我们必须首先检验儿童在获得这些初步概念之后,是如何得出角度、比例和相似性这些同源概念的。正如在下一章将看到的,在空间概念的发展过程中,相似性(保留角度)正好位于仿射变换(保留平行性而非角度)和位移(除了角度、平行性和直线之外仍保留距离)之间。

最后,在提出相似性和比例问题之前应当注意到,尽管菱形的仿射变换并不需要比例这一概念,但它确实暗示了某种类似于投影变化的广泛的量化。[①]这表明儿童确实隐含地考虑了菱形的变化,因为它形成了一个连续的序列,并且在中点处发生了反转(尤其在第3B亚阶段和第四阶段很明显)。

---

① L. Godeaux, *Les Géométries*, p146.

第十二章 相似性和比例[1]

在研究儿童思维的发展过程中，我们经常会遇到如何理解比例这一问题。例如在速度和运动这一问题上，在比较不同时间和距离（例如1秒5cm和2秒10cm）下两个连续运动的速度时，就会涉及这一概念。[2]类似地，在儿童对概率的判断中，比例的概念也意味着从四个案例选中出两个有利案例，与从六个案例中选出三个有利案例具有相同的可能程度。[3]在以上两个截然不同的领域中，比例这一概念似乎直到正式运算的水平上（第四阶段）才得到了充分发展，当然它的发展贯穿了整个早期阶段，尤其是在那些较简单的情境下。

然而，如果仅考虑几何中的比例概念，那么整个问题将要被重新考虑。我们将从几个方面开始。

首先，基于泰勒定理和加斯曼以来的电流的几何化处理，假定了角度和相似度概念是不需论证的。但是在上一章中，我们已经观察到，从心理发展的角度来看，平行线与角度两个概念是同步建构起来的。同时，从几何学的角度来看，确保保留角度的相似性是确保保留平行性的类同组的一个分支。

由此可以推断，在看到儿童如何在菱形的变换过程中保留对边的平行性之后，我们要做的将是检查儿童如何根据边的平行性来感知内接三角形的相似性，以及他是如何从这个角度出发来感知角度的相等。把这个特殊的例子看作是从平行性研究到角度研究（从仿射性分析到相似性分析）的过渡的同时，我们可以通过扩展相似性研究使其涵盖一般角度的比较，以及矩形等其他图形。

但是，在处理空间问题时要特别注意比例性还有另一个原因即，与非几何形式相比，这里的研究要容易得多。在儿童想到“相似”图形之前很久，他们就可以直接感知到具有不同维度的图形是否具有相似性关系。因此，必须在对图形的真实知觉中寻找比例这一概念的起源。到目前为止，通过模式和良好的图形构造来显示在每一种知觉中所起的作用，以及通过阐释“良好的”的一个标准是，尽管绝对大小有所变化，但仍有可能将其识别为相同的结构，格式塔理论已经大大缩小了这一问题的范围。对两个形状相似的知觉上的识别（例如大小不同的正方形）被称为换位（transposition），并且在Von Ehrenfels和由此衍生的各种格式塔理论之后，正如我们在第一章中所述，换位图形以及

① 与Mme. Marianne Denis-Prinzhorn, Mlle. U. Galusser 和Mlle, M. Gantenbein合作。

② *Les Notion du Mouvement et de Vitesse chez l'Enfant.* Paris, 1946.

③ *La Genèse de la Notion de Hasard.*

诸如旋律其他结构的能力被视为是知觉或知觉活动的基本属性之一。显然，如果是这样的话，我们必须回到基本换位的细节来解释比例这一概念是如何演变的。

然而，感知到两个图形是相似的，这与能够构造出一个与现有模型相似但本身还不存在的图形有很大的区别。因此，这一知觉问题决不会消除智力心理学中的相应问题，而只是表明需要分别研究这两个问题，并将它们联系起来。

即使在知觉领域内，换位也存在变化。因此，从一个小正方形到一个大正方形的变换包括整体形状（正方形本身）、角度的大小（保持直角）以及边或对角线的相对长度（保持相等）。另一方面，如果对两个矩形加以比较，尽管一个图形可能比另一个图形长或宽，但总体形状和角度可以保持不变。在这种情况下，形状的换位需要角而非边的相对长度的换位。最后，一对三角形或菱形可以被认为具有相同的整体形状，因为它们总是三角形或菱形，但这不需要角或边的相对长度的换位。

因此，我们必须谨慎起来，不要认为知觉上的换位会自动导致对几何意义上"相似性"的知觉。尽管在某些像正方形的图形中（在某个年龄段下）可能会如此，但事实上它并不比平行性更普遍。正如我们已经看到的，对儿童来说，平行性只适用于垂直线或水平线，而不适用于斜平行线。因此，即使在知觉范围内，也有必要根据换位是否涉及整体形状、尺寸关系或角度，并在换位间进行仔细的区分。

因此，现在的问题在于发现在每个发展阶段，对比例的感知是如何被扩展并带入思维领域的。更准确地说，要了解在每个阶段，智力是如何利用或使它自身适应从对比例的感知中获得的数据的，而这一过程本身就是在不断发展的。假设儿童能感知到两个模型的相似性，那么他们是否能够不仅是在整体外观，而且还能在保留角度和相关维度的情况下，按照比例地画出它们吗？或者这需要一个新的进一步的心理发展过程吗？如果是这样，那么知觉活动和智力活动之间的实际关系又如何呢？

正是基于知觉和智力间关系的第二种观点以及角度和平行性（或相似性和仿射）间关系的第二种观点，我们必须研究比例（proportionality）的发展。这样的研究显然具有双重含义，因为它同等程度上既涉及空间观念的发展，又涉及几何思维的运算。

第一部分　相似三角形

为了探究儿童如何发现三角形的相似性，我们给他们设置了两个问题，这使我们能够将所涉及的关系得以分开，并遵循从仅仅意识到平行性（在前一章中探讨的）到角度相等或不等这一过渡。而这对于完整的比例及相似性概念是必要的。

我们首先要求儿童描述或绘制成对的相似或不相似的内接三角形，这样可以通过侧面的平行性或角度相等来识别相似性，尤其是使儿童随意地能够从一个标准过渡到另一个标准。

接下来，向儿童展示硬纸板三角形，这些三角形在被自由处理、临时覆盖等之后，必须被加以分类（等腰、斜角等）。同样这可以从角度或边的比较中推断出相似性。因此，在这两个实验中，角度的相等是与两个或甚至三个平行度（成对比较的图形对边的平行度）相关联的，正如在第六章第六节，平行性这一概念是与直线本身的平行性相关联的。这样做更便于追踪直线、平行线和角这三个概念间的相互联系。

第一节　方法和一般结果

这两个问题如下所述。第一个问题是为了引起对两边的平行性的关注，而第二个问题强调角度的相等，尽管在每一种情况下，儿童可以自由地以他认为最好的方式进行。

问题一：提出这一问题的方法有两个目标：其一是引导实验指向，以发现边的平行性作为三角形间相似的标准。其二，便于研究这一标准与角的相等性及边的相对长度之间的关系。为此，我们简化了程序，只使用内接图形，或通过直接知觉的方式绘制或加以比较。

1.给儿童一个三角形模型，并要求画出：（a）一个与模型外切的相似三角形。[①]该些模型由等腰三角形组成，其中第一个腰长 3 cm，底长 3 cm；第二个腰长 1.7 cm，底长 3 cm（或腰长 3.4 cm，底长 6 cm）；第三个腰长 6 cm，底长 3 cm。每个三角形的底边与要与之内接的三角形底边的一部分重合，同时作为一般规则，我们提供已绘制的新三角形的底边。因此，对于前两个三角形，我们绘制了 6 cm、9 cm 或 12 cm 的底边，而对于第三个三

---

① 当然，给儿童们提供了一些直边缘来帮助他们画线，但是没有其它对边平行性的暗示。

角形我们绘制了6或9 cm的底。在已经给定模型和要在其周围形成的新三角形的底边的情况下，儿童只需画出剩下的两个边。因此，他很容易保持已有和将要画出的三角形边之间的平行性。由于底边有相同的中点，因此一条将小三角形通过该点等分的线也会把将要构造出的大三角形等分。为了看起来更容易，我们有时甚至将等分线绘制成虚线，使它远远超出了要绘制的三角形的范围。在其他一些情况中，我们避免了这样的一些建构，让儿童完全按照他认为最好的方式来进行以及构造周围的三角形。

(b)我们对两边长分别为4 cm和2.5 cm、底边长6.5 cm的不规则三角形运用了同样的方法来确定用于发现边的平行性的方法是否与等腰三角形的方法相同。

2.利用小三角形作为模型(边长3 cm的等边三角形；腰长6 cm底边3 cm的锐角等腰三角形；腰长2.5 cm底边4 cm的钝角等腰三角形；三条边长分别是6 cm、4.5 cm和2.5 cm的不规则三角形)，我们制作了两侧(底边和左侧)，并要求儿童将其围在一个相似三角形的左边角内，尺寸是其两倍或三倍(有时无限扩大)。然后，问题便仅仅是找到第三条边，而这可以通过猜测平行线来完成。

3.在一张纸上画出相等大小的三角形后，我们要求儿童在同一张纸上画出相似但更大的三角形，而这些三角形并非包围而只是靠近或接触到最初的图形。除了必须绘制的三角形必须与模型没有共同的底边之外，儿童可以按照自己的想法继续(判断平行性，测量边长、角度等)。

4.一个边长为2 cm、4 cm和5 cm的不规则三角形以底边倾斜的方式被呈现出来。它的侧边用虚线画出。将部分的虚线连成实线这样便增加了边的长度，例如使短边增加4 cm，使其总长为6 cm，使长边增加8 cm，使其总长为12 cm。向儿童展示了这个图形，并让他从一条边上标记的新长度开始，构造一个更大的相似三角形之后，三角形的底边被覆盖，同时儿童需要来做出一个他认为合适的新三角形，而这时他不能使用与他所画图形底部平行的底边。由于未被给予图形的尺寸，因此他无法将增长量确定为边的原始长度的两倍。这一问题的目的在于看儿童在不平行的情况下是否会给每一边增加相等的长度，或者即使不测量，他是否也会制作出具有比例感的绘图。

5.我们向儿童展示了一些已经完成的，有些正确、有些不正确的三角形，而没有让他画一个外接或相邻的三角形。然后儿童被要求将相似和不相似的三角形成对分开。例如，一个边长3 cm的等边三角形由一个与第一个具有相同6 cm底边、但侧边的长度在4 cm到8 cm或更多的三角形包围。成对的三角形以随机顺序被呈现出来……

6.通过比较，在没有过多停留在类似矩形(将在第二部分中讨论)上的情况下，我们向被试者展示了一个3 cm×1.5 cm的矩形纸板和一张已经画好底边的纸，其中后者从6 cm到12 cm不等，与模版的靠下的边重合，并始于一个角。然后，被试者被要求运用现有的底边绘制一个类似的矩形，将第一个矩形包围起来，或者偶尔在已有基准线不存在的情况下绘制该矩形。

7.同样，为了便于比较，我们让被试者比较成对的矩形，其中封闭的图形再次为3×1.5 cm的大小，周围的矩形宽4 cm且长度不定。[1]当图形的相似性被高估时，误差被视为正，当被低估时，误差被视为负，相等的临界值为以cm计算。

8.由于矩形可以被看成三角形的组合，用一条对角线将一个小矩形（同样是3×1.5cm）切割成两个三角形对比较三角形和矩形的相似性是有帮助的，其中这一对角线要在一个方向上横跨并超出图形本身。然后儿童被要求画出一个外接于第一个（正如在6）的矩形，看他是否会利用产生的对角线来构建新的图形。

9.最后，我们对当内切矩形（正如在6）的对角线常见或不常见、连续或断开（如果图形不相似）时的知觉比较进行了对比研究。

问题二：第二组问题与在被自由操作、叠加等之后必须被分组的三角形相关。我们给儿童出示一系列三角形纸板，以便他们可以在小组内或者（与大一些的儿童一起）整体一起对这些加以比较。在这里，最主要的是研究他们比较形状的方式。在实验过程中，我们引入了新的图形，并根据需要去除了一些图形。完整的三角形集包括：

*A*系列：顶角是锐角的五个等腰三角形，其中A_1=腰长30 cm，底边9 cm；A_2=腰长20 cm，底边6 cm；A_3=腰长15 cm，底边4.5 cm；A_4=腰长10 cm，底边3 cm；A_5=腰长7 cm，底边2 cm。

*B*系列：顶角是钝角的三个等腰三角形，其中B_1=腰长6.5 cm，底边50 cm；B_2=腰长3.25 cm，底边25 cm；B_3=腰长1.6 cm，底边10 cm。

*C*系列：三个等腰三角形，内部高都是20 cm，但是有不同长度的底边，C_1=5 cm，C_2=30 cm，C_3=50 cm。

*D*系列：三个不相似的等腰三角形，底边均是15 cm，而高度不同，其中D_1高=3 cm，D_2高=13 cm，D_3高=26 cm。

*E*系列：一个斜三角形E_1=底边13.5 cm，高度4.5 cm；角为43°，107°，30°。一个等腰三角形E_2底边=12 cm，高6 cm，角为45°，45°，90°。一个等边三角形E_3=底边8 cm，高7 cm，侧边8 cm，60°角。一个直角三角形E_4=底边16.5 cm，高8.5 cm，角度为28°，62°，和90°。

*F*系列：八个等边三角形（F_1—F_8），还有一个与它们顶角相同但被沿另一方向裁去底边的三角形（F_9）。

这两种方法（I和II）产生的结果使我们能够确定从第2A亚阶段到第四阶段的某些总体发展水平。事实证明，即使使用方法Ⅱ，也无法对4—5岁以下的儿童（第一阶段）进行行之有效的实验。

尽管我们将要描述的阶段与两种类型实验的发现有关，但我们应意识到这些结果是相互补充的，而非一致同一的。当然，这会使它们变得更加有趣，因为比较两个现成的图形甚至用一个副本将模型括起来画一个图形，与通过移动和叠加两个图形来判断

---

① 这些维度被选来促进与非内接三角形的比较，这在第二部分进行研究。

它们是否相似截然不同。因此,在方法I的实验中,儿童不能直接叠加角度,而必须依靠侧面的平行性,而使用方法II时,他可以通过移动两部分使角度重合,而不必依赖于平行性。最令人感到振奋的事实是,在这两种方法下,儿童发现侧边的平行性(方法I)和发现角度相等(方法II)在非常相似的年龄(平均7岁6个月)。换言之,在这两种情况下,他们都学会了忽略边的实际长度,而这正是一个不断误导更小年龄儿童的因素。同样,使用这两种方法,对定性上的相似性的发现似乎早于对尺寸本身的相对比例的理解,而后者在第3B亚阶段仅限于简单比率并通常仅适用于第四阶段。

我们观察到的实际阶段如下:第2A亚阶段从4—5岁到6岁6个月。通过方法I获得的图既没有考虑侧边的平行性,也没有考虑角度的相等性。对两个内接三角形的知觉上的比较会导致一个恒定的误差,这通常在于选择了与内接三角形相似的过高三角形的方向上。选择的矩形太长,那么对角线则不能被用作比较的参考。运用方法II进行比较时不需要任何角度的直接匹配,也不需要任何一致的努力来叠加图形。

在第2B亚阶段(6岁—7岁6个月),内接三角形的扩大,在例如略微倾斜的钝角三角形等某些特殊情形下,产生了关于平行性的直观想法。在知觉方面,判断三角形边的斜率有了显著进步。上述误差在矩形中更为明显,而对角线仍未用于帮助判断其比例。对于方法II,这里也可以看出区分的开始,尽管还没有自发地将叠加作为比较图形的手段。

第二阶段的显著特点在于不进行任何系统的操作性的比较,而第三阶段则标志着操作的出现,而这有助于对平行线、角度和简单尺寸关系进行一般性的比较。在第3A亚阶段(方法I),内接三角形内侧和外侧之间的平行性被认识到,正如在第六章的相同阶段认识到的菱形对边之间的平行性概念。对于知觉上的比较,知觉开始由思维所决定(仍然不如借助尺子进行的操作性比较准确),尽管判断矩形的相似性仍然比判断三角形的相似性更困难。方法II表明,儿童试图通过相等的角度识别相似三角形,并且我们发现他们会自发地将图形叠加在一起。

使用方法I时,我们发现第2B子阶段(开始于9岁—9岁6个月)的儿童在比较时同时考虑了平行性和基本的尺寸关系(问题1和问题2),而在使用方法I时,他们试图将平行边和相等角同时相关联。

最后,我们进入第四阶段,其特征是已经掌握的所有度量关系都获得了真正的比例性关系。[①]

为了使进行的任务更简明,我们将依次描述这两种方法的结果。首先,是可以用肉眼比较或绘制出内接图形;其次,可以处理和叠加可移动的纸板图形。

---

① 从第二阶段到第四阶段同样的发展顺序适用于内接三角形(问题三),尽管由于在这种情况下模型不能被放入大的三角形中来比较而存在一个轻微的落后。

第二节　内接三角形，
第2A亚阶段：对应边的不平行，
第2B亚阶段：平行性的开始

我们可以从第一章和第二章回忆起4岁以下（第一阶段）的儿童还不能画出三角形或矩形，也无法通过触觉识别形状的情况。因此，在这个阶段提出有关相似性的问题完全是浪费时间，除非相似性可以被直接感知。

另一方面，在第2A亚阶段或者至少在5岁之前，儿童很容易将一个三角形用另一个表明它扩大的三角形所围住。然而不管人们如何强调那个更大的三角形必须与模型"具有相同的形状"或"看起来与模型一样"或"只是相同"等等，儿童仍然只满足于一个粗略的、整体上的类比。也就是说，他画了一个更大的锐角三角形来表示锐角模型，或者画了一个更大的钝角三角形来表示钝角模型，但是他仍然对边之间的角度或平行性不太在意。以下是一些实例。

佩尔（5;5）　被给予一个模型，该模型的底边6 cm，侧边为3.4 cm，并有一个画好的12 cm的底边以便他来构造。他画出了一个过于高且不等腰的三角形。尽管共同的等分线用虚线画出，他还是把顶点放在超出了正确位置的地方。它的边长分别为12 cm（给定）、10 cm和8 cm。对于3.6 cm和6 cm的模型，他画出了边长分别为6 cm（给定）、8 cm和8.5 cm的放大图，这仅比模型略高一点，并其侧边不平行，并且顶点移向了右侧。

边长为3 cm的正方形必须在超出模型3 cm之上的6 cm底座上扩大。他将其正确地画出了。另一方面，给定底边为6 cm的3 cm × 1.5 cm矩形会导致（底边6 cm × 9.5 cm）的扩大，而佩尔自己认为"看起来不像"。然而，他不能做得更好了。

视觉上的比较会在三角形的高度和矩形的长度上产生恒定的正误差。

西拉（5;8）　边长为3 cm的三角形，"这是什么？——*一个红色的印度的帐篷*。——现在，你必须要画一个看起来像这个小帐篷的大的帐篷，从这条线开始（一条共同的底边已经给出，但只是穿过纸张，没有说具体的长度）。——（西拉画了一个大的底边15.5 cm、侧边11 cm和12 cm的三角形。）——它恰好是一样的吗？（侧边显然不平行）——*当然*。——现在，你必须要画一个这样的帐篷（等腰三角形，底边长6 cm，腰长3.4 cm）。——（他画了一个底边长是20 cm，侧边13 cm和12 cm的三角形。）——像这样吗（底边3 cm，侧边6 cm）？——*噢，它非常尖*。——（他先画了一个底边16 cm侧边13 cm和10 cm的三角形，然后说），*它还不够尖*，（他画了一个底边16 cm，侧边13 cm的三角形）*不，应该还要再尖一点*（他画了第三个三角

形，它围住了之前的两个三角形，其底边19.5 cm，侧边15 cm和16 cm)。"因此，每一次尝试的结果都与模型大不相同，并且底边比侧边要长得多。

作为对比，西拉被要求在模型的旁边而不是环绕着模型，利用已有的底边做一些扩充。对于底边3 cm的等边三角形，他做出了边长分别为6 cm和6.5 cm的模仿图。但对于底边3 cm、侧边1.7 cm的三角形，他在6 cm的底边上画出了侧边6 cm的模仿图。对于侧边6 cm，底边3 cm的三角形，他在6 cm的底边上画出了侧边为7 cm的模仿图，继而又将侧边改为了8.5 cm。

矩形的扩大使图形要么过高(就像佩尔的那样)、要么过长。内接图形的视觉上的比较也导致了同样类型的错误：对于三角形高度和长方形的长度的过度估计。

福格(6;9)　被出示了一个底边6 cm、侧边3.4 cm的等腰三角形。他将其扩大成了每一个都比前一个更不与最初的图形平行的一系列图形，并最终结束在一个底边为19 cm、侧边11 cm和15 cm的不规则三角形上。对于底边3 cm、侧边1.7 cm的模板三角形也发生了这样的情况。至于长方形，他只是将它们进行了加长，而没有考虑到宽，更没有考虑到对角线。

在视觉上的比较方面，福格似乎比前几个儿童更领先，尽管他依然过度估计了与内切三角形相似的封闭三角形的高度。

希尔(5;10)　我们向他展示了一个边长为3 cm的等边三角形，以及一系列不规则的三角形和一个边长为6 cm的等边三角形。"你看这是一个小的屋顶，这是为一个小房子设计的。现在我打算画一个更大的房子，我希望你找到一个，除了更大一点外，完全相同的屋顶。"(他扔下了一定量的三角形，每次都会说)这太大了。(然后他挑出了两个不规则三角形和一个等边三角形。)——*这些都可以*。——哪个最合适呢？——(那个不规则的。)"

随后向他展示了一个等腰三角形和与六个不规则三角形一起呈现的更大的模板。他开始按照大小选择，"*不，这不是相同大小的，这不是同一件东西*。"然后他把一个等腰三角形放在了其他三角形上面，并且将它们的一边排队起来，"*这是相同的，只不过大小不同*。"然而，他仍然将模型放在一个形状非常不同的不规则的三角形(一个钝角三角形而不是锐角三角形)上，并且说"*它是合适的，它是相同的，你可以用这个*"(底边一致，他没有想到形状)。

随后他被要求画"与那个小的一样的大屋顶"，要求围住已经画出的三角形并利用相同的底边。他完全失败了，他的仿制品既没有平行的边，也没有相等的角。对于一个只有稍微倾斜侧边的等腰三角形，他画了三条相邻的线，每一条都比前一条更不与模型中的边相平行。最后，他说，"*这个将会很好*。"

之后，他被要求将三角形包围在一个大的相似三角形的左上角。它的底部和左侧已经被画好，只剩下一侧待画出。他还被要求做一个类似的外壳，但不扩展现有的两侧。在第一种情况下，希尔没有使第三侧平行；而在第二种情况下，他在没

有真正知道该怎么做的情况下，延伸并完成了所有侧边，并构造出了一个完全不同的图形。

必须复制的相邻三角形放大后的效果并不好，相邻边之间没有平行的迹象。而矩形的放大会导致一个矩形大致相似，而其他则过于长。

最后，他被展示了一系列内切三角形，其中一些在中间，另一些在更大的三角形的角落，同时被要求用肉眼进行判断。他似乎注意到一次平行关系“*这个是最好的*”（指向平行边），但是对于两个不平行的三角形他也说，“*对的，这个和上一个一样好。*”

我们无需重复这些示例来了解该阶段典型的反应类型。面对绘制一个比已有三角形更大的三角形的任务，儿童对自己画出的任何三角形都感到很满意，并且认为，与非三角形的图形相比，所有三角形都一样。当要求儿童在共同的底边上用另一个外接三角形来扩大原有图形时，这时儿童无疑会画出一个与模型具有大致相同形状的图形。但是即便如此，这也仅适用于等边三角形和等腰钝角三角形。对于等腰锐角三角形来说（底边 3 cm，腰长 6 cm），通常导致复制的结果非常不同，例如，佩尔画出的是底边 6 cm，侧边 8 cm 和 8.5 cm 的三角形；西拉画出的是底边 16 cm，侧边 10 cm 和 13 cm 的三角形。很明显，通过画出其外接图形可以使在放大图形的同时保留其相似性变得更加简单容易。一组对照实验的结果表明了这一点。该实验包括让被试者分别紧邻模型以及不围绕模型画出它们的放大图。对希尔进行该测试的反应报告显示，模版与复制图之间的所有相似性都不存在了（在等边三角形的情况下除外，尽管这种例外可能是由于其特殊构型所带来的知觉上的影响）。

然而，正是由于模版图形被内接时相似性更容易得到保持，所以我们才采用这种特殊的方法，它使我们有机会确定儿童是否考虑了边之间的平行性。这是一个关键问题，在这一点上，这一阶段的反应给出了一个非常明确的答案。即使我们将模版放在较大的三角形的两个侧边之间而第三边待补充（参见希尔，他甚至无法使这一侧边平行），我们所研究的儿童还是能够意识到平行性的。

至于使角度相等，诸如西尔所说的“*啊，一个很尖的三角形*”“*还不够尖*”以及“*更尖锐的*”会告诉我们这些确实是儿童关心的问题，而不是实验的实际结果向我们很明显地表明并非如此。然而，除此之外，没有试图使实际上构成角度的侧边相平行这一事实表明，儿童根本没有考虑角度。

当我们检查视觉上比较的结果时，这种对平行性和角度无动于衷的原因就变得显而易见了。观察一对内接的等腰三角形并判断它们是否相似的儿童向我们表明，他只考虑了一个维度，例如宽度或高度，而没有考虑它们之间的关系。通常，高度占据了他的注意力，就好像他对自己说“越高，匹配得就越好”。错误有很大的波动范围，也就是说，我们的估计波动很大。

对于矩形的相似性,到目前为止,仅通过直接比较研究,同样的困难也是显而易见的,但具有更加突出的形式,因为要使儿童理解对矩形的包围要比理解三角形的外接更加困难。绘图会导致对图形的扩大,要么过长,要么过高,并且内接图形视觉上的比较在所选图形相对于模型的方向上产生恒定的误差,该误差也具有很大的差异范围。画出对角线似乎对结果没有任何影响。

不同于这些早期的反应的是,第2B亚阶段表现为一个过渡阶段,此时平行性得到了一定程度上的掌握,并仅限于特定类型的三角形而非全部图形。以下是一些实例。

米斯(6;6) 将一个边长为3 cm的等边三角形扩大为一个底边6 cm(给定)、侧边5.5 cm的三角形。这一底边6 cm,侧边3.4 cm的等腰钝角三角形,扩大成了一个近乎完美的底边12 cm(给定)侧边5.6 cm和6.5 cm的三角形,尽管米斯自我批评到,“*它并不像第一个那样尖*。”另一方面,这一底边3 cm,侧边6 cm的等腰锐角三角形对他来说是困难的:“*这个更难一些*。”在这里,他只能完成侧边6.5 cm、底边6 cm的三角形,所以平行性根本无法保证。“它确实可以吗? ——*它有一点宽*(它几乎是等边的),*但我不知道怎么做*。——再试一次! ——(这次,他画了一个边长是7 cm的!)”由此可以看出,尽管他在之前的图形中考虑到了平行性,但在这儿完全没有意识到边的平行性。

他视觉上的比较没有导致连续的错误,但是体现出了广泛分布的离差(6 cm中有2 cm的误差)。在这一点上,米斯开始在边平行的基础上进行了估计(“*不够近*”“*太远了*”)。

尽管如此,就像离差所表明的,这相当粗糙。

这一内接矩形在高几乎没有变化的情况下,有了一个狭长的扩大。视觉上的比较产生了显著的正错误,而对角线则没有任何影响。“这条斜线帮助你看到这个矩形具有相同形状了吗? ——*不,它反而有所阻碍*。——为了看到是不是同样的形状,你会做什么呢? ——*我看长度*。”

巴尔(6;8) 等边三角形(边长是3 cm)。在给出6 cm的底边后,他将侧边扩大到了5 cm;在给出9 cm的底边后,他将侧边扩大到了6.5 cm。他几乎正确地做出了底边6 cm,侧边3.4 cm的钝角等腰三角形,但几乎没有把它扩大化(底边7.5 cm,侧边3.75 cm。)“将它变得更大一些。——*已经很大了*(在一边,他保持着平行,并且没有移动他的尺子,同时他将另一边画的有点太短太过于倾斜)。”侧边6 cm、底边3 cm的等腰锐角三角形:有一条给定的6 cm长的底边。巴尔画出了并不平行的侧边,而且几乎没有增加高度。他随后调整了作图并且将高度增加了5 cm,尽管侧边依旧不平行。

视觉比较的结果和米斯的结果类似,但是巴尔没有直接涉及平行性。

内接的矩形。在高的比例上,它太宽了。视觉比较的结果引发了同样的错误

(负的),对角线依然没有被用到。

米尔(7;6) 画出了原来等边三角形(边长3 cm)两倍大的图,而且保持侧边或多或少地与模版平行。但是在接下来进一步的扩大化中就丢失了平行性(例如,基于一条17.5 cm长的底边,他画出了13.7 cm和13.2 cm的侧边)。对于钝角三角形,他在前两个扩大过程中都保持了平行关系,而在第三次扩大中丢失了平行性,并最终结束于一个底边20 cm、侧边13 cm和16 cm的三角形。分别基于给定的和任意的底边线,锐角三角形的高被扩大了一点,但如同巴尔所作,平行关系仍没有得到体现。

视觉比较产生了一个负错误,与高的比例失调,但是离散程度很小(1 cm)。

关于内接长方形的转化扩大了,有时候是以宽度的形式,有时候是以高度的形式,而对角线又完全被忽略了。

视觉比较会产生负错误,宽度与高度成比例地被过度估计,但离差很小(1 cm)。

对内接矩形的作图,将图形有时在宽度,有时在高度上进行了放大,而对角线则完全被忽略。

我们给予了米恩(7;10)一个被平行于两侧的线所包围的三角形。通过画第三条线来做完成扩大的第一次尝试完全没有体现平行性,但他接下来的尝试越来越体现出了平行性。尽管绘制锐角三角形比绘制钝角三角形要难,在把三角形包围在中心时,他仍以同样的方式进行。

这些反应在一些方面较第1A亚阶段有所进步。首先,儿童在扩大图形的过程中开始考虑到两边之间的平行性,尽管其只有通过逐次逼近(米恩)或在特殊情况下才会被考虑。这首先出现在放大程度相对较小并且平行性直接可见时;其次是当三角形具有某些特定形状时。因此,我们发现等边三角形以及尤其是等腰钝角三角形的平行性可以被更好地保留。后者的侧边虽然有点倾斜,但相比于通常放大后效果差且不准确的等腰锐角三角形,它们更容易进行比较和估计。这就好像儿童在犹豫要不要再增加高度,觉得他被限制只能增加宽度一样。他的表现似乎表明存在某种理想的三角形知觉原型,在该原型中平行性最容易得到保留,同时他似乎感到顶点过于尖锐的三角形偏离了这种"良好的格式塔",因此他无意识地被迫朝这个方向修改了他的扩大化图形。

其次,由于出色的感觉运动适应性,内接三角形的视觉比较总体上比第2A亚阶段期更稳定。与目前阶段相比,对平行性有关的隐性的(有时是显性的,如米斯)恒定误差往往会在更大程度上自我补偿。

关于内接矩形的误差更为明显,并且通常以过度拉长图形的形式出现。值得注意的是,在判断相似三角形中出现的进步和到目前为止还是原始状态的长方形之间的这一对比是令人担忧的。这揭示出两种判断(即基于边之间平行性及角之间相等性的判断与目前还未实现的依赖于大小上比例关系的判断)之间存在着巨大的差距。

最后，儿童完全忽略了模型上已有对角线(参见米斯)这一事实，不仅证实了刚才所说的，而且还表明矩形的扩大与三角形的扩大之间的联系是多么地小；对于这些儿童来说，他们从来没有意识到对角化的矩形只不过是两个三角形的组合。

第三节 内接三角形，第3A亚阶段：边之间平行性的建立，第3B亚阶段：维度联系的开端

与第十一章关于发现斜线之间的平行性，特别是菱形的对边之间的平行性相一致，一旦在第3A亚阶段的儿童能够构想并保持这样的平行性，他们就可以始终如一地、隐化地将其应用于在不改变三角形形状的情况下扩大三角形这一问题。因此，这一阶段表明了对三角形之间相似性的某种形式的理解；从此以后，当两个三角形的对应边平行时，它们就被视为相似。

至于角度，我们要研究的儿童通常不会明确地提到它。在这一点上，他们不同于借助于第五节中运用方法II所研究的儿童，但公平地讲这是因为他们通过侧边的平行性来识别角度的相等。准确地说，他们不提及角度，因为对他们来说，平行性和角度这两个概念是一个概念；而当遇到涉及图形重叠的第二种方法时，他们开始意识到将图形相邻边分开的空间。

以下是这一亚阶段的实例，以两个仍然在第2B亚阶段和第3A亚阶段之间的儿童开始。

米克(7;6) 边长3 cm的等边三角形。“*噢，它像是红色的印第安人的帐篷。*——我希望你做同样的帐篷，只是要更大一些(在纸上延展的共同的底边)。”在没有考虑虚线画成的二等分线的情况下，他画了一个极好的边长分别为8.7 cm、8.7 cm和8.8 cm的三角形，其中左侧的边靠近模型，右侧的边离模型超过4 cm远。尽管我们原本在给他问题的时候没有提到平行性，但他明显地保留了边之间的平行性。“你是怎么做到让这一帐篷和小的那个形状是一样的呢？——*我看它们是否同等倾斜，如果我画得太扁的话，就不同了。*——这一个呢？(另外一个等边的)——(正确地画了出来)*你只是移动了尺子，然后它们的倾斜程度就相同了。*——那个呢(底边6 cm、侧边3.4 cm的钝角等腰三角形)？——*噢，那个看起来是压扁的*(他非常小心地移动着尺子以保持平行关系)。——现在呢(边长3 cm全等的三角形，在给定的9 cm的底边上)？——(他开始于不规则三角形)*噢，亲爱的，它不会这样的，这形状完全不同了*(他做了几次尝试，不到第四个就画出了或多或少令人满意的底边9 cm，侧边9.5 cm的仿制图)，*只有这个可以。*——那一个呢(基于同样的底边，侧边10.5 cm)？——*这比其他的都好，但是还不对。*”

当扩大矩形的时候，米克将它画得太长了，而且没有利用已经给出的对角线。

梅特(7;9)　最初的反应与第2A亚阶段的反应类似，但后来表现出了第3A亚阶段的反应。在给定的6 cm的基础上扩大3 cm边的等边三角形，但边的长度不超过5.5 cm，因此这样的复制就不一定准确。“你认为那真的正确吗？——*它只是比最小的更高一些？*——那一个呢(以6 cm底边为基础扩大而成的底边3 cm，侧边6 cm的锐角等腰三角形)？——(她画了边长是8.5 cm的三角形)*对于那个我不是很满意。我把它画得太尖了*(事实上是相反的)，*边没有倾斜同样的角度*。——这个呢(底边3 cm、侧边1.7 cm)？——*那个立在它的长边上*(这次她确实尝试保持平行关系，侧边长3.5 cm，在6 cm的基础上做了扩大。然后她将铅笔放在和模型的边同一条线上，来检查她自己图形的平行性)*这差不多对了*。——你是怎么知道什么时候它就是对的呢？——*当直线以相同方式排列的时候*(=用朝向定义的平行性)。”

她放大的一些矩形有些太长，有些是正确的，特别是建立在已有对角线上的矩形这一情况下，但她无法解释为什么她使用了对角线。“穿过两个矩形的这条线有助于画出正确大小的矩形吗？——*我一点也不明白这会有什么帮助*。”

马特(7;2)　完全属于第3A亚阶段。他很快地成功地扩大了三个模型(边长3 cm的等边三角形，底边3 cm、侧边6 cm的锐角等腰三角形，底边3 cm、侧边3.4 cm的钝角等腰三角形)。他说：“*你只需要沿着这些线*。”同时让他的尺子与模型的边平行。

他视觉上的比较也是完全正确的。当给他呈现两个不相似的三角形时，他说：“*这是错误的，它应该像这样*。”同时将两只铅笔放在桌上来表示正确的角。

另一方面，他对长方形的扩大上，仍然在过高估计长方形的宽度方面表现出稳定的错误。“*当你增加高度的时候，你必须增加宽度*，”马特说，“*但是不要增加得太多*。”同样地，它确实“*增加的太多了*”，使宽度过于大，并且没有考虑到使用对角线。

与此相反的是，尽管有轻微的负错误(宽度过宽)，内接三角形的视觉匹配几乎是正确的，同时在有对角线的时候变得更精确。当这被呈现时，马特突然变得意识到了它的重要性，并且说，“*那条线穿过了那个大的长方形！噢，是的，我现在明白了！当线能够延伸到那一角时，就正确了！*”但这是一个在事件发生之后的经验发现，并不是一种构建的方法。

梅伊(7;10)　被给予了第一个三角形来将其扩大化，她立刻说：“*我只是沿着侧边*。”然后移动他的尺子与底边3 cm、侧边6 cm的模型的边平行。她说：“*这又相同了，边必须倾斜程度相同*。”但是她在将它正确地扩大之前，他做了一个不成功地尝试。

视觉比较产生了一个小的负错误。尽管已经给他足够有逻辑地解释过了，但是在识别被比较图形间的平行关系的时还存在着困难。他正在寻找它！

扩大化和长方形的视觉匹配都导致了相同的错误。随后我们给予了他对角线相互平行的矩形，但除非他自己有所发现，否则这对他的错误的程度没有任何的作

用。“*噢,那些线必须斜着相同方向,它们的倾斜程度要相同。*”

布鲁(8;1) 在周围移动了他的尺子并保持与等边三角形的边平行以便扩大化。尽管他宣称,“它必须要像这样瘦(顶角两条边之间的距离),*并且以同样的方式倾斜。*”底边 3 cm、侧边 6 cm 的三角形在他付出一些努力后才被掌握,因为他在判断平行性的正确程度上有困难。对另外一个底边 3 cm、侧边 1.7 cm 的三角形,他也做了同样的操作,而它的底边长被扩大了四倍。尽管他自己觉得不满意,但通过移动尺子的方式,成功地画出了正确的图。

视觉上的比较。他每次通过借助平行关系来检查自己的估计。“*它应该更陡峭……更不陡峭等等*”,然而做出了一些错误的判断。

至于长方形,他扩大时将图形画得太高了,而在视觉匹配时,他总是将长度过度估计。他在两个情况下都忽略了已经画好的对角线,而且说:“*他(画图的人)犯了一个错误,他认为当直线一直延伸到角落的时候是正确的,他让自己被欺骗了。*”

洛(8;2) 被给予了一个底边 3 cm、侧边长 6 cm 的等腰三角形。他被要求在 6 cm 的基础上将其扩大(中心化地包围起来)。她不禁喊叫了起来:“*必须要指出,这很难!*”随后,小心地移动着尺子,画了两条与模型平行的边。“你是怎样判断出何时它是正确的呢?——*两只手臂以同样的量倾斜。*”现在要求她去扩大同样的三角形,但是它靠近模型并且在几厘米之外的有同样的底边。“*噢,这很难!*”“*用尺子你做不到*(她开始用肉眼尝试,但是没有成功)。”“*这看起来并非倾斜相同程度。*”随后,她更加小心翼翼地移动尺子,并成功地画出了图形。“你可以用测量的方法将它画出来吗?——*你要测量什么*(惊讶)?”随后给她出示了一个边长 4 cm 和 2 cm 的不规则三角形,它在纸张的一个角落处放置,其边的延长线用虚线画出。洛通过移动她的尺子,立刻找到了一条与模型底边平行的边。

最后,研究者给她呈现了另一个边长仍然是 4 cm 和 2 cm 的不规则三角形,以致于相似图形剩下的一条边的长度必须是 8 cm(没有给出其它图形,仅仅画出了正确长度的线)。“我将要把房顶的底部(底边)藏起来。你能找到它在哪儿吗?和之前一样。——*不可能*(她没有做到)。——如果我将纸拿走呢(挡着它的纸)?——*噢,是的,这很简单,这和之前一样*(正如在之前的测试中的底边的平行关系)!——如果我将底边藏起来,但是给你看另外一条线呢(边长是 8 cm)?——*不,你不能分辨出。*——但通过测量呢?——*但是测量什么?*”

内尔(8;3) 立刻成功地画出了要求他画的三个扩大(在中心的和在角落的)的图形并且说,“*我让线倾斜的程度都一样,这很简单,之后它们看起来就一样了。*”“*你必须保证尺子移动的方向是正确的。*”在说此之前,他要了第二把尺子来检查平行性。

视觉上的比较。他同样认真地研究了每一个变化的倾斜度。但是他的视觉比较不如他的逻辑推理。

内接长方形不论在作图还是在视觉配对方面，都产生了一个正错误(过长)，他没有利用对角线。

对伊诺(9;0)的测试开始于比较一个等边三角形与不同不规则三角形混合在一起的其他相似三角形。这一系列被同时呈现。他马上将注意力集中在平行关系上，“*不，那太倾斜了……这儿比那儿斜一点*”。对于被放大的相似三角形，“*除了大一点，它们就是相同的*(他指出了平行边)”。通过比较等腰三角形和包含相似三角形的混合系列也得出了同样的结果。他丢去了那些不相似的三角形，并且保留了那个正确的三角形。“*完全相同，两条边倾斜的程度相同。*”然而，对于其它例子，直到发现叠加底边并且由此判断边的平行关系之前他都没有成功。“*你必须要移动它，然后它才会正确。*”

他被要求通过围绕扩大一个边长是3 cm的等边三角形。他想要他的第一个图形保持相似，但是没能保持尺子是平行的，“*它不是完全相同的。*——你是怎么分*辨出的？*——*那里比这里更近*(在每条线的末端距离不相同)。——你能使它正确吗？——*可以*(他通过将尺子的靠里的一边紧贴着模版的边缘，利用另外一条边画了平行线而解决了平行性的问题，并画出了扩大版的三角形)。——再大一些呢？——(它翻转了尺子两次，便能在更远处画出平行线)”。对剩余的三角形(等腰的，等等)，他也做了同样的操作，尤其是，在扩大没有事先给出任何线，必须包含一个角的三角形的时候。他画了模型的两条边，通过相似关系得到了第三条边，“*它的倾斜程度必须是相同的*”。利用这种方法，他成功画了等边三角形、钝角三角形、锐角三角形。随后，给了他一个不规则三角形(仍然以同样的方式围绕)。他画出了不等边，然后说，“*这儿我画得短了一些，那儿我画得长了一些。*”然后通过平行关系找到了第三条边。最后，在没有共同的底边的情况下，他将紧挨模板的三角形扩大了五倍，并只用了平行性的方法。他说：“*我明白边应该是一样的。*”对于另一个更加尖锐的三角形，他没有成功地将其画出，并且说：“*应该更陡峭一些，它的倾斜不像这样。*”

另一方面，当被扩大时，长方形被画得太高了。尽管在视觉比较中他抓住了对角线的意义，但被扩大时，对角线被忽略了，“*那个更大图形的那条线(对角线)必须到达较小图形的一角。*”

最后，我们向他出示了边长2 cm和4 cm不规则锐角三角形，它被与纸张成一定角度的放着，同时提前告知要对短边进行4 cm的扩大(没有提到任何数字，所以三角形必须用6 cm的短边来画)。“*我可以用尺子吗？*——为什么？——*去看看倾斜程度是否相同。*——不，我们打算隐藏模板的底部。我想看看你能不能在看不到底边的情况下做出复制图。——*那么我画不了。*——尝试一下。——*我可以测量吗？*——如果你想的话。——*它有4 cm。我增加4 cm。*”他给每条边都加了4 cm，因此边长变为6 cm和8 cm，随后他画出了底边的线。现在底边没有被隐藏了，他明

白了他的错误。“噢，*它是独特的三角形，我明白了你要做什么。*”(他画了一个与模型底边平行的底边)——但是在看不到底边的时候你本可以猜到的。——*当你把它藏起来时，我不能分辨。*——测量一下它们有多大。——(他量出了 8 cm 和 4 cm)*我根本不理解！噢，是的！它必须在这条边上大一些，因为它在另一边上更大了*(伊诺因此意识到了比例)。——现在，用这个方法在另外一个三角形上试一试(边长 2 cm 和 3 cm，同样的倾斜程度，但是一条边的扩大量没有被提前给出)。你只能靠自己将它画出来，我不会给出你尺寸，测量也不太用得到。现在我们将底边藏起来。——(他首先给两边都加了相同的长度，大约 2 cm，然后画了一条线。)*不，我不认为这是合适的*(在没有任何测量的情况下，他向与 3 cm 相对应的边增加了这样相当大的长度，并画了一条新的底边)。*是的，这好多了*(它检查了底边看它们是否平行)，*不太正确，但是接近了。*”这表明伊诺不仅能够对所有三角形应用平行性的方法，而且在扩大它们的过程中获得了清晰的比例概念，而这正意味着第 3B 亚阶段的到来。

尽管还会在视觉比较上犯错误，但他依然在利用平行关系做出判断。

这些例子，尽管很多样，但并没有完全体现出第 3A 亚阶段的典型特征。毫不夸张地说，它揭示了一个真正的发现，即通过边之间的平行性来判断内切三角形的相似关系。在之前的水平上，这些特征只可以在少数超乎寻常的案例中可以看到。而且对于这一点来说，在第 2B 亚阶段，既没有出现对平行关系的隐含的构造，也没有有意识地注意到它。而在这一阶段，它不仅以最显明的方式被构造出来了，而且被系统地运用到了所有的情境中。当然，这只适用于真的步入了这一阶段的儿童，而不适用于像米克或梅特这样处在这一阶段边缘的儿童。

这种对平行关系迅速的推广和应用与在第十一章中讲到的菱形的仿射变换完全相一致，这也会在下一章中对于垂直和水平坐标的构造中看到。这样的过程也包含两个有趣的观察，其一是关于知觉与思维的关系，其二与相似性本身的规律有关。

至于第一点，有趣的是我们发现，似乎几乎所有儿童都能在看到之后，在智力上掌握远超出他们能力的平行关系的规律。如果说他们发现了边的平行性和形状的相似性之间的联系，是因为其他不同大小的三角形在知觉上的“变换”越来越精确，这似乎并非完全不合理。如果是这样的话，平行性的概念很可能来源于对平行的知觉。然而，当比较儿童在画内接三角形时和试图在知觉上匹配它们时的反应方式，我们发现情况并非如此。他知道当两个三角形的边平行时，它们是相似的；他说“*我使线倾斜程度相同……然后它们看起来相似*”，而在进行知觉的比较时，他只是会偶然性地意识到平行性。当然，这可以被反对：这只适用于内接三角形，而平行性是直接以两条等距直线作为一般规则的知觉出现的。但这似乎是一个非常值得怀疑的论点。儿童很少使用等距来表示平行性；而且这有充分的理由：因为这样做本身是使以平行性为前提来进行测量

的，而且等距是一个比定性的或"广泛"的平行性这一概念高级得多的度量概念。在这一阶段，儿童更常把"方向的相同"看作是表示平行的一种方式；正如内尔所说，"*保持……正确的方向*"，尤其像梅特所说的"*当这些线以同样的方式被放置*"。现在，保持方向的相同并不需要知觉的参与，而需要可逆的动作。从我们通过瞄准练习构造直线的讨论中可以明显看出这一点（第六章，第一节）。同时，正是这一首次发现的与直线有关的操作，促成了平行线的建构。

此外，在看到第十一章中7岁或8岁以下的儿童在知觉或绘制斜平行线上有困难之后，我们不得不承认，事实上，是在某种程度上调节知觉的操作格式，而不仅仅是知觉，负责平行观念的发展。当然，如果回到与感觉运动机制有关的知觉活动与对平行性的最初粗糙知觉这两者之间的原始关系，那么我们很可能会在更早的阶段发现这一点。

更有趣的是，我们注意到，通过当前的实验方法，我们发现儿童倾向于根据三角形的边的平行性（以及如我们刚刚所说的操作性的平行性），而没有明确提及角度相等这一概念来认识三角形的相似性。因此，我们必须假定，对他们而言，这种角度的相等性是从边的平行性中派生出来的。更确切地说，这两种观点并不被视为相互独立的，他们首先注意到的是平行性。只有两个儿童会谈论角度。洛和布鲁说，要使两个三角形相似，"相邻边之间的距离必须一样细，且倾斜相同程度"或"手臂必须展开相同的量"。同时他们没有尝试测量此角度，并对确保侧面与模型平行感到满意。因此，我们看到了通过操作建构形成的从直线到平行线再到相似三角形角度相等这一系列概念。使用第二种方法（叠加）得到的实验结果将使我们能够在以后继续进行这样的分析。

至于内接矩形，它们与三角形形成了一种令人遗憾的对比，因为与前一阶段相比几乎看不到任何进展。这是因为矩形的相似性需要一些关于尺寸比例的知识，而仅仅通过边的平行性来识别三角形的相似性，只需依赖于一些基本的定性操作。

在一些模板矩形中，我们画出了一条对角线，认为这样可以帮助儿童认识图形的相似性。然而，很明显，在这一阶段，共同对角线的意义仍然完全没有被理解。如果说有儿童确实理解它，那也只是在事件之后；也就是说，作为选择相似的图形进行比较的结果，而非作为指导选择过程的手段（参见马特和梅伊的实例与梅尔和布鲁的实例）。原因很明显，他们还不能将矩形分割成一对相似的三角形，尽管共同的对角线似乎有利于进行这样的知觉。

就三角形边之间的平行性而言，现阶段和下一阶段没有什么区别。然而，除此之外，也开始了从单纯的定性相似性判断到对尺寸比例理解的过渡。这里采取的形式是比较相应对边的长度、知觉比例的开始，以及发现某些简单的度量关系，比如1:2。其中最后一个点有助于解决涉及矩形的简单问题，而现在一些儿童可以使用对角线来进行建构。

以下是一些第3B亚阶段的例子。

蒙(9;5) 通过平行于模型的边来移动尺子成功地扩大了等边三角形，然后喊到，“*噢！你也可以测量！*”他看到模型的底边和侧边的长度是3 cm，给定的底边线长6cm。在这之后，他检查了他的作图看边长是否也是6 cm。他对底边3 cm、1.7 cm的三角形也做了同样的操作。但是对于底边3 cm、侧边6 cm的三角形，他直接进行了测量，并且将其扩大了两倍。他说“*它不会这样的，这太高了*”，并且继续检查边是否与模型平行，直到他自己觉得满意。

视觉比较产生了一个临界值是5 cm的错误。

矩形的扩大。蒙马上就开始测量1.5 cm × 3 cm的模型：“你为什么要测量它？——*否则我不应该让它足够宽。如果我将宽度保留为小一点的1.5 cm，它将会变成不同的形状(当长度增加时)*。”他成功地将模板精确地扩大了两倍，但是对于更大的扩大他只是用眼粗略地进行。

视觉比较：小的负错误。当一系列的长方形中出现一对正方形的时候，蒙不由自主地画了一条对角线，“*我在看角落是否一个接一个得走上顶端(=彼此在一条线上)*。”另一方面，它起初在画内切长方形的时候没有注意到对角线。“这条线有什么目的吗？——*是的，你可以分辨它做了一个好的交叉，还是不好的交叉*。”

乌尔斯(9;11) 依然只是通过使边平行来扩大三角形。但是对于底边3 cm、侧边6 cm的模型来说，他说，“*要辨别边是否倾斜了正确的角度更困难了*。”当注意到给定的底边线是模型的两倍长时，他继续测量边长。他满足于利用平行线的方法来处理除1:2之外的比例。

他没有测量长方形，并且在扩大的过程中将宽度估计得过大。然而，在视觉比较中出现了相反的情况。另一方面，当给他看有对角线的内切长方形时，他有了一个发现；“*噢！当它正确时刚刚触碰到了线……现在这很简单，我只需要看看线(对角线)是否接触到了角*。”

圭(10;4) 被给予了一个边长是3 cm和4 cm的不规则三角形，它有所倾斜并画在了纸的角落里。边以虚线的形式被画出，其中短边从顶点出发有9 cm(增加了6 cm的长度)。“请给我画一个与小的形状相同只是更大些的。——*我会测量的。小的是3 cm，大的是9 cm，那么另一条边我也需要9 cm*(画了线)。——这样对吗？——*不，它应该是平行的*(他通过肉眼画了大三角形的底边)。——很好。现在来试试这个(边长是3 cm和4 cm，大三角形的边长要为8 cm)。——(他量出了8 cm，并且像之前一样测量了其它边。)——这对吗？——*不*(他画了平行的底边)。——你能通过测量找到正确答案吗？——(他测量了两条最初分别是3 cm和4 cm的边，以及扩大后的8 cm的边)*是的，短边是3 cm，所以你要像另外一个一样将它扩大两倍*。——好，这回就对了。现在我打算给你另外一个(边长是3 cm和4 cm，长边要

扩展到12 cm)。——*左边你增加8 cm,所以我也要加8 cm,右边同样*(因此他第三次犯了同样的错误)。——这对吗? ——不,又错了(他测量着)。*如果增加3 cm给短边,它就太短了,所以我要加6 cm,双倍的。*——好,现在有另外一个(边长是3 cm和4 cm,长边扩展到了10 cm)。——(他测量着)*在左边是4加6 cm,所以我要在右边也加上6 cm。*(第四次犯了相同的错误!)——这对吗? ——*不,左边是3 cm。所以我应该加2×3也就是6 cm。*(他像这样画了底边但是发现这并不平行)不,还不行(他又试了几次,3+3+1+0.5 cm。在没有简单比例关系的情况下,通过平行关系凭借经验引导自己)。——这个呢(边长是3 cm和4 cm,短边扩大到9 cm)? ——*在右边你已经加了9 cm,但是左边依然更大(4 cm)所以我要再一次增加*(随后他增加了10 cm,为了不重复增加相同量的错误)。——这够了吗? ——不。——你必须做什么呢? ——(他又一次只是通过平行关系来寻找答案。)"总而言之,通过大量的尝试和错误,他至少掌握了诸如1:2这样的比例概念,但总是最后又回到平行关系上来。

在第一次给每条边增加相同大小之后,诺伊夫(10;4)也成功地将边长为6 cm和4 cm的三角形(长边扩大到了12 cm)扩大到了12 cm和8 cm。"*好,现在我将要把它翻倍。*"然而说完这个,他现在继续将长度翻倍而没有考虑其中的比例关系,或者利用边之间的平行关系,并应用了试误的方法。

雷(10;7) 被给予了一个边长为3 cm和4 cm、短边扩大到6 cm的三角形。他开始也是将另一条边增加了6 cm,但通过观察图形,他意识到这并不成比例。"*你需要再给这条边增加一些*"(4 cm的边),但是除了将其扩大两倍之外,他没能成功地完成这个。实际上,当给出小三角形3 cm和4 cm的侧边及8 cm的扩大量后,他首先将要画图形的每一条边都增加了4 cm,并且此时才意识到了双倍的比例关系。"*两条边都扩大了两倍。*"

以上每一个实例都在表明,在比较三角形和矩形中不等边时,儿童都会有对比例的明显知觉。但这仅在不进行测量或计算的情况下成立。一旦涉及测量,儿童就不能在超过两倍的扩大中继续保持此知觉。对于更大的比例,给每条边增加相等的长度(或者像圭一样,通过补偿的方法,给长边再加上一点)和保持平行性之间的矛盾便出现了,而平行性仍是这一阶段判断相似性的主要依据。

我们现在过渡到一些通过对角线来构建长方形的例子。

瓦耶(9;5) 像前几个儿童一样构建了三角形。给她出示一个矩形时,她没有以测量开始,而是通过不断的试错来纠正她的作图,直到我们给她出示了有对角线的模板:"*我的是错误的,因为对角线没有穿过角。它应该穿过小三角形的角。*"

尼克(9;7)的反应是类似的。"*那条线(对角线)应该穿过大三角形的一个角,因*

为它穿过了小三角形的一个角。"他只是通过画公共的对角线便完成了图形的扩大。

利奥(9;11) 对三角形有着类似的反应,并且将拇指作为尺子来扩大矩形。"这条线有什么用吗?""*没有,它只会使你困惑。*"但是当测完他扩大了两倍的矩形之说,"*你将它扩大两倍时,你必须使它到达一角。如果是相同的*(两个矩形相似),*这条线必须穿过那里*(穿过角)。"

杰(9;10) 开始时的反应与其他人类似,然后他在对角线的帮助下画了一个能包围原图形的长方形。"*我想让它去与线*(*对角线*)*相交。这条线穿过中间就形成了三角形。*"

这一阶段和前一阶段的儿童都用到了同样的方法来确保包围着的三角形的相似性,即画出与模型相平行的边。然而,第3B亚阶段的儿童很快便开始猜想不同的边的长度之间存在着比例关系。因此,在这种情况下,我们可以说比例关系是由定性的相似关系得来的。这个事实尤其值得注意,因为在处理从由一个角的两条边包含的间距概念过渡到与延伸这一间距相关的比例性概念的过渡问题上,我们还将以另一种形式再次见到它。

对于长方形,这个亚阶段的发现与前面所说的知觉和思维之间的关系完全一致。其中最值得注意的是,在发展到能够想到比例概念时,许多儿童仍然无法利用对角线。例如杰,他们没能意识到,对角线把矩形变成了一对三角形,从而便可以把内接矩形的相似性降低到转化为更容易的不仅内接而且有一条共同边的三角形的相似性。只有少数儿童能察觉到这一点。大多数儿童的行为与第2A亚阶段或者甚至是1B亚阶段的儿童行为一样。

我们对此如何解释呢?毫无疑问,这一定与知觉模式相关:矩形的形状太"pregnant",以致很难被分解成一对紧密贴合的三角形。现在,只要儿童能够通过推理过程推断出一对内接矩形是相似的,并通过同时增加外矩形的长度和宽度(从而保持形状不变),他通常就会意识到对角线在无需借助测量便可保证相似性上的重要性,尽管这发生在事件之后。因此,操作性的理解有助于在这种情况下对对角线进行知觉上的分析,正如对三角形边的平行性分析那样。

对于相似矩形的边之间的比例,儿童可以在较简单的情况下将其辨认出来(如比例为1:2;参见利奥),同时,我们将在第二部分中再次回到相似矩形边之间的比例这一点,来处理不同于内接矩形的相邻矩形的匹配问题。

剩下要讨论的是第四阶段,这时儿童不再局限于简单比例的问题,而是可以解决所有的那些在第2B亚阶段只是偶尔被解决的问题。在第三阶段的开始阶段,三角形的相似性通过其边的平行度被加以掌握,而比例这一概念直到第四阶段才被完全掌握,这便使得这一问题更加重要和有趣。然而,为了简洁起见,我们必须把对这一问题的考虑推

迟到第二部分，那时我们将与矩形有关的问题一起再次遇到它。目前，我们只是引用一个例子来说明这些重要特征。

埃(12;0) 被出示一个边长3 cm和4 cm的三角形。我们将短边扩大至9 cm："*所以我必须使这条边扩大两倍加8 cm。*"(他给4 cm的边又加上了8 cm，因此得到了一个边长为9 cm和12 cm的将模板包围起来的相似三角形)——就像这个一样(同样的模型，其长边扩大至8 cm)？——*我就像另外一个一样给它加倍*(这回他只是将边加倍到了6 cm和8 cm)。——就像这样呢(长边扩大到12 cm)？——(就像在第3B亚阶段，他给每条边都加了8 cm。)*噢，这不是正确的！*——那么之后呢？——*8 cm是4 cm的两倍，所以我也要使另外一条边增加两倍；3的二倍是6，再加上3是9 cm。*——那个呢(同样的但是长边扩展到了10 cm)？——*我打算加上7 cm因为它到了10 cm。噢不！天呐！4的2倍是8 cm*(距离10 cm还差2 cm)；*所以这儿*(短边)*是3的两倍，再加上一半，是7.5 cm。*"

因此，很显然，在第3B亚阶段已经被模糊地感知到的比例这一概念，在这之后将以数值比和计算的方式被表达。对于访谈快结束时的圭，处于第3B亚阶段的雷以及已经处于第3A亚阶段更高水平的伊诺，对不等边三角形的比较使他们意识到，必须给较长的边增加更多的长度才能使扩大后的图形仍与模型相似。但是到第四阶段时，这种纯粹定性的比例概念是通过将图的不同部分相互比较而得出的，它将让位于以相等的比率增长的成对的数字比例系统。我们将在这一章的第九节看到这一从在示意图伴随下的广泛相似性到真正的比例这一度量概念的过渡。

第四节　基于角相等的相似三角形，第2A亚阶段：忽略了边的倾斜程度，第2B亚阶段：分析的第一个标志

毋庸置疑，我们会回想起，第二种方法涉及给儿童呈现一组不同形状并需要将它们分类的三角形(见列表，原书第323—325页)。当然，他们完全可以自由地处理剪切过的卡片，特别是通过将它们叠加以便比较角度、平行线、相对尺寸等。利用儿童如何将三角形等概念重新印刻在大脑中的研究结果，有必要去简要梳理一下儿童对于这种较为自由的情境的反应方式。

不用返回到第一阶段(理由已经被给出)，在第2A亚阶段，我们发现儿童仍然是从图形整体上来判断三角形的。他不仔细检查角度，也不尝试叠加或并置图形。当然，在

儿童视为融合的各种关系中,角度是隐含在内的[1];例如,如果两个三角形的高度相等,但有不同的底边,那么角度也会不同。但在这种情况下,判断实际上取决于底座的长度,而不是角度本身。下面是这一层次上的几个例子。

菲尔(5;6) A_2(20 cm×6 cm)和C_1(20 cm×5 cm)的形状[2]是相同的吗? ——*不是*。——为什么不是? ——(他将它们挨着摆开)*不,并不是相同的图形*。——为什么? ——……——那么A_3(15 cm×4.5 cm)和A_2(20 cm×6 cm)呢? ——*不是*。——为什么呢? ——*那个更高一些(A_2)*。——现在看这儿,像这样观察它(他演示了如何将一张卡片重叠在另一张卡片上),并努力找到两张形状相同的卡片。——(他比较了A_3和C_1,然后放弃了A_3,选择了A_2)*这两个(A_2和C_1)*? ——为什么?(他指向了相同的高,并且忽略了不同的底边。)——接下来呢? ——(他选取了F_6和E_3这两个完全相同的,以及其他的,但放弃了F_9,并且说)*不,这更大*。——你看,是有办法发现他们是否匹配的,不是吗?"他指出了尺寸大小和一般的轮廓,但没有指出角度。

基什(6;0) 同样可以辨认出两个全等三角形的相似,但是发现F_2和E_3(7 cm×8 cm)"*在一起更好,因为它们是更宽的*",即使F_2和E_3也是全等的。类似地,他将A_2(20 cm×6 cm)和C_1(20 cm×5 cm)凑成了一对,指向了它们几乎相等的边;"为什么它们在一起? ——*因为这个(边)*。——那么F_2和F_9呢? ——*不*,(指向了边)。"

休(6;0) 类似地,比较了B_1(6.5 cm×50 cm)和B_2(3.25 cm×25 cm)但是没有发现它们是相似的。"*不,它们不会是相似的*。——为什么呢?(他指出了不相等的边)"。我们给他演示了如何去重叠它们,但是他仍没有理解。因此,他认为A_1(30 cm×9.5 cm)和C_1(20 cm×5 cm)应当在一起,只是因为它们都非常尖。他完全忽略了角。

格拉(6;6) 编制了F系列(全等的),但是拒绝把E_3放入,尽管它也是全等的,"*因为这两条边(一个是F系列,一个是E系列)并不是相同长度*。"

显然,所有这些比较都仅仅是基于整体的形状,就算是有基于对细节的搜索,那也是基于边的长度。但正如第二节中所讲到的(例如西拉),这种比较有时足以识别某些图形(如等边三角形)的相似性。这是因为,对于等边三角形或正方形来说,对角度大小或边长度的过高或过低估计带来的误差往往会因其本身的对称性而加以抵消;正是这种自动补偿赋予了这些图形格式塔的性质。[3]但除了这种相当特殊的等边三角形,这些

---

① 参见"英文译者注"。

② 字母和数字例如(A_2)参见给出的清单。为了使读者更加明了,底边的长度(6)和三角形的高(20)也已经给出了。

③ 参见 Piaeget 和 Lambercier."Tansposition perceptived et transitité opératoire," *Arch. de Psychol.*, XXXI, nO. No.124.

很容易让儿童自我满足的整体上的比较无法带来任何准确的形状换位。

这是一个值得强调的观点，因为它非常清楚地表明，除那些本身对称性很强的图形之外，知觉换位不足以帮助我们识别其他的相似图形。对于角度、边长、高底比，以及我们现在可以加上的对倾斜度的估计，知觉的准确性总是受到误差的制约。等边三角形是一个例外，因为这些误差可以在静态下被中和，但在其他类型的三角形中，它们产生的复合误差太过于复杂以致于无法直接完成对形状的换位。[①]此外，一旦知觉的局限性被抛在后面（其影响对儿童本身仍然未知），处于这一阶段的儿童就很难根据关系的细节来完成比较。当他们试图对一般性的认识加以分析时，便只能着眼于绝对尺寸，如高度、边长等。

在第2B子阶段，我们观察到的反应与研究内接三角形时在相应水平上看到的反应类似。儿童开始注意到边的不同倾斜程度（当三角形都直立时），但对角度本身没有任何程度的察觉。

萨夫(6;9)　将A_1，A_2，A_4和A_5都放在了一起，还有D_2(13 cm × 15 cm，因此不是非常尖锐）和C_1，然后非常细致地对它们进行了比较。“你在找什么？——*我在看每张卡片是不是都被剪得相同*。——那么A_2(20 cm × 6 cm)和D_3(20 cm × 5 cm)在一起吗？——*不，因为它们没有相同的形状*。——为什么没有？——*这个(A3)更倾斜*。——那这个呢(A_1，30 cm × 9.5 cm)和这个(C_1，20 cm × 5 cm)？”他不能做出选择

允(6;9)　将F_2和D_2放在了一起，然后又将它们分开了：“*不，它们不能放在一起*。——为什么不能？——*我说不出来*。——那么F_5和F_4呢？——*可以的*。——那么F_6，F_7，E_3呢？都全等吗？——*不是的*。——为了看它们能不能放在一起，你做了什么呢？——*我看倾斜的一边*。”我们随后向他展示了如何将它们重叠在一起，但是没有取得任何效果。

格拉斯(6;10)　将F系列（全等的）的全都集中了起来，并且没有把E_1放在一起，“*因为它的两边不是相同的*。——那么A_1(30 cm × 9.5 cm)和D_3(26 cm × 15 cm)在一起会比A_1和A_2在一起更好吗？——*不，因为A_1和A_2同样狭窄*（正确）。——那么C_1(20 cm × 15 cm)呢？——*同样的*（他没有考虑倾斜的确切程度和底边的宽度）。”

巴尔(7;11)　“你能把形状相同的集中起来吗？——*那些大一点或者小一点的吗？*——不，是形状相同的。——[他选择了A_1，A_2和D_3(20 cm × 15 cm)]*那些*(A_1和A_2)*在一起更好*（他尝试将D_2和D_3放在一起，然后又将他们分开了）。*那个*(D_2)*更小一些*。”他对F系列做到了，但是排除了F_9，“*因为它更宽*（不正确），*并且不是很陡峭*（正确）。”我们向他展示了如何将它们重叠在一起，同时他检查了顶角，尽管不

① 这也许会引起争议，确实是这样，这样的知觉错误总是与比例关系（相对中心化定律）联系在一起，同样可以在真正相似的图形的情况下进行转换。然而，像许多不同的误差是根据统计规律而不是那些控制操作组合的误差一样，它们的总效应总是或多或少具有随机性。

是很精确。另一方面，他成功地发现了基本关系："哪个角度更大呢(顶角)？B_1 (6.5 cm×50 cm)还是C_3(20 cm×50 cm)？——*那个(B_1)，因为它更窄，看起来也更长。*"他因此通过高度和宽度的比例来判断了角，这正预示着第三阶段的到来(尽管"大"这个词有独特的意义)。

这些反应中包含的估计有时不准确，有时部分准确。一方面，后者让人联想到同一阶段记录的与内接三角形(第二节)相关的比较，那时儿童们只是想知道边是否或多或少有所"倾斜"(萨夫、允)。然而，一个不同于边之间平行性的新的标准正在出现。这就是三角形更大或更小的"薄度"(格拉斯、巴尔)，它不再仅仅与边本身有关，而是与它们之间的间距有关。它直接引起了对角度本身的考虑，这一点在我们目前的方法中变得越来越重要，并最终将其结果与第一种方法的结果区分开来。但它仍然或多或少地与第一种标准没有区别，并只是带来了非常近似的估计，直到我们开始设计巴尔所提到的关系，而这便引出了第三阶段。

因此，这一新标准的出现是一个非常重要的事件，因为它标志着一个全新的三角形之间相似性概念发展的起点，即基于角度的相等性而非基于边之间的平行性。这便是它的重要性所在，因为这一概念预示着新操作类型的发展。

平行性和倾斜直线的概念迟早会带来正交坐标系的发展，而它正是估计倾斜直线倾角所必需的参考系。但是，也可以通过被判断为平行的单向线和垂直于相交的尺寸轴来获得同样的建构。在第十三章处理物理上的坐标系时，我们将更仔细地研究这种基于多维对应关系类型的运算。也就是说，它们起源于通过一对一对应的逻辑上的增加。

另一方面，对由顶角从零开始的同一个角两边的不同间距的考虑将带来不同类型的对应，这便不再是一对一对应，而是一对多对应。[①]正是这种操作，这一阶段的儿童在谈到三角形"薄度"时从直觉上体现的正是这种操作类型，而它也在第三阶段开始得到发展。

第五节　基于角相等的相似三角形，第3A亚阶段和第3B亚阶段：对角度分析的进步

第二阶段的比较是直观的和知觉的，也仍然基于对图形整体上的认识并与三角形

① 参见"英文译者注"。

边的绝对长度有关。由于两种发展的同时进行,第三阶段有着一个明显的进展变化。第一个发展是对纸板图形自发性的叠加,这是一个涉及可逆动作并完全可操作的过程。第二个发展源自于第一个发展,是对角度的相等并不依赖于图形侧面长度这一认识的发现。[①]

以下是一些第3A亚阶段的例子。在这个阶段中,双重转换将会出现。

本(7;7) 处于第2B亚阶段和第3A亚阶段之间的中间水平,他为自己找到了重叠这一方法,并有时运用其来比较角度(因此呈现出了不同于第三阶段的特征),但同时也经常满足于仅仅比较边的长度。他被展示了一套所有的三角形,并被要求,"将所有形状相同的三角形收集起来。——[他立刻把A_2(20 cm×6 cm)放在了D_3(26 cm×15 cm)上)]*它们不适合*。——为什么?——*那一个*(D_3)*太突出了*(*到边上*)。(他试了试与A_2相似的A_1)。*它太长了*。[他拿起D_3(13 cm×15 cm)和A_3(15 cm×4.5 cm)并且看到了一个图形的底边与另一个高度相等(15 cm×15 cm),但是却说]:*它们的形状不同*。——那么A_2(20 cm×6 cm)和A_3(15 cm×4.5 cm)呢?——(他把它们重叠在一起并且试图使边缘对齐)*它们不行,因为它们的长度不同*。"我们对此进行了询问,并且让他进行重复。"*噢,是的*。(在A_2和A_3的基础上他又添加了A_4和A_5,然后又添加了D_1,)*不,这个D_1并不是这里倾斜的*(他比较了D_3和B_2)。*不,那个*(B_2)*比那个*(D_3)*更直些*(他研究了底边,并且拿起了C_3和C_2,说),*它们的形状不一样*。——为什么?——*我在比较它们顶上的角*。——那么D_2呢?——*它不行*。——C_3和E_2呢?——*它们应当在一起*。——C_2和C_3呢?——*那个*(C_3)*更倾斜一些*。——你总是要看一看顶角吗?——*你可以看边*。——C_3和A_1呢?——*它们不会放在一起,这个太尖了*。——那么C_1和A_1呢?——*它们可以在一起*(他将它们进行了重叠并且匹配了右下角)。*不,这个重叠了*。"

斯坦(7;6) 在对所有图形进行了检查之后,他挑出了D_3和C_2。"*它们不会被放在一起*(他看了看边),*这个*(D_3)*还不够大,另一个则太大了*。——那么E_3和F_2呢?——*它们确实形状相同。这个有一点小,但是与大的形状是相同的*。——那么C_2和D_2呢?——*是的*,它们有相同的形状(他主动地把重叠把它们重叠在一起)。——那么F_2和D_2呢?它们比D_2和C_2更相配还是不如它们?——*它们更加相配*(F_2,D_2)。——那么F_1和F_2呢?——*大小不同,但形状相同*。——那么,C_2和B_1呢?——*不,那个*(B_1)*不如另外一个尖,而且比另外一个宽*。——那么,D_1和B_1呢?——*是的,它们是相同的*。——那么F_2呢?——*不,它太宽了*。(他将A_1,A_2,A_3,A_4,A_5放在了一起,并放弃了D_3)——你是如何判断的?——*我看图形有多尖*。——你在测量什么?——*那个*(他在量重叠的角)。——那这两个(E_1,E_4),它

① 当图形的大小差别不大时,人们也会发现它们偶尔会叠加在底部的中线上,同时注意到了边的平行性。

们正确吗？——不(正确)。——那么C_2和C_3呢？——不是特别好。那个(C_3)在底端更宽(正确)。——那么，B_1和B_2呢？——那个(B_1)更小一些，但是形状相同。——那么(D_2和B_2)像(B_1和B_2)那样匹配吗？——不是，那个(D_2)没有那么尖。”他以同样的方式继续进行着，并比较了F_5和F_7。“是的，它们可以，因为那三个角相等。——那么，F_5和F_9呢？——不，那个(F_9)太倾斜了。角必须一样。”

维(8;0)　“(A_1和A_3)？——第一个非常高，第二个顶端很小(=是钝角)。——那F_6呢？它与F_1形状相同吗？——它更小。——是的，但是形状相同吗？——是的。那个(F_4)也是。”他随后将A_2放在了A_1和A_3之间，并且以重叠的方式检查了它们的相似性。随后他试了试并放弃了C_1，“因为它高度相同，却太宽了。”

赫尔(8;9)　“E_5和F_4呢？——是的，它们形状相同。——为什么？——它们同样的尖。——B_3和A_2呢？——不，长度(底边)和高度不同。——你能按照系列和相似性将这些形状排列起来吗？——可以。”他整理了B系列，随后整理出了A系列，并从A系列中先拿出后移去了D_3，并换成了被他主动放在了A_1上的C_1。

舍(9;3)　先整理出了F系列，随后是B系列。“我能看到它们形状相同——如何做到的？——它们的尖锐程度相同。——那么D_1也是如此吗？——不，它的倾斜程度不同。——C_2和C_3呢？——不，那距离必须是相同的。——什么距离？——(他指向了边之间的间距)——要使两个形状相同，我们要使什么相同？——角。——那A_1和A_2为什么相同呢？——因为它们都是三角形。——怎么讲？——它们每条边的倾斜程度相同(等腰)。

显然，所有这些儿童都可以很好地在不考虑边的长度的情况下比较图形中包含的角度。我们现在要探索的是，他们是如何做到这一点的，它的发展是长期而复杂的。因此，在相似性这一概念下，不同于对角度的测量，角度这一概念本身便不是普通知觉的产物。

在本的例子中，正是重叠这一方法(他很快发现的一种技巧)指导了他的选择。因此他发现，当把一个三角形放在另一个三角形上，一个三角形的角就会凸出去，否则边的倾斜程度就会不同。尽管他经常被“诱惑”来测量边的长度，但最终还是学会了比较“角”本身。斯坦从比较边的长度开始，正如在第二阶段，但他随后发现了“形状”的相似性。他的例子很有趣，因为他试图将三角形或多或少的“尖”这一外观特征与底边的长度联系起来。这相当于隐含地认识到对一对多对应的需要，因为发散两边之间的延长间隔会相互比较至底边(这是表示两边之间的间隔的平行线中的最后一条)。因此，他同时比较了属于两个三角形中每一个的“三个角”，从而得出了其中一个三角形“较小，但形状相同”的结论。

维也用了同样的方法。他首先比较了顶角，然后比较了高度和底部之间的关系，例如在他的叙述中“它高度相同，但更宽”，这表达了一个一对多对应。赫尔以“尖锐程度”

这一概念为开端,并结束于底边和高的比例。在最初比较了倾斜度之后,舍用了很久的时间才意识到"你必须保持距离不变",也就是三角形的宽度(或两边之间的间隔)沿高度在一个给定点上,这正是一对多对应的精确表达。

因此可以看出,除了本满足于只涉及角度,其他所有的儿童都努力从角的连续宽度之间的一对多对应来确定叠加三角形之间的相似度,换句话说,也就是通过该顶点相对于底的"尖锐度",或通过三角形的高度与底的比例。

到了第3B亚阶段,到目前为止还不确定且为试探性的儿童的反应达到了一个稳定的状态。通过对运用方法I(叠加)和方法I(内接三角形)所得到的结果加以比较,可以说,直到第3B亚阶段,基于角度相等的三角形的相似性还没有被完全掌握,而基于边平行性的相似性到第三阶段第一亚阶段已经被掌握。也就是说,角度之间的相等性需要经历一个被发现的过程。

下面是一些第3B亚阶段的例子。

奥格(9;3) 通过重叠右手边更低的角和检查左手边的边之间的平行关系,对A_1和A_2进行了比较。"*这更小,但形状相同。*"随后他通过重叠顶点和其中一条边将A系列组织了起来,并以同样的方式比较了F系列。"所有的角必须都在一起吗?——*是的。*——你必须对它们三个全部都进行测量吗?——*不,一个或两个就已经足够了。*——那么F_5和F_8呢?——*它们是相匹配的。*——你看了几个角?——*你已经测量了两个角。*——那第三个角呢?——*没有必要。*——为什么没有必要?——*只要我测量这个和那个作用就可以了。*"

巴德(9;10) "F_5和F_4在一起吗?——*是的,但是其中一个比另外一个更大。*——你是如何准确分辨的?——(他首先将F4的底边靠在F_5的一边上,然后重叠它们,使底边与边长的一部分一致,并且注意到了平行关系)——F_4和F_9可以在一起吗?——*不,根本不能。*——A_2和A_3呢?——(他从顶角开始重叠它们)*尖锐程度是一样的。*——其他的角度相同吗?——*相同。*——那么A_1和C_1呢?——(他重叠了它们的顶角)*不,它们不是恰好相配。*——为什么?——*那个更长*(=底边不平行)。"

罗儿(10;0) 将B_1和B_2放到了一组,又将A系列前四个添了进去,并比较了D_3和C_1的顶角,随后又将它们分开。接下来他通过一次重叠两个将F系列的前5个同时放在了一起。在重叠一个角之后他将D_3和C_2分开,并且通过检查更低的右下角重建了A系列。"你必须测量一些角吗?——你必须测量那三个角,而这是你可以测量的全部。"

罗姆(10;0)想到了其他方面。在对A系列和F系列都分组后,他说:"*你必须测量两个角。*——*那里的三个*(等边的)*呢?*——*一个就够啦。*"

多拜(10;0) 首先通过眼睛将图形分了组,然后比较了D_2和D_3的顶角,并且

说:“*它们不匹配。——为什么?——它们的倾斜度不同。*(随后他拿了两个F系列的图形,使顶角重合,且指出其底边是平行的)*是的,这刚刚好,这个条状*(当顶角重合时两条底边的间距)*不论在哪都是相同的*(=同样的宽度或者是平行的)。*你必须要有一个相同的角和一个相等的条状。*”随后他将这个方法应用到每对中。“如果你要确定是否合适,你需要测量几个角呢?——*一个*。——那么(F_5和F_9,其中后者不是等腰三角形)?——*不,它们在底部不平行*(=当顶角重合时的F_5和F_9的底边)。”

纬尔(10;9)　仍然是以重叠三角形的顶角为开端来检查相似性的,“那么(C_2和F_7)?——*不,因为两边走向不同。*”在比较A系列的两个图形时,他也说了相同的话。“那么(F_5和F_9)?——*是的,它们在同一组*。(他重叠了都是60°的顶角,并注意到了底边不平行)*不,它们不像*。——你怎么判断两个三角形的形状是否相同呢?——*通过这三个角*。——你必须要测量全部的三个角吗?——*是的,全部的三个角*。”

希尔(10;11)　正相反,他谈及A_2和A_3:“*这以同样的方式变得更窄,这里它是平行的*(底边,当顶角重合的时候)。——当你观察角的时候,你需要测量多少?——*三个;不,两个,因为第三个显然是相等的。*”

这些反应与第3A亚阶段的反应之间的差异正是稳定状态与导致该状态的状态之间的差异。现在,儿童不再逐步找出决定角度并将它们联系在一起的关系,而是几乎立即将注意力集中在这种安排的结果上,并以此来比较角度。有些儿童(比如奥格、罗姆、希尔)甚至已经发现比较两个角就已足够,第三个角显然是相等的。

就儿童在掌握角这一概念以及基于角度相等的相似三角形这一概念的方式而言,这一水平上的发现正证实了前一水平的结论。最简单的方法是注意到,当图形被叠加时,角的两边相重合。现在,巴德向我们展示了这一操作与使边之间平行的操作之间的联系。首先,他通过使其中一个图形的底边与另一个的底边部分重合并确保两边平行,对检查F_4和F_5之间相似性进行了检验。此外,他还通过使A_1和C_1的顶点重合,并观察到底边不平行来说明A_1和C_1不相似。这相当于通过将平行这一法则应用于与被判断为相等角度的边将“角度相等”和“边之间平行”这两个概念有机地融合在一个操作整体中。

多拜在注意到相等角度的边在叠加时会重合之后发现了相同的方法。他能够把这个想法表述为一个命题,大意是,如果一个角度相等,对边平行,那么三角形是相似的:“你必须有一个相等的角度和一个相等的条带。”这一“条带”分隔了角度两侧的平行边。在对泰勒定理一无所知,也不知道几何学家在没有数值关系的情况下如何使用它来定义比例的情况下,这些儿童对相似三角形的认识是建立在非常相似的构造基础上的,该构造已经包含了比例概念的萌芽。

现在,让我们来试着阐述这个概念下的操作机制。这一儿童的发现可以以这样的

方式被总结：如果第一个三角形的两边 A_1 和 A_2，决定了底边 A，则当两个三角形相似时，第二个三角形的边 B_1（$=A_1-A_1'$，其中 A_1' 是 A_1 和 B_1 的差距）和 B_2（$=A_2-A_2'$，其中 A_2' 是 A_2 和 B_2 的差距）决定了底边 B 平行于 A。但是为了掌握这一关系，儿童必须意识到 A_1' 和 A_2' 是 A_1 和 A_2 的延伸，换句话说，要看到 A_1 与 B_1 及 A_2 与 B_2 相同倾斜程度与底边 A 和 B 平行这两者之间存在的必然联系。因此，存在这样的问题，即以这样的方式对倾斜度和平行度的定性关系进行分组，以明确这一事实，即通过保持恒定的倾斜度，顶角的两边决定了将它们分开的间隔的恒定增加。然后，这些间隔可以表示为长度增加的线，彼此平行，并且每一条线形成一个新的三角形的底边，这一三角形与前面的三角形相似，并且包围前面的三角形。这样的构造引起了对 A_1' 和 A_2' 之间或者 A_1' 和 A_1 之间，以及 A_2' 是 A_2 之间的比例性的认识（这正是泰勒斯定理所说的），尽管这些比例早在它们可以用数值比率的形式来表示之前就被察觉到了。

这正是我们在本章第三节中介绍的在第3B亚阶段的儿童（如圭、若哈、伊诺，他们早在第3A亚阶段即组合了这对关系）身上看到的探索比例关系的质性方法。

这一事实清晰地表明，在几何概念出现之前，全局性的"分组[①]"就已经出现了。它甚至在广泛的量化出现之前。在纯粹的逻辑和集中的框架中，这一过程只不过是一个一对多对应的复杂分组。[②]因此，有 $\downarrow A_1 \times \downarrow A_2 = \underleftarrow{\ } A \underrightarrow{\ }$，$\downarrow B_1 \times \downarrow B_2 = \underleftarrow{\ } B \underrightarrow{\ }$，其中当 A_1 是 B_1 的一部分，并且 A_2 是 B_2 相对应的一部分时，A'_1（$=B_1-A_2$）和 A'_2（$=B_2-A_2$）之间存在着对应关系。在这样的情况下，便有了对称的间隔关系即 B 与 B_1、B_2 的关系，就像 A 与 A_1、A_2 的关系一样，这构成了能够产生相似性的逻辑结构。然而，这些所有一对多的对应最终都会以量化（或广泛地）的方式表现出来，而这正是能够让比例在角缓慢张开时保持不变的关键一步，也让它转变为真正的比例，即一个度量的而不仅仅是逻辑上的概念。

但是相似这一概念何时被定义并转变为度量上的比例呢？比例这一概念已经在刚刚分析的建构中以量化的形式被呈现出来，而在现阶段这一水平上，在一些简单情形（如第三节）中它也以度量的形式出现。然而，直到第四阶段，它才会被广泛地阐述和加以应用。我们将在第二部分看到这一点。[③]

---

① 对于"分组"的概念，见我们的工作，*Classes, Relations et Nombres, Essai surles 'groupments' de la Logistique et la Réversibilité de la Pensée*, Paris, 1942。

② 出处同前，第五章。

③ 我们已经在第三节的末尾给出了一个关于三角形的处于第四阶段的例子。

第二部分　长方形的相似

对儿童如何建立相似三角形关系的研究完成了我们研究的第一部分。在此过程中,我们看到,在第3A亚阶段已经掌握了平行线这一概念的基础上,儿童是如何发现当三角形的边平行时,它们是相似的。从这一点出发,儿童继而发现它们的角度也是相等的,并得出了比例这一概念。平行性的研究也可以被用在我们现在要进行的研究矩形的相似性上。但是,它的目的并非要证明已经论述过的内容,而是要完成本章开始概述的任务,即检验"知觉换位"和操作相似性之间的关系。

通过让儿童将封闭三角形画出来(第二节和第三节)并对其进行视觉上的比较,我们发现在知觉判断和画图之间存在着一定的联系。但是存在怎样的联系呢?是知觉转换的发展控制着智力上理解的发展吗(或相反)?还是两个过程是完全独立的?为了得到这一问题的答案,研究长方形的相似性是有意义的,因为一方面长方形的情形要比三角形更简单,因为它所有的角都是直角;另一方面,它也更复杂,因为长与宽的比例必须在儿童没有可依赖的在角度上的相关变化时被估计。

在第一部分中我们已经得出了一些关于内切长方形的信息。然而,我们现在关注的问题更广泛,不仅仅包含内切的图形,而且还有分开的长方形。通过比较在第一部分得到的新数据,我们希望能够解决关于知觉换位和操作性相似之间的关系这一问题。

第六节　方法和一般结果

这里采用的方法可能是最简单的,并且包含了以下要点。

1.知觉的比较。在不同的纸上,每一页上都有和练习册形状一样的矩形,其中一个水平,且大小为1.5cm×3.0cm,还有一些宽度相等(4cm),但长度从6cm到15cm不等的更大的矩形。标准化的图形和相比较的图形以随机的序列同时呈现。我们只是询问大的是否和小的"看起来一样"(或者是比前一个相似性更多或者更少),尤其是它是否"具有同样的形状,而只是大一些"。对于最小的儿童,我们问"小的那个的父亲是哪一个?"并且最像它。为了帮助儿童理解任务,可以用一个放大镜来放大图形而不改变它的形状。最重要的是避免给儿童一个增大是与某一个维度相联系的暗示,也要避免给出它会同时影响两个维度这样的直接建议。较小儿童在这一问题上会遇到困难,但对自身

是相当有益的。

为了使边的比较更简单，我们通常呈现的是只有两条线在直角(∟)处的图形，其中直角的形状与矩形四角角度相同，因此我们称之为“半矩形”。尽管儿童还不总是理解这样的相似性，但这样做在保持相对宽松的定义上有明显的好处，即儿童们理解这些粗略想法的方式会给我们理解正在进行的发展一些启示。判断相等的临界值以cm为单位来计算，错误的程度也与8cm的长度成比例(正确的测量)，在这之下取负，在这之上取正。

2.做图的建构。我们呈现出了1.5cm×3.0cm同样大小的模型，并且要求儿童在另一张纸上去画长方形，儿童用“盒子”“方形”或者自己选择的任何其他叫法，它与模型形状相同但更大一些。儿童或可避免建议任意特定大小或可用之前的基线为基础固定特定长度(是标准的两倍、三倍或多倍)

通常我们在这个过程的一开始，先分发一些不同的菱形，它们成对排列，一大一小，每个形状相似。它们有的高和宽完全相同，有的不同。当形状之间有明显的差异时，各个年龄段的儿童就很容易对它们进行分类，而这一过程有助于他们更清楚地抓住问题的关键。随后，我们想知道在菱形中识别相似性是否比在矩形中更容易，并进行了一些系统的实验来检验这一观点。但是，限于篇幅，我们只能将这些内容顺便提及。

这项实验的结果非常有趣，既体现在对已有图形的知觉的比较上，也体现在儿童开始扩大标准图形的方式上。但我们一开始就应当理解，知觉和智力在这两种行为中都得到了体现。如果儿童选择的样本图只表现了他的知觉能力，而他的作图则表现了他对事物的智力把握，那么知觉与比例的操作概念化之间的关系无疑会简单得多。事实上，我们只能说，在视觉比较中，知觉因素或多或少地占主导地位，而在作图中，智力似乎在不同程度上占据了上风。

当一个只涉及知觉的实验在儿童身上进行时，实验对象无疑会将他们的知觉反应转化为语言或概念，但这两种反应都相当准确地表现了知觉，因为“大”或“小”这两个词对儿童和实验者的意义或多或少是相同的(尽管“相同”所表达的相等判断需要有所保留)。与此相反，当儿童看着两张对比图形，说“它们是同一个形状的”或“它可以”等时，他远不止只是将自己的知觉转化为估计，而是对自己的知觉做出估计。事实上，“同一形状”这一概念是对现有知觉数据的复杂解释，因此它是一种智能行为，并能够随着儿童长大而扩大其意义范围。

然而，很明显，在作图样本中间做出选择时，智力是由知觉支配的，尽管后者是用“自由”而不是“逐字”的方式被翻译的。因此，在这种情况下，我们将谈到知觉上的估计。另一方面，对于在放大过程中必须通过测量或比较而保持不变形状的图形，正是智能在控制着知觉，因此我们可以把它称为智能建构。“知觉估计”与“智力建构”的关系可以从这一实验的原始数据中得出，而要得出知觉与智力的实际关系，我们则必须通过推论来进行。当然，这可以被理解为这两种情况都涉及这种关系。

我们现在来继续描述连续的发展阶段。总共有三个阶段,其中第一阶段由于不具备实验的可能性而被忽略。每一个阶段都以三种不同形式来标记在知觉估计和智力建构之间的交互作用。

在第二阶段,知觉估计和图画之间的差别很小或没有差别。在这一水平上,一般的趋势是当比较矩形实际上太长时,将其判断为与标准图形相似,从而估计误差为正。根据儿童的思维方式,相对于高度来说,长方形越长,长方形就越大。因此,对于整体形状来说,这里存在一个普遍的转换,从某种意义上说,它只是一种改变或改进,而不是相对大小的真正转换。这对应于一个知觉过程,它仍然是全局的或融合的,而分析仍然是不完整的,并且只涉及一个维度,在这里即长度。[①]在儿童作画时,他所运用的逻辑过程通常也局限在试图再现他所认为的长方形的本质,即一个拉长的正方形上。因此,儿童的画也倾向于夸大他想要放大的矩形的长度。当它们被以正确比例被放大后,儿童认为后者太高并想把它缩短。他不想测量这个图形,并且任何试图说服他这样做的尝试都完全失败了。比例的概念对他来说似乎意义不大,他也很难理解自己应该做什么,尽管他很擅长整理形状相差很大的菱形。

第三阶段开始于自发的测量尝试,大约在7或8岁时出现。可能是由于比例引起的特殊问题,在这一阶段有一个有趣的现象,即知觉估计出现在作图之前,并且似乎指导了作图,或者至少对作图给予了很大的帮助(我们必须强调,这并不意味着只涉及一个简单的知觉或智力行为)。在知觉估计中,负的错误现在超过了正的错误(基于长度),或者至少比之前占据更为重要的地位。知觉开始作为包含尺寸比例和整体形状的调节过程发挥作用,前者在长度上的独有的中心化由宽度上的相对应的去中心化抵消。这一阶段大致可分为两个亚阶段,它们更多是在程度上存在差别而非在种类上,尽管在极端形式上无疑是非常不同的。

在这些亚阶段中的第一个亚阶段,中心化似乎在长度和宽度之间交替,去中心化的倾向仍然是无意识的。同时,儿童似乎试图同时考虑到这两个维度,从而有意识地进行比较。关于作图的心理过程,如前所述,第三阶段开始尝试测量。但这些尝试之所以失败,正是因为儿童还没有意识到涉及的关键因素是比例而不是绝对大小的增加,这使得矩形的长度继续被夸大,正如第二阶段一样。在第3B亚阶段,长度和高度都增加,使得通过向每个维度添加相等的量来获得正确的比例。因此,儿童发现他的知觉估计值与他的计算结果不一致,所以改变了建构以适应他的知觉印象。只有在比例为1:2的简单情况下,给出的答案才是正确的。

最后,在第四阶段,知觉判断相对于建构性思维的相对优势被逆转,因为随着儿童开始理解比例性的本质,他的思维逐渐独立于知觉,并最终反过来影响它。

---

① 在不那么常见的案例中,如果长度被没有过度估计,那么被夸大的就是高度。

第七节 第二阶段(4—5岁至7—8岁):全局的比较导致对长度的过度估计

如前所述,同样类型的反应在第二阶段通过知觉估计或智力建构而获得。这一过程中发挥作用的是一个定性化的、整体的形状,而不是比例这一概念,而儿童的注意力主要集中在长方形的长度上。同样的结果也出现在长边垂直的图形上。

让(5;1) 研究了菱形的集合。"它们是混合起来的。我想让你拿出一个大的和一个小的,但是它们必须是相似的。——(他将一个大一点的和一个小一点的组成了一对儿,但没有注意到它们的形状。)——你可以做得更好吗(它们被重新混合了)?——(让现在将每一个大的菱形放在了小的菱形的对面,每一对形状都相似,没有出现任何错误)——你为什么这样放置?——*因为它们的形状相同*。"

现在将一个1.5 cm×3 cm的模型长方形放置在桌子上,并给他看了一个4 cm×6 cm的放大版。"它们形状相同吗?——*不,它们不适合,它们的形状不同*。——这个呢(4 cm×12 cm)?——*有一点像,但还是太大*。——那这个呢(4 cm×7 cm)?——*这几乎是方形了,所以一点也不像*。——(4 cm×11 cm)?——*哪个更好?*——不全是吗?——(让看了看模型,当然这个模型一直都可以看到。)——*不,不完全*。——为什么?——*它应该像这样*(指向了那个大小4 cm×12 cm的图形)。——那这个(4 cm×20 cm)呢?——*是的*。"

接下来我们给他看了"半矩形"的模型,它一边长3 cm,另一边长1.5 cm。"这个是相同的形状吗(4cm×6cm)?——*不,它更高一些*(指向了短边)。——这个(4 cm×10 cm)呢?——*这个还不错。这个相当大了*(再一次指向了短边,并且将它高度裁去了一半),*像这样,但还是比模型大一些*(2 cm>1.5 cm)——这个(4 cm×17 cm)呢?——*这个还不错,但它还是比模型要大*。(他再一次指向了短边)*这是相同的形状。它会很合适的*。——(4 cm×9 cm)这个呢?——*不,那里更高一些*(他挡住了短边,将它减到了2 cm×9 cm)这样就不错。"

最后,我们来画完整的矩形。"我想让你画一个形状和那个(1.5 cm×3 cm)一样但更大的矩形。——(他画了一个2 cm×14 cm的)*这有点太大了*。(他将它纠正到大约1.5 cm×14 cm,其宽度是与模型的宽度一致)*现在它足够大了*。——那正确吗?形状确实一样吗?——*是的,形状一样*,只是大了一些。"我们给她画了一个底边长7.5 cm的。让画了一个7.5 cm×1.5 cm的长方形,"*我将它们画成了大小相同的*。"

皮耶(5;3) 也是从画出一系列随机的菱形开始,正如让一样,并结束于对它们进行一个正确的排列。

一开始他发现那些4 cm×6 cm、4 cm×2 cm和4 cm×7 cm的图形“*都不错*”。“那两个里面哪一个是最好的(4 cm×8 cm)和(4 cm×12 cm)?——*那一个*(4 cm×12 cm),*因为它更大*。——那一个(4 cm×4 cm)呢?——*不,它是方形,它必须要像这样*(他指向了模型)。——这个(4 cm×11.5 cm)呢?——*那个也可以*。——那么这两个(4 cm×8.5 cm和4 cm×10.5 cm)中哪一个更好?——*那一个*(4 cm×10.5 cm),*因为它更长*。——这些呢(4 cm×8.5 cm和4 cm×10 cm)?——*那一个*(4 cm×10 cm)。——那么(4cm×9cm和4cm×9.5cm)?——*那一个*(4 cm×9.5 cm)。——为什么不是另一个?——*因为它太高了*。(他指向了4 cm的宽!)——那(4 cm×8 cm)和(4 cm×6 cm)呢?——*4 cm×8 cm的这个更好*(很惊讶,正确的比例),*另一个太高了*。——它们不是同样的高度吗?——*这个会更好一些*(4 cm×8 cm)。——这些(4 cm×8 cm和4 cm×12 cm)呢?——*那一个(4 cm×12 cm)更好,因为它不像这个一样高*。”

半矩形:“*(4 cm×8 cm)很好,(4 cm×10 cm)太高了*。”最好的看来是2.5 cm×8.5 cm的,“*因为它们必须是像这个(1.5 cm×3 cm)的*。”

画矩形:他开始画了各种各样的长方形。当他意识到1.5 cm×3 cm的模型图是一个“小宝宝”,他必须画一个同样形状的“父亲”后,他画出了一个4.5 cm×13 cm的长方形,当超过4厘米,他觉得太长了。

贝尔(5;5)　第一次尝试时就将菱形正确排列了。

矩形:在首次比较的时候,向他展示了标准矩形和4 cm×8 cm的矩形。“*是的,这可以*(他在一系列矩形中看到了4 cm×12 cm的矩形并不由地说),*就是这个,没错*。——那个(4 cm×8.5 cm)呢?——*它不行,它太宽了*。”但是(4 cm×11.5 cm)和(4 cm×10.5 cm)“*和模型形状一样*”。在(4 cm×10 cm)和(4 cm×12 cm)两者中,他选择了后者。“*另一个几乎正确,但是有一些太高*。——那(4 cm×20 cm)呢?——*它比另一个更合适*(4 cm×12 cm)。”

对半矩形有相同的表现。

对矩形的作图:贝尔将他的复制品的高大致扩大了一倍,并且画了一条大约17 cm的底边,并且说,“*你在这儿放置了同样的大小*(在宽度上,因此大约是3 cm)*并且使长度更长了*。”

马尔(6;6)　第一次尝试时就将菱形正确排列了。“为什么将它们放在一起?——*因为它们看起来很像*。”但是对于1.5 cm×3 cm的矩形,与(4 cm×6 cm)相比,他更喜欢(4 cm×12 cm),“*因为它更长*。”成比例地扩大(4 cm×8 cm),“*可以,但是还有一些短*。”马尔会认可最多到4 cm×20 cm的矩形,但是在这再大的话“*它就太长了*”。

他画了一个2 cm×20 cm的图形,“*这是相同的图形,只不过更大一些*。”

我们没有必要继续举例下去了。我们已经获得了很多在5岁至7岁,甚至到8岁2个月和8岁6个月(甚至有一个9岁1个月)这样年龄段儿童的案例。这一阶段的反应是

简单且直接的。在知觉比较中涉及的换位只影响图形的定性化的形状，而忽略了相对维度。即使是形状也只是以概念化的形式进行转置。只要稍加研究，这一事实就会变得显而易见。仿佛很多的线索都给我们留下了这样的印象：儿童正在区分两类相关的图形，一类是矩形，它每条边不相等；另一类是正方形，其每条边相等或大致相等。

因此，我们发现让拒绝了带有短边的矩形(4 cm×7 cm)，说"*它几乎是正方形的，所以它根本不是同一个形状*"。当模版图被转换成一个更大的图形时，儿童似乎在寻找(在"相同形状"这一口头描述下)一个属于同一类的矩形而不是正方形，而这基于他对矩形的概念也是"更好的"；也就是说，在长度和宽度之间的差异方面更为典型。

因此，很明显，我们不是在处理一个纯粹的知觉上的现象。通过将当前的结果与内接三角形(第二节)的结果进行比较后，我们发现，尽管之前的比较是在处在可变图形范围内的标准图形帮助下进行的，但在相同的水平上，对图形的估计同样较差，只是在第2B亚阶段略有改善。

另一方面，内切矩形(独立的矩形更是如此)的相似性引发了特殊的问题，因为长方形的角总是不变的，而与大小和比例的变化无关。这意味着对图形的分析必须基于维度间的关系。高度h必须与长度l相比较，并且比率h_1/l_1必须与h_2/l_2相比较，以便得到等式$h_1/l_1=h_2/l_2$。

因此，除了概念上的，这些错误还必须涉及知觉上的因素，所以，如果这一知觉上的现象可以从概念性的过程中分离出来，那么相等的门槛很可能会更大，而矩形的准确度比三角形低。即便如此，1.5 cm×3 cm矩形的转置临界值的变化似乎也不太可能延伸至3 cm×20 cm，更不用说再进一步了。因此，上述所记录的知觉估计不太可能仅仅是知觉的结果。因此，我们必须得出这样的结论：由于维度关系的知觉转换在这一水平上是极其困难的，因此它被补充，甚至在某种程度上被替换为对定性的、整体形状的转换，以及在本讨论开始时所指出的意义上的概念化形状的转换。从这个角度来看，儿童在增加长度的同时却忘了按比例增加高度的反应是完全可以理解的。

此外，我们应该注意到在其他领域中，儿童很难让较复杂的知觉换位发挥作用。因此，不同高度的转换$B-A=D-C$(其中$C=B$，且两对要素AB与CD存在几cm的间隔)对于五岁儿童来说几乎是不可能做到的，因为他根本没有理解涉及到的关系。从6—8岁开始，如果表示差异(A和B)的标准保持不变，则在换位时的差异会显著减少；另一方面，如果元素A和B在每次估计之后被移除，然后在儿童不知道它们是相同的情况下被替换，则转置将变得更加准确。[①]这类似于我们目前对矩形进行的实验，儿童似乎无法在知觉上转换维度关系，尽管他们的错误要比成年人的错误更大。然而更确切地说，他们的知觉受一种知觉活动的支配，这种知觉活动由智力以一种相当粗糙的方式所控制，在

① 见 Piaget和Lamber cier, M."La comparasion des differences de hauter," *Arch. de psychol.*, 1953, 54, pp.73-107.

这一意义上,正方形和矩形之间的差别仍然很粗糙。

还应注意的是,这种知觉估计不是基于逻辑推理,而是基于自动调节的过程。当儿童夸大矩形的长度时,[①]他不会像通常在推理过程中检查的那样,通过取消或反转矩形来纠正错误,而是减少了误差本身的夸大。因此事实上太长(超过15或20 cm)的矩形在他看来太薄了,并且校正通过部分补偿的方式进行。

因此,毫不奇怪,在绘制过程中的建构性思维导致了类似的结果。首先,因为同样的概念因素在知觉估计中起作用,以刚才描述的方式指导儿童的知觉活动;它在作图的制作中也自由独立地起作用。其次,一旦绘制出图形,它对最终估计值的知觉影响与第一类实验中使用的比较图形相同。在这两种情况下,儿童都会受到在伸长不同上得以区别于正方形的矩形的典型影响。因此,为了扩大模型,他努力构建尽可能长的图形。因此,在建构性思维方面存在一个简单的重复,这在知觉估计(有别于直接的知觉)中已经被注意到。

可能有人认为,幼儿对长方形长度的夸大是由于一个简单的知觉错误造成的,在这种情况下,直接感知会导致图画的长度减少而不是增加,因为它在观看标准时被高估了。为了确定不是这种情况,我们进行了以下实验作为对照。

Mlle. Prinzhou 呈现了一系列矩形(长度为6 cm、高度1.5 cm到2.5 cm不等;高度2 cm、宽度4.5到7.5 cm不等)给17个5—7岁、14个9—11岁的儿童和10个成人,让他们估计了前者的相关长度和后者的相关高度。

结果符合对大小对比现象的预期,所有受试者包括儿童和成人都认为1.5 cm×6 cm的矩形比2.5 cm×6 cm的矩形要长,4.5 cm×2 cm的矩形比7.5 cm×2 cm的矩形高。一般来说,随着年龄的增长,错误会变得不那么明显。此外,一些7岁以下的受试者非常清楚地认识到外在维度之间的关系。艾尔(4;6)说,"*那个更长,因为它更薄*",德恩(5;6)说"*更宽的那个没有那么长,更瘦的那个更长一些*",等等,当然这并不意味着他们在进行知觉转换时会一直意识到这一关系。

这些结果似乎表明,在长方形扩大的过程中,长方形的长度被夸大的原因不仅仅是知觉。如果不是这样,产生这种效果的幼儿和保持正确比例的成年人之间的差异,也会在估计大小上非常相近的图形的比例时重复出现。我们只能说,与成年人相比,年幼的儿童在知觉转换上不如成年人熟练,他们倾向于通过一种基于虚幻概念(知觉估计)的建构来补充这一机制的运作,这实际上是知觉活动的一个方面,其效果已经被我们之前描述过。

因此,迄今为止所看到的反应的最显著特征是知觉判断和建构性思维的进化水平之间的同步。在其他领域,正如儿童自发地逐步掌握测量(见 *La Géométrie Spontanée*),知觉从一开始就领先于智力,并控制它,直至发生智力开始支配知觉活动的逆转。然而,在目前的情况下,维度比较关系问题需要智力的直接参与来辅助知觉活动,使得知

① 由于心理上的而非感知上的中心化,因为否则标准的长度只会被感知上高估而导致一个负错误。

觉比较和作图在第二阶段仍处于同一发展水平。

在这一点上，早先有人注意到，在三角形的情况下，通过作图对形状进行知觉比较和放大要比在矩形的情况下容易一些。对于三角形，定性的整体形状更容易识别，因为在不同的情况下，三条边的角度和倾斜程度是不同的。但是对于矩形，边的角度和倾斜度保持不变，因此比较必须仅基于成对相等的四条边之间的尺寸关系。这就增加了将矩形与菱形进行比较的可能性，因为这种形状也有四条边成对相等，但在角度和倾斜度方面存在差异。在初步的实验中，所有的儿童都可以把一个大菱形和一个形状相似的小菱形配对，只要两个形状有明显的不同。但是，如果对上述矩形的实验系统地应用于菱形，则发现当形状差异仍然很小时，儿童在第二阶段之前无法通过考虑倾斜来识别相似的菱形，这就证实了第十一章中有关对图形中对边平行的相关发现。读者无疑会谅解我们没有对这一系列的实验进行报告，这些实验实际上是作为对照来进行的。

第八节　第三阶段：在知觉比较而非在作图中维度关系的直觉转换

在这一点上，比例性出现在知觉比较的领域。我们将在适当的时候研究其原因，但不太可能完全依赖于知觉本身。然而，在作图和建构性思维领域，儿童仍然夸大他正在扩大的矩形的长度（第3A亚阶段）。或者，尽管他现在试图考虑这两个维度。但除了简单的比率（图1—2），他仍无法在没有乘法模式（第3B亚阶段）的情况下找到正确的答案。

以下是一些第3A亚阶段的例子：

迪亚（7;3）　被展示了标准矩形（1.5 cm × 3 cm）和放大版（4 cm × 8 cm）：“*这是同样的，只不过形状上大一些。*——这个呢（4 cm × 12 cm）？——*这个不好，它太长了。*——（4 cm × 6 cm）？——*这个可以。*——（9 cm × 7 cm）？——*这个也可以。*——这个呢（4cm × 11cm）？——*这个太大，太长了。*——（4 cm × 8.5 cm）？——*这个可以。*——（4 cm × 10.5 cm）？——*太长了。*——（4cm × 9 cm）？——*可以。*——（4 cm × 10 cm）？——*有点太长了。*——（4 cm × 9.5 cm）？——*也是。*”因此，他可以接受从4 cm × 6 cm到4 cm × 9 cm不同的形状，其临界值是3 cm，并有0.5 cm的恒定负误差，这意味着误差是知觉上的而非直觉上的。这一临界值最终有所下降。

半矩形：他首先接受了4 cm × 10 cm，但是经过几次试验后，他只接受了从4 cm × 7 cm到4 cm × 8.5 cm的。

画矩形：“你打算以更大的尺寸画它（1.5 cm × 3 cm）吗？——*是的*（画一个2.5 cm × 8 cm的）。——它正确吗？——*是的。*——你这么确定？——*是的。*——我将会给你一条线（7 cm的底边）作为起始。现在将它完成。——（他将宽画成了

1.5 cm 到 2 cm，与模板相似。)”在方形纸上他仍然给同一个模型画了 6 cm×21 cm 大小的。“为什么是 6 cm？——*它是高*。——为什么是 21 cm？——*它是长*。——如果你画的是 20 cm 呢？——*那会更好，因为它会是一个方形*。——那么现在再次开始。——(他将图形画成了 6 cm×12 cm，然后加了两个方形使它成为 6 cm×14 cm。)——你为什么加了两个呢？——*这样将会更大*。”

埃瑞(8;0)　在知觉估计时选择了从 4 cm×6 cm 到 4 cm×8.5 cm 的图形，放弃了比此大的图形。

在没有测量的情况下他建构了 3 cm×8 cm 的长方形。在方形的纸上，他画了一个 6 cm×20 cm 的。给出他一个底边是 24 cm 的方形，他使边长有了 4 个方形那么高。

西姆(9;7)　知觉上的估计：他接受了从 4 cm×7 cm 到 4 cm×9 cm 大小的图形，其临界值是 2 cm，没有误差。

画图：在使用了尺子但没有进行任何精确测量的情况下，他画了 3 cm 的一边，长为 17 cm。“你是使这一长度与尺子全长一样吗？——*你必须给高度增加一些 4 或 5 cm，或者就 4 cm*。”

雷恩(10;6)　在知觉估计上获得的临界值是 1 cm，没有一致的误差。

画图：他正确地测量了宽，并不变地进行了转换之后，给长增加了 3 cm。

以下是一些第 3B 亚阶段的例子：

马尔(7;6)　知觉上的比较：临界值是 1 cm(4 cm×7.5 cm—4 cm×8.5 cm)。他因为“*太长*”或“*太高*”拒绝了其余图。

画图：在没有测量的情况下，他构建了一个 5 cm×11.5 cm 的长方形，然后在第 3A 亚阶段后对它进行了扩大。随后我们给他看了一个 2 cm×4 cm 在方纸上的模板图。他在两个方向上对它进行了考虑，把长宽都加倍并画出了一个 6 cm×8 cm 的图形，说：“*我考虑到了你的图形中的方形，并且使他变得更大并且正确。我在上面和边上增加了两个方形*。——为什么是两个呢？——(他尝试表达 6−4=2。)”

克洛(9;6)　知觉上的比较产生了一个 1.5 cm 的临界值和一个小的负错误(0.25 cm)。对于对比图形(4 cm×8 cm)，他说，“*这个一样，只不过更大一些。我看了大的那个的高，然后看了小的高。我发现他们相同，只不过大一些*。”

绘图：在一个更大的纸张上，他画了一个 8 cm 的底边，然后在 3.5 cm 到 4.5 cm 宽度之间犹豫。他与标准图比较了好几次，但是没有进行测量。最后他选择了 4 cm。此时，他突然意识到“*4 是 8 的一半，这意味着这是正确的*”。然后我们给了他 1.5 cm×4 cm 的模板图。他进行了测量并且画了一个 1.5 cm×8 cm 的图：“*我测量了第一个，它是 4* cm，*所以我给它又加了 4* cm。*然后我测量了高，它是 1.5* cm，*所以我将它放在这里*。”他也将高扩大了一倍。“你是让它扩大一倍至 4 cm×8 cm 吗？——(他画了一个

1.5 cm×16 cm 的长方形，因此，又回到了最开始的错误，后来又用视觉进行了改正。)”

赫尔(9;8) 做出了与知觉上的比较相似的反应。画图：他被给予了一个标准矩形(1.5 cm×3 cm)，“*我必须将长和宽画成两倍大*(即3 cm×6 cm)。”我们给他一个10cm的底边以此作为起始，并且测量中点，将图形画成5 cm×10 cm；“*我估计是高的一半因为它与模型一样*。”但是给了他3 cm×5 cm的图形时，他也是采用了1:2的比例(5 cm×10 cm)。然后他继续测量长和高之间的绝对差异(5−3=2)并且给两边都加上它，得到了一个5 cm×7 cm的矩形。这一次他用肉眼进行了矫正。

杰姆(10;2) 他的知觉上的估计一开始并不是十分准确，但是之后他检查它们时同时考虑到了两个维度，“*再长一点也再高一点*”“*不要这么长但是要高一些*”等等，并且对于半矩形来说达到了一个高水平的精确程度(临界值少于0.5 cm)。

画图：他使1.5 cm×3 cm的图形扩大两倍至3 cm×6 cm。“你不能将它画成其它样子吗？——*不，可以将它扩大三倍*(将它画成了4.5 cm×9 cm)。——那么用到这个呢(10 cm的底边)？——*现在我们要看看多出了多少*(他标记出了模版底的两倍即6 cm)。*不，还剩下了一些……它应该被扩大至原来的三到四倍*。”在这一点上，他又给每条边加了相同的量，并且给高和底都增加了4 cm。

贝尔(10;5) 知觉上的估计与杰姆相似。画图：“*我准备将它扩大一倍*(把1.5 cm×3 cm扩大至3 cm×6 cm)。——但是你可以将它画得大一些。——*是的，扩大许多倍。你可以将它扩大至三倍，*(*画了6 cm×12 cm*)*我将它扩大到了四倍大*。——这个呢(4 cm×7 cm)？——(他给每条边都加了1 cm。)——你没发现它过于宽了吗？——*当它再大时就会留下那样的印象！*——那么(2 cm×5 cm)呢？——(他再一次给所有的边都加上了相等的量。)*那很让人苦恼…….让我们来增加2 cm……它看起来有一点窄*(*那个模型*)*……如果我可以将它剪下来，并且放进我的画里。它应该在中间，这样你可以看到在每一条边上多出的一点量*。

第三阶段的这些例子引发了关于对比例的知觉是如何与比例这一概念的产生相联系起来的有趣问题。

从知觉上的比较开始，这些儿童与第二阶段儿童之间的鲜明对比是最显著的特征。后者在虚幻观念的支配下，没有足够多实现换位的方法，把矩形拉长得不成比例。但是在第3A亚阶段的儿童能够转换这一图形，并保持相关维度相当精确的准确。知觉上的临界值在不断下降，并且最重要的是，在实验过程(将迪亚对矩形的估计值与他随后对半矩形的估计值进行比较)中也是如此，这表明知觉上的调控有越来越大的影响。事实上，错误往往会变成负值，这表明现阶段的过高估计是知觉上的，而不是出于直觉的。根据解释这些错觉类型的相对中心化定律，[①]矩形的长度具有减小其表面宽度的效

① 见 Piaget. J.,“Interprétation probabiliste la lio de Weber et de celle des centrations relatives,” *Arch. de Psychol.*, *Vol.* XXX.

果,因此长度本身往往会被高估。因此,当儿童认为长度比实际长度大时,他倾向于选择过于短的矩形(因为他高估了它们的长度)。因此,负的错误是儿童把注意力集中在长度上而不是宽度上的结果。

另一方面,在第二阶段,在长度上中心化的倾向是基于直觉而非知觉上的,并倾向于增加长度而不是宽度,这决不是纯粹的知觉现象。在第3B亚阶段中经常出现的负的错误足以表明,这些儿童的知觉估计较少受到先验经验的影响(在直觉性中心化的方向上),并更接近真正的换位。然而,我们必须认识到这一进步的原因,因为它是新的并标志着与第二阶段所表现的趋势的背离,这显然是由于知觉活动本身的改进,从而影响到更成熟的思维对准确地转换一个图形的能力。

在第3B亚阶段,除了两个新的特征外,知觉上的反应基本与第3A亚阶段相似。它们的准确性略有提高,更重要的是,在实际进行比较时,对长度和宽度的认识有所提高(在这一点上,如果马尔显得有点落后,那么克洛、杰姆和贝尔的陈述则具有启发意义),这里再次证明,智力扮演着积极的角色,同时知觉的转换伴随着真正的操作性比较。

然而,如果我们把目光转向同一个儿童的作图作品,显然,与知觉的估计相比,这些作品并没有多少进步。在第3A亚阶段的儿童都会任意地绘制他们的图画,把长方形的长度超出比例地延长,就像在第二阶段一样(特别见迪亚的评论),并且只有随后的知觉估计而不是对比例的任何推理才能使他们纠正图画。尽管儿童很快学会了将标准尺寸二倍或三倍化,甚至改变1:2的比例,但这种反应仍然可以在第3B亚阶段(开始时)马尔的例子中被看到。但超过这个比例,他们就完全不明白了,并减少到向每边增加相等的数量,好像1.5+2×3+2与1.5×3成比例似的。再一次,正是对结果图的知觉估计,使他们能够基于经验地纠正错误。

这就提出了这样一个问题:为什么在整个第三阶段,知觉上的估计领先于智力建构,而在第二阶段,这两项活动处于同一发展水平。但这一问题所暗示的说法是否与我们先前的发现不一致呢?因为在第六章和第十一章关于直线和平行线的论述中,我们指出,在解决这些问题时,知觉并不先于操作性思维,而是以操作思维为指导。此外,所提到的案例正处于发展的同一阶段,即第3A亚阶段的开始。

实际上这并非真正的相互矛盾,因为对比例的操作处理是从知觉估计的水平开始的,而不是在更难掌握的智力建构水平上实现的;因为它处理的是无形的内容。在较低的层次上,有意识的比较是基于具体的数据,因而是成功的;而在智力建构的层次上,有意识的比较则依赖于想象的建构,而想象的建构是对实际的图形的预期,因此更难进行。

当然,我们必须认识到,尺寸判断和比例判断、两种尺寸的简单比较(正如儿童自发的开始测量)和四种尺寸的双重比较($h_1/l_1=h_2/l_2$,其中h和l分别是长方形的高和长)之间的区别,是尺寸关系的简单视觉"转换(transfer)"和"换位(transposition)"之间的区别。

眼球移动引起的"转移"是一种相对基本的知觉反应,而"转位"是"知觉活动"(见第一章第一节)的一部分。后者较前者是一个更高一级的复杂过程,至少涉及一般的尺寸

或几何比例，而不仅仅是形状。[1]

因此，毫不奇怪，在第二阶段，矩形的知觉换位只适用于整体形状。如果在第三阶段，这种原始和扭曲的过程变得相对准确，那是因为融合的知觉估计被对图形的真实分析所取代。也就是说，这两组维度是以一种智能和有意识的方式进行比较的，尽管它们还不能一起考虑，而只能分开考虑。因此，如前所述，区别于第二阶段和第三阶段的知觉的发展只能是由于不同于简单知觉的"知觉活动"的锐化或重复；简言之，是由于第3B亚二阶段特有的运作机制的演变。

因此，对矩形来说，作为知觉层面上比例概念来源的维度换位，似乎是思维对知觉活动相互影响的直接结果，而思维已具有可操作性，并能够从两个维度进行简单的比较。现在，尽管这种情况看起来有些复杂，但这并不真正与以下事实相矛盾：在建构性思维领域，儿童仍然无法绘制出对总体比例有任何智力理解的图画。事实上，在知觉估计的水平上，智力比较的开始可以简单地解释为，假设儿童一旦达到基本的、具体的操作的水平，他就不能在没有自发从两个矩形两边h和l进行比较的情况下，同时知觉两个矩形$h_1 \times l_1$和$h_2 \times l_2$，尽管此时他还不能对这一定性的双重关系给出操作性的表达。

如果长方形的一条边(h)比另外一条边(l)要短，那么在扩大的矩形中这条边的伸长(即$h'=h_2-h_1$)与另外相应一条边的伸长(即$l'=l_2-l_1$)是一致的。比较图形的多样使他能够发现，在这些图中有一个矩形的边有$h_2 \times l_2$，将它与小矩形$h_1 \times l_1$比较时，它们高度和长度之间的差值(分别为h'和l')有$h' < l'$，这也正与$h_1 < l_1$及$h_2 < l_2$相一致。他正是会选择这一矩形来作为具有相同形状的矩形。

另一方面，当同一儿童面对通过画图来扩大长方形这一问题时，在没有作为引导的知觉模型的帮助下，他就不能在增加量h'和l'之间得出任何令人满意的关系。尽管他感觉到$h' < l'$就像$h_1 \times l_1$一样，他也不能探明l'比h'究竟大多少，以致他丢失了这些增长量不同这一感觉，或者开始想象对不同尺寸增加相等量等同于成比例的增加。

在这一联系中，研究儿童扩大图形时所采用的不同方法是极有启发意义的。这样的研究帮助我们清楚地洞察了比例概念的起源及其相对于知觉换位的地位。在第3A亚阶段，增加量h'与l'仍然是很任意的(正如迪亚只是说"就是这样")，同时增加量l'要比h'大得多。但从第3B亚阶段的开始，我们可以归纳出四种不同类型的反应。1.儿童将相同的绝对量($h'=l$)无差别地添加到h和l这两边，例如杰姆(直到最后)和贝尔(给每条边都加上了1 cm)。2.儿童测量了h和l的差值，并将它转化到他正在构建的矩形的边上；例如马尔，他给4×6 cm的矩形增加2 cm，因为6−4=2；赫尔通过5−3=2 cm的转化，将5 cm×3 cm变为7 cm×5 cm。3.儿童发现了在给定的长方形中有$h=l/2$，并且始终保持了1:2这一比例，尽管这个解决办法并不适用于其它长方形(例如克洛和赫尔)。4.对于

① 非常有趣的是简单的知觉遵循着比例的规律(韦伯定律，相对中心化定律等等)，而"知觉活动"需要意识到比例，而这在发展更为基础的阶段上是不能被意识到的。

其余的,将矩形的两条边扩大两倍、三倍、四倍来完成扩大就已足够。这样可以得到正确答案,但这并不能使儿童解决给定底边的问题。更进一步的说,那些当 h/l 等于1/2时发现解决办法的儿童并没有总是将其应用到其它比例中(例如,贝尔有比例4:7)。最后,所有的儿童都会根据经验来修正他们的尝试,或者想要获得一些视觉上的证据,比如贝尔希望他能"把模型放进他的图画里"。

我们可以沿着第一个回答依次至第四个回答来看这一过程。每个儿童开始都注意到标准矩形的长度 l_1 大于其高度 h',或者 $h_1' < l_1$。这引出了三个术语即 h_1、l_1 及它们的差值 D。在第二阶段(以及第3A亚阶段),矩形的扩大仅仅包含增加量 l_1(开始于第二阶段),或者增加它远超 h_1。因此,在这一水平上,比例性这一概念根本没有被理解。

而这一理解开始于儿童意识到了 h 和 l 是相互关联变化的,正是差值 $D(hl)$ 才是保持不变的(第3A亚阶段的知觉估计,第3B亚阶段的绘图)。但在一开始儿童将这一差值视为一个绝对不变的量。直到后来他才将它视为一个相对不变量,即一个不变的比例。因此,包括增加 h_1 和 l_1 的特殊的反应(1)和(2),要么增加量相等,即给 h_1 加上 h_1',给 l_1 加上 l_1',其中有 $h_1'=l_1'$,要么给 h_1 和 l_1 加上它们的差值本身,即 $D(hl)$。这两种方法都相当于将 $D(h_1l_1)$ 视为绝对不变的量。解决方法(3)由解决方法(2)演化而来:当儿童注意到在标准矩形中,差值 $D(h_1l_1)$ 与宽度 h_1 相等,所以有 $l_1=2h_1$ 或者 $h_1=l_1/2$。在 h 和 l 之间的比例为简单的1:2时,儿童继续有了关键发现,即D(hl)不是一个绝对的值,而是一个比例,即 $D(hl)=h/l$,所以在画更大矩形 $h_2 \times l_2$ 时,它使 $h_2=h_1+h_1$,$l_2=l_1+l_1$。但是这一观念还不够稳固,以致当给儿童看 $h<1/2$ 的矩形时,他又回到了让 $l_2=2l$ 以及 $h_2=2h$,或者像赫尔一样,又退回到了解决方法(2)。同时,解决方法(3)自身有了一般化,例如 $h_2=3h$,$l_2=3l$ 或者 $h_2=4h$,$l_2=4l$(解决方法4),尽管在这一阶段这样的一般化并不充分,并且当l不是简单的由对h的乘法得来时,儿童又退回到了解决方法(1)和(2)(例如贝尔)。

总之,第3B亚阶段在绘图上的一个显著特征就是对差值 $D(hl)$ 的持续发现:一开始被视为是绝对量 $D=l-h$,然后被视为相对的即 $D(hl)=h/l$,尽管这仅仅在一些简单的情形如 h=1/2,1/3或1/4,并没有扩展到所有的情形中。

在第三阶段中知觉换位要领先于作图和运算思维的原因此时应当很清楚了。克洛说"我看了大一点图形的高,然后看了小一点图形的长"。因此,当心理比较的进步能够引导儿童比较高度(h_1 和 h_2)和长度(l_1 和 l_2),知觉上的"转化(transfer)"或者"移动(removal)"可以使他看到 h_1h_2,并同时可以看到增加量(或差值)h';对 l_1l_2 和 l' 也是如此。由于知觉本身始终遵循着比例定律(韦伯定律,相关集中化定律等),当增加量 h_1' 与 l_1' 被视为在与 h_1/l_1 及 h_2/l_2 相同比例的 h_1'/l_1' 中,智慧引导下的对两个维度自动的视觉分析导致了均衡。显然,这是一种与第二阶段完全不同的状态。那时,儿童只关注对一个单独维度例如长度的比较。

而在第三阶段,知觉估计便是儿童意识到比例性这一事实的证据,尽管直到第3B

亚阶段，儿童才能设想这样操作性的运算关系，并且只是在简单的情形中。

第九节　第四阶段：操作性比例的一般化

当发现了扩大后的矩形$h_2 \times l_2$一定有与小矩形$h_1 \times l_1$相同的比例h_2/l_2且不论l_1是h_1的两倍三倍或四倍后，第四阶段的儿童开始使这个相当粗糙的比例这一概念一般化。他们现在开始将长度和高度的差值即$D(h_1)$视为一个恒定的比例h/l而非如之前那样视作一个恒定值，并在更复杂的片段中应用它。

毕尔（10;11）　开始以临界值为 2 cm 做知觉上的比较，但最终只接受了对于 1.5 cm × 3 cm 的标准矩形从 4 cm × 7.5 cm 到 4 cm × 8 cm 的扩大化矩形。

做图：他很快就测量了 1.5 cm 和 3 cm 的边，并将它们翻倍形成了一个 3 cm × 6 cm 的矩形。然后我们给了他一个 2 cm × 5 cm 的模版图并要求他在 10 cm 的底边上进行扩大。"*你不能将它（长度）分成两部分（相等的），因为它是 5 cm……但是那(l_1)是 5 cm，那(l_2)是 10 cm，所以那(h_2)是 2 cm × 2 cm=4 cm。*"被给予一个新的底边后，他说："*如果你画了 12.5 cm，那就有 2.5 cm × 5 cm(=l_1)，并且我会画了 2.5 cm × 2 cm(=h_1)。我将它缩短半厘米使长度变为 12 cm，对高度做同样的操作，这样变为 4.5 cm。*"因此他在成倍增加比例的基础上讨论，同时就像在第三阶段中那样减掉了相同的量

达恩（11;0）　通过一系列的调整和修正来进行知觉的比较。作图：对于 1.5 cm × 3 cm 的长方形，他立刻画了一个 2.5 cm × 5 cm 的图形。"你为什么这样做呢？——*我取了一半，因为我看到它是一半。*——如果长度是 10 cm 呢？——*我画 5 cm（高度）。*——那么，这个呢（3 cm × 5 cm）？——（他画了 6 cm × 8 cm，随后 5 cm × 8 cm）你是怎么做出的？——*开始我认为宽度是长度的四分之三，然后我发现它太多了所以我取掉了 1 cm（普通的估计）。*——（给了他一个 10 cm 的底边）——（画了一个 6cm 的高并说）*模版是 3cm（高度），从 3 到 5 增加了 2，从 6 到 10 是 2 它的 2 倍*［因此他将差值$D(hl)$扩大了一倍，因为l_2是l_1的两倍］——那么你对 15 cm 会做什么？——*我将会把它扩大三倍，因为 9 到 15 差 6 cm，3 到 5 差 2 cm，6=3 × 2。*"因此达恩在差值$D(h_1l_1)$的基础上进行了推理，但将它视为了恒定的比例即$D(h_1l_1)=h/l$。

安德（12;1）　知觉的估计与达恩一样。做图：（1.5 cm × 3 cm）。他画了一个 3 cm × 6 cm 的。"*我把它加倍了。*——那这个呢（2 cm × 4 cm，在一个 10 cm 的底边上）？——*高度必须是 5，因为它是 10 的一半。*——但你是怎样做的？——*我取 4，让它成了两倍（对于 10 厘米长），还剩下 2 cm。我取 2 cm(=h_1)，让它成了两倍并剩下 1，这就成了 5。（在模型上）2(=h_1)是 4 cm(=l_1)的一半，1 cm 是 2 cm 的一半*（1 和 2 是刚才他提到过的两个剩下的）。*它是对的，因为 1 是 2 的一半。*——你为什么需

*要一半？——否则剩下的就不同了。”*换句话说，那剩下的 R 被定义为 $R_1=l_2-2l_1$，$R_2=h_2-2h_1$，并且有 $R_1/R_1=l/h$!

对于基于 12 cm 的底边的 3 cm × 5 cm 的模版。他计算出 12:5=2.4，然后犹豫了一下，计算 2.4 × 3 得到了 7.2。

这些有趣的例子表明在得到正确答案的过程中，儿童将在第 3B 亚阶段发现的方法进行了一般化，至少对比率 1:2 如此（见毕尔的例子，他正确地领会了这一方法，尽管他的方法中有一些第 3B 亚阶段的痕迹）。同时达恩和安德的方法更值得我们关注。达恩通过比例 h_1/l_1 将模型高度(h)和长度(l)的差值进行了翻倍，此时，剩余量被定义为 $Rl=l_2-2l_1$，$Rh=h_2-2h_1$。这两个例子完美地表明了从第 3B 亚阶段基于对绝对差值 $D(hl)=l-h$ 分析的错误方法至 $D(hl)$ 在第四阶段成为 h/l 这一比例的过渡。这在一部分的末尾，安德得出了一般化的表述即 $h_1/l_1=n$，这产生了一个成比例的扩大即 $h_2=nh_1$，$l_2=nl_2$，它不再仅仅是定性的而是一个真正的对比例的量化表述。

第十节　结　　论

如果我们想要对从第二阶段至第四阶段的整个发展过程加以总结，我们会发现这一发展以一种既简单又有启发性的方式来进行。为了扩大矩形 $h_1\times l_1$ 并建构一个相似图形 $h_2\times l_2$，第二阶段的儿童开始只关心长度 l_2（它以超出比例的增长方式表现），在这一过程中他要么完全忽略了宽度 h_2，要么只给它增加很小的量。在第三阶段他首先从知觉上（第 3A 亚阶段）然后在真实的作图过程中（第 3B 亚阶段）发现了长度 l_1 和宽度 h_1 的关系。最开始他采取了将差值 $D(hl)=l_1-h_1$ 视为绝对恒定值这一形式，而后转变为 $D(hl)=h_1/l_1$ 这一恒定比例的形式。在已经掌握了像 1:2 这样简单形式的比例后，他继续在第四阶段通过 $h_1/l_1=h_2/l_2$ 表达他对比例性的发现，并把它应用到包括那些不能全部用数字来表达的比例在内的所有例子中。

现在我们必须对从将比例视为一个恒定比例 $D(hl)$ 至一般化的比例这一过渡进行一些解释。我们规定 h' 为 h_1（模板矩形的高）与 h_2（扩大后矩形的高）的差值，l' 为 l_1（模板矩形的长）与 l_2（扩大后矩形的长）的差值。然后我们有 $h'+h_1=h_2$，$l'+l_1=l_2$。但这仅仅是一个源自于包含部分整体这一逻辑的简单定性关系，所以在 $h'+h_1=h_2$ 下，儿童只知道 $h_1 < h_2$，而不知道 h' 与 h_1 的真正关系；对 l_1 与 l_2 也是如此。毋庸置疑他现在可以说“h_1 对于 h_2 正如 l_1 对于 l_2”或者“h' 对于 h_2 正如 l' 对于 l_2”，但与数学上的对应相比，这仅仅是逻辑上的，就像说“马赛之于法国就像那不勒斯之于意大利”，换句话说，即一个整体与部分的双重对比。

但是,第三阶段的特殊发现正在于$D(h_1l_1)$是保持恒定的。在知觉上的判断方面,这样的“恒定”被视为从一开始就有的固定比例,而在作图和建构上,它最开始被理解为一个绝对的比例,而后被视为一个恒定的比例。正是对这一不变关系的发现才使这一逻辑上对部分整体的对应关系得以定量化并因此转化为一个数学上的比例。如果根据$D(h_1l_1)=D(h_2l_2)$有h'对于h_1正如l'对于l_1,且h_1对于h_2正如l_1对于l_2,这意味着实际上h_1是h_2的一部分,这同等程度下等同于l_1是l_2的一部分。因此h_1成为了h_2关于h'的函数,l_1成为了l_2关于l'的函数,并且这两个函数相等,即$h_1/h_2=l_1/l_2$,这又有$h_1/l_1=h_2/l_2=h'/l'$。因此,这一比例的建构恰好是从相同“类型”逻辑的定性上的对应至相同顺序的量化包含或数值上相等的转化。

对矩形中的比例概念的相关探究,①最有趣的发现是它的发展方式与在三角形中(在本章第一部分中有所讨论)完全相同。在那里我们看到在第3B亚阶段(对应于包含关系的逻辑上的对应演化成数学上的比例),对于有边A_1A_2和B_1B_2的两个三角形,有$B_1=A_1+A_1'$(A_1'是两个三角形对应边的差值),$B_2=A_2+A_2'$(A_2'是另一对边的差值),如果底边A和B平行,那么两个三角形相似。乍一眼看去,这个类型的建构和矩形需要的尺寸的建构之间好像并没有什么关系。然而,我们很快会发现,正相反,它们其实是等同的。

我们可以发现,在只考虑矩形四条边中的两条并同时忽略另一组对边的情况下,标准矩形的边h_1和l_1可以被视作三角形两边A_1和A_2。类似地,大矩形的边h_2和l_2也可以比作大三角形的边B_1和B_2,差值A_1'与A_2'比作h'和l'。而在矩形的情形下几何发现的本质正是h'和l'有着与h_1和l_1、h_2和l_2相同的关系,换句话说即$h'/l'=h_1/l_1=h_2/l_2$。从纯粹的图形角度来看,如果说两条从同一点开始的直线呈现出了某种关系,这意味着它们的末端可以通过第三条线连接起来。因此,A_1和A_2之间的关系正是直线A,它构成了第一个三角形的底边。类似地,B_1和B_2之间的关系正是直线B,它构成了第二个三角形的底边。最后,说A_1和A_2之间的关系与B_1和B_2之间的关系相同,相当于说A与B彼此平行,其中平行性准确的表达了方向的一致性,也因此表达了关系的一致性。因此,底边A与B之间的平行关系相当于$A_1/A_2=B_1/B_2=A/B$,这正与$h'/l'=h_1/l_1=h_2/l_2$表达的比例关系相对应。

比例的空间概念和数值概念之间的这种对应关系在数学上是众所周知的。而更有趣的是我们发现它发生在同一阶段即第3B亚阶段,这与相似性和比例的心理建构的两个方面有关,而这两个方面乍一看是非常不同的。对于此,我们还有一个关于空间心理建构与几何学演绎公理紧密联系的例子。

然而,仍然存在这样一种情况,即尽管比例的数量概念在第3B亚阶段以模糊和粗略的形式出现,但在第四阶段之前,比例的数量概念并没有达到稳定的平衡状态;而已经在第3A亚阶段发现的基于角相等确立的三角形的相似已经在第3B亚阶段得以完全

① 我们已经在*Les Notion de Mouvements et de Vitesse chez l' Enfant*, chapter IX中讨论过了比例与时间和距离的关系,它发生在精确的轮廓形式上。

确立起来。而反过来，基于边平行的三角形的相似性早在第3A亚阶段就已经得以实现。因此，三角形边的平行性、三角形角度的相等性和尺寸的比例似乎构成了相似性和比例发展的三个阶段，它们分别与第3A亚阶段、第3B亚阶段和第四阶段相对应。

我们来进行一个总结。在第一部分，我们试图证明三角形之间相似性的概念是通过对操作的分组而产生的，起初只是定性的，而后能够基于一对多对应进行广泛的量化。正如我们在第二部分所看到的，正是这种关系使部分与整体联系起来。这两种关系可以以相应的逻辑包含形式联系起来，并最终以比例的形式联系起来。因此，儿童在三角形之间的相似性领域发展出操作概念之间的紧密联系，以及在一般维度关系方面的比例性。

然而，虽然一对多对应在处理角度、相似性和比例的概念发展中起着至关重要的作用，但在构建坐标系统时，起主导作用的却是一对一对应。这将在我们对从投射概念到体现在欧几里得度量中的概念的转换研究的两章中变得更加明显。

附录：在开放图形中的比例

我们做了一个对照实验来发现在扩大开放图形时的比例问题。然而，由于本章叙述已经相当长，我们无法详细描述这一点。

为了消除三角形和矩形等图形中的强构形的作用，并观察其他非格式塔形式的比例发展是否相同，我们给儿童展示了一条6 cm的水平直线(*a*)、垂直于它的3 cm的直线(*b*)，以及这条水平线左端约1.5 cm的直线(*c*)。我们像以前一样通过知觉上的比较和通过作图来放大进行探究。

正确扩大的对比图形以这样的形式被画了出来：(*a*)=10cm、(*b*)=5cm、(*c*)=2.5 cm。在比较系列中，(*a*)保持不变，而(*b*)和(*c*)有变化。作出的图就像以前一样被画了出来。

显然，这不同于那些与三角形和矩形相关的问题，因为儿童必须在没有平行性帮助的情况下考虑三个长度(*a*、*b*和*c*)；更重要的是因为，他的知觉换位或放大图并没有从概念化的图形中得到任何支持，不像三角形被更尖锐化或矩形被拉长，以符合心理范式。

对比例发现的阶段似乎遵循相同的顺序，尽管在各个方面并不完全相同。在第一阶段，做这个实验当然比用闭合图形更不实际。类似地，第二阶段似乎开始得晚了一些。年龄更小的儿童很难想象这样的扩大可能是什么样的。而且，他们会挑选出有一对相交的垂线甚至是三条线从一个点向任何方向延伸的一幅图，但同时忽略了相对长度。否则一旦分析了图形，他们就会“转置”一些绝对大小。因此，对于知觉上的比较，临界值要么非常大，因为儿童接受所有提供的图形，要么非常小，因为他只接受一个特定的样本，尽管由于他选择了绝对大小而产生了错误。用作图的方法也得到了类似的

结果，例如，利尔（5;8）接受任意只要长度（*b*）和（*c*）不小于模型长度的图形，而亚奇（6;6）只比较特定的绝对尺寸。

在7岁，也就是第3A亚阶段的开始，我们可以看到在长度比较方面有了一些进步。然而，伴随它的是（*a*）或（*b*）的夸大[（*c*）作为一项保持其原始长度的规则]。但在他分析不同的长度之前，每个儿童都先从纯粹的全局性的比较开始，否则只局限于扩大其中一个维度。因此，达克（6;10）以非常大的临界值和对线（*b*）的一个很大的正误差开始。然而，当被给予一个含有太小的（*b*）的图形时，他开始有条不紊地比较它们。在他的作图中，他使（*c*）不变，使（*b*）比（*a*）长。费（7;10）正好相反。

在这一阶段，知觉上的比较和作图之间没有差距，因为开放的图形不鼓励概念化，并且通过视觉比较分析和通过作图一样困难（除了在作图中更强调的对特定线条的夸大）。

在8岁5个月至9岁，第3B亚阶段出现了更精确的二维对比，尽管不是三维。此外，儿童可以获得像1:2这样的简单比例，并将这一两倍的增加应用到第三个长度（*c*）上。例如，贝尔（8;6）几乎准确地保持了（*a*）和（*b*）的比例，并在没有测量的情况下画出了它们，但是他没有改变长度（*c*）。最终，他能够系统地将这三个长度加倍，尽管他不能放大到其他尺寸上。约伯（8;11）从只考虑三条线中的两条开始，接着在三条线中的每一条上加上相等的量，以此类推。

最后，大约在11岁，第四阶段出现了，此时尺寸上的比较适用于所有的比例。

总的来说，除去儿童设想整体形状所引起的其他反应，再加上与其他两个相比存在第三个距离所引起的其他反应，这些反应的发展与矩形的知觉和图形比较的结果相当。

总而言之，必须强调的是，当矩形被垂直而不是水平呈现时，第二部分所述的关于矩形长度的夸大的所有内容也可能在不同程度上得以呈现。

第十三章　参考系与水平-垂直坐标[1]

与基本拓扑关系(简单地涉及物体本身内部构成和它所具有的不同特性)不同,我们已经说明了射影概念是一个基于大量不同视角协调的单一系统内图形的广泛连接。但是,随着这一组织起来的复杂视角的不断发展,这里也出现了对不同物体的协调。这为最终形成欧几里得空间,平行、角和比例的概念(这两个系统间的过渡)提供了条件和准备。这样的一种物体的协调很自然地假定了距离的守恒、"位移"概念的演化或者空间图形的全等变换,最终形成了参考系或坐标。

在后面的内容[2]中,我们将会研究基本的拓扑关系(即第一章到第五章中所描述的)是怎样以欧几里得概念(距离和测量)的形式扩展开来的。在其他部分内容中,我们已经解决了[3]顺序或"布局"和"位移"分组之间的关系。因此,现在我们会重点关注这一部分内容,即把坐标问题与顺序概念(在第三章中已涉及)联系起来,把三维问题(第四章第二节)与直线(第四章)、平行线(第十一章)和角度(第十二章)概念联系起来。最后,我们会特别地对欧几里得几何学的坐标与投射坐标进行类比(第六章到第十章,特别是第八章)。

起初,欧几里得空间的坐标仅仅是一个包含所有物体的巨大网络,它由同时应用于所有三个维度的顺序关系组成。在这一网络中,每一个物体同时与其余的物体在三个方向(左-右,上-下,前-后)上产生连接,在一个维度上沿着直线与其他的物体保持平行,在二维上以直角的形式与其他的物体产生交叉。

由于这样一个网络的无意识建构,它使得空间中的图形和运动可以被定向,就像我们在第六章、第十一章和第十二章中看到的那样,缺乏这种建构的幼儿将不能够做出直线或者一组平行线,也不能判断它们的倾斜和角度。更为精确地说,这些直线、平行线和角度的建构组成了由坐标网络形成的普遍协调的初始阶段。

然而,参考框架不仅仅是由不同物体之间顺序关系组成的网络。它同样适用于网络之中的每一个位置,以及占据这些位置的物体,同时它使得它们之间的联系保持不变,且与物体的可能位移相互独立。因此,参考框架包含了一个依照容器的欧几里得空间,且与包含于其中的移动物体相对独立,就像是包括实际面对的每一个视角的潜在视角总体的射影坐标。在这个意义上,可以说射影和欧几里得空间包含了一个综合的系

① 与 Mlle. G. Ascoli, Mme. M. Denis-Prinzhorn, Mlle. M. Roth 和 M. G. Lewinnik 合作完成。

②《儿童的几何学概念》。

③《儿童的运动和速度概念》,巴黎,1946,第一至五章。

统,这与其内部每个物体被比作孤立事物的拓扑关系形成了鲜明对比。

现在,让我们来考虑一系列按直线排列的、被固定的物体。然后,我们会看到[1],这些物体之间的间隔构成了"距离";同时,每一个物体都位于或"被放置"在与其他物体有一定顺序或距离关系的位置上。当然,这样一种一维系统会得到以其他维度排列的线的"位次"和距离的补充。现在,让我们假定一些物体可以移动,它们改变了它们的相对位置或者占据了之前的剩余空间而把自己的位置空了出来。这样它们就有可能排列这些位置,这与移动的物体相互独立,并可以在这些位置和物体之间划分出距离。最后,让我们通过进一步假设,即当所有物体处于移动状态时,它们位置的连续性是固定的、不变的,我们把这一整个过程概括化或一般化。同时,在三个维度中对全部这些位置的组织,构建出了一个参照框架。

现在,如果这个系统形成了对所有物体而言的一个同质环境,那么这不仅仅是因为这个所谓的"容器"是由全部的物体之间的顺序关系和"距离"间隔关系构成的。也正是因为这个"容器"与其"内容物"是不同的,所以这些关系并没有在某一特定的时刻被局限于物体身上,而是包含了它们的所有连续的或潜在的位置,这些位置把它们联系了起来,并且选用某一个更有利的点来作为后面位置的参照点或"出发点"。

构成系统中"轴"的参照点,在假设上,它无疑参考了某一特殊的且固定的物体,但是随后被定位于另一个平面上。例如,与水平面或与之垂直的物体相关的空间常识观点。然而,参照框架的基本特性不存在于对固定参照物体的选择,而是通过不断扩大原始系统,无限制地协调位置和间隔。

因此,我们期望得出这样的结论,即在6或7岁之后,直线(轨道恒定方向的保持)、平行线和角度,之后是它们方向的协调和倾斜的概念,或早或晚将引起某种参照框架的出现;它还不包括将要在后面探讨的,涉及其他位置或距离概念的定位和位移运算。

一方面,每当物体或图形的部分通过顺序或直线、平行线和角度关系联系在一起的时候,每当这些不同的倾斜线相互之间可以自己定向的时候,我们便能够获得对关于整个参照框架中什么始终处于极限位置的初步了解。

另一方面,对位移的分组导致了位置本身的顺序和距离关系取代了物体之间位置关系。这种为了组织空间或"容器"本身,通过不断排空物体空间而达到的空间"净化"或"清除"(若读者能够谅解这种比喻)同样导致了相同的结果。现在这个双重过程不会突然发生。这个参照系统首先受到限制或在特征上存在局限,只是不断变得更加广阔并且通过包含更多的物体而使自己更加强大,同时它也变得更加抽象。因此,一直到恒定的参照轴和参照点被选取为止,变形改为了恒定;同时,特别地把位移系统建立在一个假设是固定的物体的相互连接基础上,其二者共同构成了遵循不变过程的两个路径。

在这一点上,首先出现的难题涉及自然参照系统的选择,例如作为最为稳定或最不

① *La Géométrie Spantanée de l'Enfant*, Chapter III.

易变的日常经验框架中,水平和垂直的部分。很明显地,从它们物理应用(因为它们是物理概念,而不是数学概念)立场出发,把这些观点简单地比作源自于外部环境,并与儿童能够支配的有限工具无关的假设是没有什么问题的。从这一立场看,找出儿童是否能够自发地利用这一参照系统的答案是至关重要的;如果是这样,那又是在何种条件下?这是在这一章中我们必须调查的主要问题。

现在,可能有不止一个读者会以这样的方式天真地提出这一问题。作为成年人,我们已经非常习惯于依照不证自明(就像垂线呈现的垂直和水平线呈现出的水平)的坐标轴来使用参照系统和组织我们的经验空间,以至于感觉在什么年龄儿童掌握了这些观点的问题显得有些可笑。有人会说,由于儿童从摇篮到用他的背部平躺,因此儿童意识到了水平,同时一旦他试图直起身来,儿童就发觉到了垂直。这个姿势系统会给事先准备好的坐标空间(平衡器官)提供一个非常著名(为人熟知)的半规管来解决整个难题。在这一情景下,再一次向4到10岁的儿童提出这一难题将会显得十分奇怪!

这里我们要提及一个困扰着几何学概念理论的最大误解。从儿童呼吸、消化和拥有一个跳动的心脏的事实中,我们还没有总结出他们关于事物新陈代谢或循环系统的任何观点。至多,我们可能会察觉到他在呼吸中的活动,或感受到他的脉搏。但是,这样感知觉运动的意识还不能够引起对内部现象的理解,而这些运动还只是这些内部现象的外部的、可见的标志。同样地,从他可以站立或躺下的事实来看,儿童首先只获得了一个关于这两个姿势的完全经验性的意识,除此之外再没有其他。为了把这个补充为一个更为普遍的格式,他必须在某一时刻走出纯姿势领域,并把他自己的位置与周围物物体的位置进行比较,这是纯经验性知识以外的事情。

现在,没有什么情况表明平躺、与床或地板的边缘平行或者与房间的墙面平行站立可以直接形成这种比较。然而,让我们假定这种比较通过对习惯性运动的感知觉控制,很快地发生在感知觉运动阶段。问题在于,是否它可以自动地产生一种普遍的物体之间的感知觉协调。与之相反的是,沃斯滕[1]对平行性以及对变化的倾斜直线的倾斜度和长度估计的研究结果显示:年龄更小的儿童会做出与9—10岁和10—11岁儿童以及成年人不同的反应。尽管在所有年龄上,当线条水平或垂直时,判断它们是否平行都更为容易——这从基本感知觉运动的立场,给了二维特性一些提示和说明——然而,年龄更小的儿童不能够正确地判断线条是否倾斜,同时也不能把倾斜的线条摆成平行的。同时,很奇怪的是,这些儿童相对于年长的儿童,在不平行线的长度比较方面(甚至当一条线为倾斜,另一条线垂直时)表现得更为优秀。因此,年龄更小的儿童很明显地还没有把感知到的物体定位在拥有可以促进倾斜判断的垂直-水平坐标的空间领域。尽管垂直和水平的线条被很精确地感知到(在最大位置会产生垂直-水平错觉),但是倾斜线条的倾斜度并没有依据对这种框架的参照而做出判断。恰恰是因为垂直和水平的线没有

① 见第十一章,同时参考第二章的相关部分。

被作为参照框架,所以这些儿童可以判断出倾斜线条的长度,而不能估计出它们倾斜的程度。事实上,我们有必要在这样的参照框架在感知觉上被利用之前,等到空间坐标通过具体运算在概念上被发展起来。

至于恰当的概念,每个人都看到了儿童在4—8岁画出的图画中,烟囱垂直于倾斜的屋顶,同时那些与小山成直角的人,被看作是在向上攀爬。在这些图画中,我们同时发现或意识到了其中的直角,和对垂直轴完全的忽视。这显示了儿童从姿势或感觉运动空间到概念空间还有一个很长的发展过程。然而,大部分研究者把这个过程看作是通过从这些原始概念中获得一个成熟的参照系统而产生的一个跳跃。

因此,我们将要进行调查的这一问题并不是可笑的或不切实际的。与此相反,运算概念大约在7或8岁时被儿童掌握,而不会更早,参照系统的发展也在这时出现,这也包括了那些建立在水平和垂直的物理概念基础上的发展。

第一节 方法和一般结果

儿童可利用的最简单、最自然的参照框架非常可能是物理世界以垂直和水平轴的形式提供的。当然,这样的观念与我们自己的经验主义近似值有着纯粹的联系,因为在一个更加精确的标准上,水平面不是水平的,而铅垂线彼此之间也并不平行!在经验水平上,水平被表现为日常物体在其上安放的平面,地面本身(平的地方),或者人造平面地板、平台等。另一个重要的因素是液体的表面,对于生活在日内瓦的幼儿来说,这一点每天以莱蒙湖表面的形式被解释,就更不必说在水杯和玻璃杯中的水了。对于垂直轴,它被表现为房屋的墙壁和住宅、标杆、烟囱、树等。

然而,对垂直和水平的研究会同时出现两个特别的难题,这些难题在某种意义上会使我们的实验和对它们的解释变得复杂。同时,不可避免卷入的这两个难题的事实其本身在从物理和智慧的观点来讨论几何学现象时,是有重大意义的。

一方面,垂直和水平的概念,就其本质而言,是物理的,而非数学的,是简单自由下落的物体或一条与之垂直的线所遵循的方向。但另一方面,对这些概念的详细阐释将会引出一个独立于物理学的问题,或者至少这一问题的独立性恰恰是实验中将要讨论的要点;这是作为简单的几何定向工具的坐标系统的发展。

至少这种独立性被直接地阐释为以下悖论。正如我们已经说明的那样,地球上的铅垂线不是绝对平行的,同时水平面是曲面的。但是,在几何学上,对垂直和水平的探索构成了特别的情况,这些特别的情况引出了直角坐标系的概念,这与它们表达的物理现实十分类似。

从心理学视角来看,这些物理学和几何学难题的二重性引发了一个十分重要的问题,不管这个答案是存在于这两个要素的独立性还是相互依赖中——尽管对于第二种

情况,有必要建立精确的相互依赖的性质。实际上,这个难题不是别的,正是与优先的,纯粹智慧特性相反的,数学的物理特性和实验特性,以及这两个极端之间的中介可能性。现在这一难题,以一种在我们将要进行的每个实验中极其粗糙的,但是更加令人印象深刻的形式反复出现。从一开始,即对实验序列本身进行安排和组织的开始阶段,一个人便会发现其自身正面对着所涉及的物理与智慧功能的相互依赖。

如果把这一坐标轴难题交给儿童来解决,他们将不得不借助于自然轴:即水平和垂直,因为儿童本身或早或晚会主动地接触到它们。为了得出是否儿童真正理解了这些概念的答案,有必要根据他在小实验中做出的图画来研究他是如何发现真正的物理学原则的。这就是说,这些原则,就像不管容器的倾斜角度如何,水平面的恒常性,或者不管旁边物体的倾斜角度如何,铅垂线方向的恒常性等。但是,在研究儿童自己是怎样解释这些经验性事实的时候,我们需要根据他能够记录到的所感知到的事情来对这一格式进行重新分析,这将我们再次带回到了坐标系统的问题上来。因此,从一开始,我们看似将以一种圆形的形式在物理学和几何学之间移动;同时,我们的首要任务是设计出一种方法,这种方法既能识别出这一基础问题,又不会对其本来事实产生偏见。换个说法,即理清关系。

对于水平的研究,我们发现下面的方法是最好的。儿童会看到两个细颈瓶,一个为直的平行的边,另一个为圆形的边。每一个瓶子里盛有四分之一有颜色的水,然后要求儿童去猜测,如果瓶子倾斜的时候水面的位置会在哪儿。或者把一些空的瓶子放在儿童面前,这些瓶子与模型是相同的形状,这时要求儿童用自己的手指指出,在瓶子不同倾斜位置处的水面位置。另外,年龄最小的儿童会被要求用一个手势来表明水的表面,这样人们就可以确定他们是把它想象为水平的,还是倾斜的。这些实验会在儿童面前被直接演示出来,然后实验者要求他们画出其所看到的画面。大于5岁(平均)的儿童在看到实验演示之前,会看到不同倾斜角度瓶子的轮廓图,然后被要求画出与瓶子每一个位置对应的水面位置。自然地,为避免出现顺序误差,不同的倾斜位置会随机呈现。我们同样会要求儿童画出桌子的边缘或支撑瓶子的支撑物,这样直接感觉到的水平会有助于儿童对水面位置的判断。一旦他画出了图,儿童会把它与现在要做的实验进行比较。然后,他会被要求对它进行修正或者做出一幅新的图画,并进而进行下一个预测。水面的位置要与儿童眼睛平齐,或者稍微高一些,这样他就可以清楚地看到水面的边缘。

这种基本的方法可以加以改变,用其他方法来代替。比如,给儿童呈现一组表示不同瓶子的硬纸板剪画,它们上面画有水面,然后要求儿童把它们设置成与水面相适应的角度。或者给儿童呈现一组画有不同位置瓶子图画的明信片。每一个卡片都展示了水面(正确的或不正确的),儿童要把正确的挑选出来,并把不正确的舍弃掉。我们会给一些儿童呈现一张展示了瓶子在所有位置的图画海报,然后会再次要求儿童把画有正确水面的图画从不正确的图画中区分出来。最后,我们偶尔会用一个纸剪画来表示一个

杯子，其内容物用第二个剪画来表示。儿童会被要求在考虑到容器斜率的同时，把第二个剪画组装到第一个上面。

对于垂直的研究，我们使用了下面的研究方法。首先，在前面有水瓶子的实验中，我们把一个垂直地插有一根火柴棍的小软木漂浮在水的表面。儿童被要求画出瓶子在不同倾斜角度上，“船”上“桅杆”的位置；然后，在看到实验演示之后再对自己的图画进行修正。其次，我们把铅垂线悬浮在瓶子（现在是空的）里面，铅垂被塑造为鱼的形状。儿童需要预测出瓶子在不同倾斜角度上，铅垂线的方向。这个完成之后，实际倾斜瓶子的实验被演示出来；同时，要求儿童进一步作画。再次，我们会给儿童展示一个沙子、橡皮泥……堆成的山，然后要求儿童在山顶、在旁边的地面上或在山的斜坡上竖起“好且直”的标杆。让他清楚地理解关于标杆的“直”和“倾斜”的含义是非常重要的（对图画的挑选促进了实验的进行）。儿童同样被要求画出这座山，并表示出“好且直”或倾斜位置上的标杆。最后，我们有时把使用到铅垂线的实验与山的实验结合起来，让儿童预测铅垂线线的方向。此时，在实验中，铅垂挂在标杆上的钩子上，而标杆被放在山的一边或山顶。

通过这些不同的方法，我们可以划分出如下的发展阶段（见图20）。在第一阶段（直到4—5岁），儿童不能够把水或者山表示为一个平面。当涉及水时，儿童不但没有关于水平面的想法，而且甚至根本不能理解平面概念的含义。他要么在瓶子的外面乱涂乱画，来描绘水面，或当他克服了使他这样做的运动困难之后，把水画成了一个圆形的污点或者瓶子里的一个小球，而没有对直线或平面进行定义，或者相对于瓶子对水面进行定位。在这一水平上，树和房屋要么在山的边上被画成平躺的样子（房屋被描绘得与山的斜坡平行），要么把山作为背景，在上面任意地放置物体。

与此形成对照的是，在第二阶段，空间定位被描绘的特定外形所决定，而不是一个外部的系统或参照。水平和垂直的轴仍然没有被发觉。在2A亚阶段，表示液体表面和固体的线是不明确的，除了当瓶子倾斜时，儿童在没有考虑到任一外部参照系统，和瓶子本身的边的情况下，想象到了水的运动。因此，液体被想象为简单地扩大或缩小，或者体积的增大或减小。儿童把它想象为向瓶颈处前进或后退，因此他认为当瓶子倾斜时，液体会向瓶颈处移动，而当瓶子被重新直立时，液体又会远离瓶颈。水面总是与瓶子的底部保持平行，大部分情况下液体会与它保持接触（尽管有时其对立面显示，瓶子底部和水之间的空白区域后来被悬浮在了空中，同时它的下表面与瓶子的底部保持平行）。

非常有趣的是，甚至在他们眼前演示了这个实验，这一阶段的儿童还是像那些处于第一阶段的儿童一样，还不能在真正意义上评价这一实验，因为他们还不知道怎样利用瓶子的外部参照系统或甚至是瓶子的内部参照系统。对于垂直，他们把标杆画得与山的边缘垂直，而没有考虑到垂直轴，同时不能够确定与山相关的铅垂线的方向。

然而，在2B亚阶段，我们发现：尽管儿童不能画出倾斜瓶子中的水面（尽管他用他

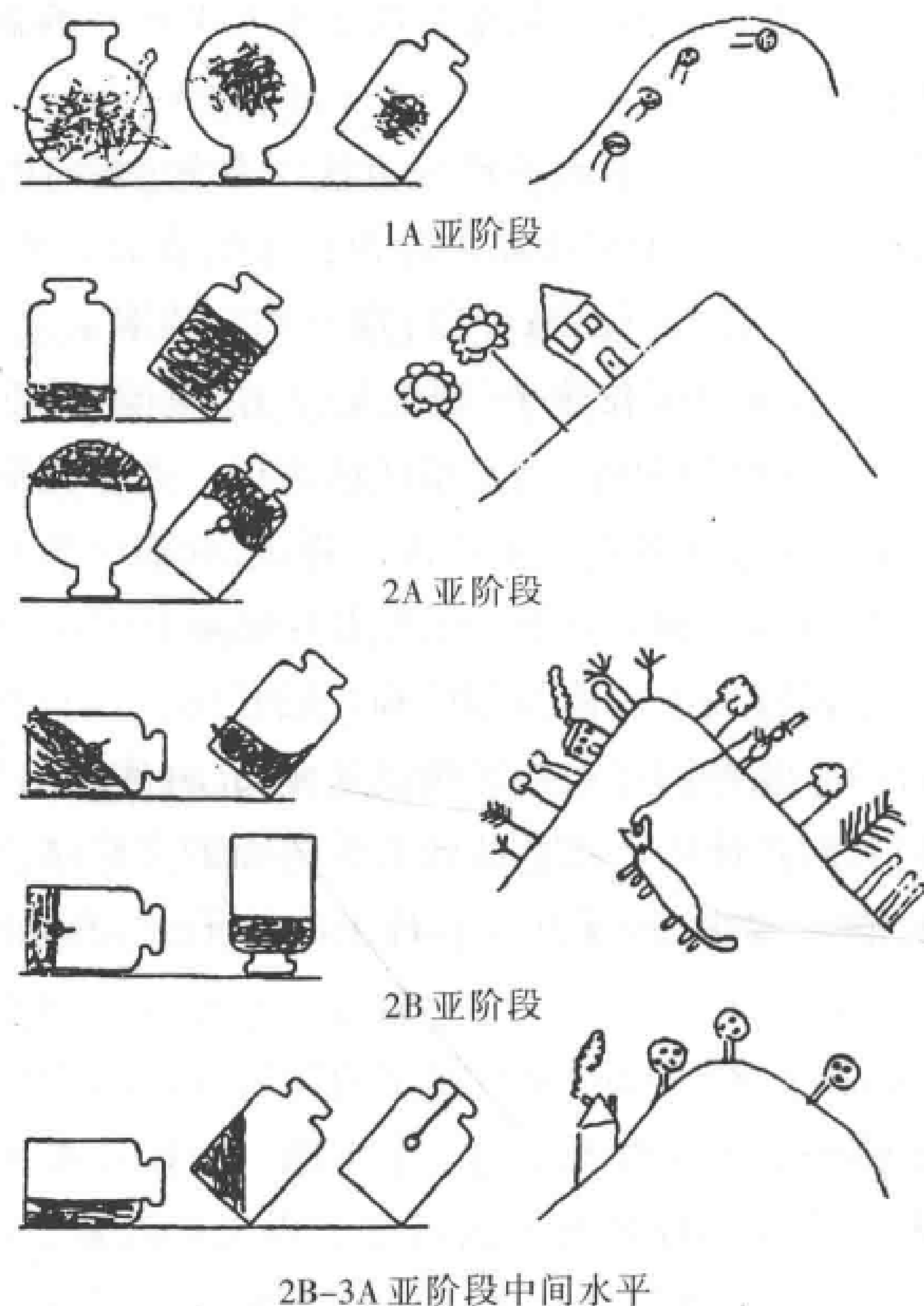


图 20　水平和垂直轴的发展阶段

的手指指出了方向)，然而他可以把它描绘得不再与容器的底部平行。但是，他仍然不能把他的预测与瓶子外部的任一固定参照系统相协调(例如，与桌子或者站台)；同时，仅仅能够在当它倾斜一定角度时(有时，偶尔也会把它水平放置)，把水位线与瓶子的角联系起来，可是当瓶子翻转过来时，他把水面画成了平行的。对于垂直，这一阶段的儿童通常可以在要求其在山丘旁边竖立标杆时，把标杆直立放置，尽管他们仍然会把它们画得与山的斜边垂直。同时，在倾斜的瓶子中，他们不能正确地预测铅垂线的倾斜角度。

下面是 2B 亚阶段和 3A 亚阶段之间的过渡阶段。仅当矩形瓶子被翻转或向一侧平躺时，儿童可以预测出液体的水平面。就是说，当水面与边平行时。随后，儿童逐渐发现了水平和垂直轴。这个到第三阶段得以完成，大约开始于 7—8 岁，可以划分为两个亚阶段。这里的第一个亚阶段将从 7—8 岁持续到 9 岁，在这期间原则开始逐步被应用到所有的情形中，尽管在开始的时候，水面经常被画成倾斜的，而忽略了瓶子外部的参照点。然后，儿童在大约 9 岁，3B 亚阶段开始时可以对水平和垂直(整个坐标系统的一部分)做出快速的预测。

第二节　第一阶段:在流体或固体情况下不能区分表面或平面

第一阶段一直持续到大约4岁或稍晚。当儿童被要求画出瓶子中的水面或者玩具山旁边的树时,他们的反应是非常有趣的,因为还不能对这样的平面进行区分。结果,他们既没有把液体画成一条线,也没有画成一个表面,而是像是一种球(他们不是仅仅在乱涂乱画)。他们把液体放在纯粹的拓扑领域进行考虑,仅仅把它看作是瓶子里面的一些东西,并没有参照欧几里得概念,例如直线、平面、斜面和维度。这里有一些例子。

威尔(3;0)　甚至对于直立的瓶子,只能在瓶子外面以乱涂乱画的形式表示水面,认为其表现出了瓶子里面的液体(被实验者画了出来)。

达恩(4;1)　我们给他画出了一个直边的瓶子。在要求其画出内容物时,他把水描绘成了一个在瓶颈附近左手边的污点。当瓶子里面已经画有直线时,他可以对其进行复制,但是他还不能正确地确定它们的方向,即使是在瓶子直立的情况下。

马恩(4;6)　不管倾斜角度如何,均把瓶子里面的水画成了一种小球,而没有考虑到瓶子的边缘和底部。然后,在瓶子直立和向一侧倾斜的两个位置上,我们给他画出了代表瓶子中水平面的线(或者水平和垂直轴),并要求他把水放进来。不管它是直立的或平躺的,他在瓶子里面画出了一个小的圆形污点。

对于垂直轴,这里有一些同样有趣的例子。

尼尔(3;11)　我们向他展示了一个有45° 斜坡的山,他把树和人画得与边缘平行,然后两座房屋的侧壁贴在斜坡上,同时建筑物的底部画有房门,这些部分被画得很细致,同时其悬浮在空中。

热昂(4;2)　画出了房屋和树,其中有一些向斜面倾斜,其他的与山的背景相对,但它们被摆放地很随意。因此,很难判断他是要在斜面上呈现出它们的全貌,以使它们变得形象化,还是简单地把它们贴在物体上。

库普(4;11)　不但把房屋画得沿着山坡倾斜,而且以任意角度翻转。比如有一个房屋的门、窗户、烟囱和炊烟都是上下颠倒的,它的底部位于半空中而屋顶位于下面,同时炊烟从烟囱中出来后向下飘并与垂直方向呈20° 夹角。但是,当库普被问道,如果一个人想要爬上山时必须沿着哪个方向,他很自然地指出了正确的路线。

贝尔(4;8)　画出的树与之前的儿童相同,或多或少与山坡边缘平行,但是稍稍画在线的里面,好像是担心把它们画到了空白的地方。他被问到它们是:"直立的还是倾斜的?——*它们全都是直立的。我不知道怎样把它们变得倾斜*。"因此,他把它们看成是直立的,就像自己的身体一样,尽管他把它们画成了倾斜的。此外,对于铅垂线(针的一端悬挂了一个纽扣),他说"*它好像要落到地面上了*",尽管当线没有受到山的边缘影响时,他画出的线是垂直的,但已经感觉到其与自己的身体相关。在其他实验中,线被画成了倾斜的,并不是因为纽扣被想象为从斜面上滚下来,而是因为在悬于空白处的平台上从侧面看到了针,儿童不想让线穿过去而进入空白区域,因而把它们稍稍倾斜——好像山吸引着物体,而不是把它们画得垂直。

阿尔(4;9)　把树表现为顶部有一个椭圆的一系列木棍,它们相互依附,并与山的斜面平行。每一棵树的顶部与下一棵树的底部相接触,同时它们被画在斜面边缘的里面。

对于在针的一端悬挂的纽扣,即使在实际看过悬浮于一个或两个位置上的纽扣之后,阿尔还是画出了很多从针眼中发出的呈辐射状的倾斜的线。

尤尔(4;11)　在瓶子瓶颈附近,以大的污点的形式画出了水(如达恩)。然后,他被要求画出"插有桅杆的船",他把它们摆得很乱,一些与瓶子的边平行,可奇怪的是,它们全部被画得好像是在水面以下,而不是在水的表面上。尤尔说它们"*在上面*",但是它们被描绘为浸没在水中,并位于不同的位置。

若斯(5;9)　尽管使用了相对于之前儿童更为先进的方法,但他仍把树、标杆和人画得与山的斜面平行,并在边界线的里面。我们向他展示了一系列图画让其进行选择,这些画包括垂直于山的标杆,垂直于图画的标杆,或平行于斜面的标杆图画的选择。若斯拒绝了垂直于山的图画("*那个是错误的,它不是直的*"),但接受了另外两个位置的图画。

这些结果是非常有意义的,因为它们可用来解释儿童图画中坐标系统的缺失。这很明显表明:它们体现的是一种拓扑关系,而不是欧几里得关系;是邻近和围绕的关系,而不是直线、平面和空间定向关系。在这一方面,这些图画的一个突出特征,可以被称为"对空白空间的恐惧"。贝尔的悬挂在山上平台上的铅垂线不是垂直的,而是被山所吸引(即向山的斜面倾斜),尤尔的船是在水面以下,而不是在水面之上,同时树被儿童欣然地放置在山的轮廓里面,而不是在空白区域上。无疑的,树是被分明地树立在山上,就像水在瓶子里面一样。然而,基本的围绕关系——特别是邻近性——比所有关于倾斜、定向或者形状的考虑都更为重要——这恰恰是因为坐标,或者是应用于空白空间关系的缺乏。

因此,水面没有被描绘成一条线或者一个平面的图形,而是一个污点或者位于容器

内的一个闭合图形(没有考虑其真实位置,或者相对于瓶子边缘的形状)。对于树和房屋,儿童们简单地把它们画得向山的斜面贴近,与山的表面靠近,而没有考虑其方向。一些是沿着斜面平躺的(从侧面看),这可能会被认为是在对平行关系进行研究,但实际上只是针对邻近性,平行关系只是与之非常相似,这是由于整体图画的要求。其他的物体被随意地摆放在山体轮廓的里面,并呈现出全貌。但是,不论对物体的排列方式如何,他们都不曾把它们摆成垂直的。的确,他们甚至在没有考虑物体顶部和底部的情况下,就去排列它们。因此,房屋的侧壁与山的斜面相连,其底部伸出到了空白区域,其他部分被放在边界以内几毫米处,同时有些部分是上下颠倒的,比如从烟囱里出来的烟是向山坡下面飘的。

总的来说,这些反应清楚地表明:垂直-水平坐标的缺失首先是由于对物体方向的普遍忽视,因为这里至今仍没有任何可用于空白空间的关系。但是,它同样源于不能孤立或抽象这样的形状和平面(就像在第一章和第二章中显示的那样)。实际上,这样的抽象是定向可能性的前提条件,这种定向(我们会看到),在以后的发展阶段仍保留着某种程度的原始特征。

第三节 第2A亚阶段:水面平行于瓶子的底部,树木与山坡垂直

当儿童学会把液体的表面抽象为一个平面,并相对于山坡放置树木时,他仍然不能理解容器中水的方向,或者倾斜山坡上树的方向。对于水,他把它看作是向瓶子瓶颈处移动,而不是简单的位移。他把它想象为体积的扩大或增加,同时由于这种增加,当瓶子倾斜时,他把它画得更加接近瓶颈,而此时水的表面与瓶子底部保持着平行。

维尔(5;3) "我们把瓶子像这样倾斜。这里面的水会怎么样呢?——*它会移动*。——它会怎样移动,向哪里移动?在玻璃上指出来。——(他指出了一个1cm处的平面,比现在的水面更高,全部围绕着瓶子,平行于底部。)——如果我们把它向另一个方向倾斜呢?——(相同的反应。)"有一些不同倾斜角度的瓶子的轮廓图,要求他在上面画出水面。在每一幅画上,他所画的水位线都与瓶子的底部平行。"在玻璃上再次用你的手指指出水将会移动到的位置。——(他再次指出了平行于底部的水线。)——现在请看,然后判断这是否是对的(当他用自己的手指指出了他所预测的水平面位置时,瓶子是倾斜的)。——*是的,这是对的*。——实际上,你的手指旁边有水吗?——*没有*。——如果我们把瓶子更加倾斜,那么水会向哪里移动呢?——(他再一次指出了与底部平行的倾斜水面)看。——(我们再一次演示了实验)它是对的吗?——*不是*。——如果我们把它变得更加倾斜呢?——(他再次

指出了平行于底部的水平面。)——现在再看一下(我们演示了实验),画出你看到的。——(他画出了一条平行于瓶子底部的线!)”

现在,为了不让他把瓶子底部当作对比的平行线,我们尝试使用圆形的烧瓶:“请画出瓶子中的水面(瓶子颈部是垂直的)。——(他画出了一条正确的水平面。)——现在我们把它像这样倾斜(45°)。请画出水面。——(他画出了差不多垂直的水线。)——(我们演示了实验)你是对的吗?——……(他并不承认他是错的)”

莉娅(5;7)　用两根手指,以相同的方式表示出了倾斜瓶子中的水平面,提高了2或3cm,来表明平行于底部的线。“现在让我们看是否这是对的(实验)。——不是(他自然而然地移动自己的手指,使它们与真实的水面一致)。——现在画出来你看到的(我们给出了瓶子的轮廓草图)。——(他画出了平行于底部的水平面!)”后续的实验显示了,莉娅不能够应用他所看到的,甚至不能通过直接复制倾斜装置来画出正确的水平面。

埃尔(5;3)　相对于之前两个儿童,得到了进一步发展。“当瓶子倾斜的时候,水会怎么样?它会待在原地,还是会移动?——*它会待在原来的地方*(我们向他呈现了两个图,一个是直立的瓶子,另一个是倾斜45°的瓶子,他在第一个瓶子里画出了水平的水面,而在第二个瓶子里画出了倾斜45°的水面)。——在瓶子上用你的手指指出水将会出现在哪里。——(他指出了一条比现有水面稍高,但是平行于它的线。)——现在我们将看到你是否是正确的。——*不是,这里它更高,而那里它变低了*。——如果我们把它变得更加倾斜呢?——*还是在这里,它会变得更高,而那里它会变得更低*。——你可以在这个向一侧倾倒的瓶子上画出你所描述的水面吗(倾斜90°的瓶子轮廓图)?——*像这样*(他画出了一条平行于瓶子底部的垂直的线)。——现在让我们检查一下(实验)。——*不!*——那么画出你刚才看到的。——(他画出了一种有趣的图画,即这幅图画是他画出的垂直位置与刚才看到的水平位置的折中。儿童所画的水既贴着倾斜瓶子的垂直底部,同时又贴着瓶子水平的边,其水面是曲线型的。)——(现在我们将使用球形烧瓶)画出里面水的样子。——(正确地画了出来。)——现在我们要把它变得倾斜。画出一幅图来说明水会向哪里移动。——*它会移动到这里*(在一幅倾斜45°的图画中,埃尔画出的水面像新月一样,紧贴瓶子的一边,因此水面也平均倾斜了45°)。——如果我们把它向另一个方向倾斜呢?——(在相反方向画出了相同的图画。)”

帕德(5;8)　同样地不管瓶子以什么角度倾斜,都一直预测水面将与瓶子的底部保持平行。当瓶子颠倒时,他把水画得紧贴于底部,而悬浮于空中。对于球形瓶子,水的位置是不变的,但其表面始终是平的,然后对于细颈瓶,面对实际的实验,帕德表现出了三种类型的反应。有时他继续把水面画得与底部平行,有时他把水分为两部分,一部分与底部平行,另一部分与边平行(如埃尔),其余时候他把水画得紧贴于瓶子的底部和四壁。

这些儿童的发展比处于第一阶段的儿童更进一步,因为他们可以指出水是一个平面,尽管他们还没有发现在所有情况下水面都是水平的。这可能是由以下两个原因引起的,一个是物理原因,另一个是几何原因,我们将尽力对这两个原因同时进行调查研究。从物理视角来看,这些儿童都忽视了一个至关重要的事实,即水面总是水平的,尽管他们都知道当一个直边瓶子直立时,液体是"平躺的",而且其表面与底部平行,与侧边垂直。

一个非同寻常的事实是这些儿童中没有一个注意到了水面位置的连续变化,或者观察到水面保持着水平;这也显示了在缺乏有组织的格式的情况下,儿童是多么不善于记录他们所感知到的事件。对于所有年龄的儿童来说,没有比看到一直倾斜的水壶碰到装满水的杯子更普通的事情,同时也没有比观察到液体表面保持水平更容易的事情。虽然这样,我们的被试都似乎认为水面是保持恒定的,当然其与外部参照系统无关,这相当于对水面保持水平的理解,但这只与瓶子本身相关。这就等于假设了,水会随着倾斜的瓶子一起倾斜,同时可以占据包括垂直位置在内的每一个位置。因为水面是与底部保持平行的,然而当瓶子倾斜时,水面会靠近瓶颈,因此儿童简单地想象为水的表面不断上升而没有改变其方向,就好像它不断扩大,要离开瓶子一样(见维尔和莉娅,以及实验开始阶段的埃尔)。

第二点要注意的是,这些儿童受到实验结果的影响是很小的,因为他们受到了恒定不变的水面"绝对错误"的指引,总是把水面想象得与底部平行。从几何学和物理学视角来看,这一事实都是非常重要的。因为这些儿童不仅没有通过日常观察注意到水面总是水平的事实,而且更让人惊奇的是,当在他们眼前演示实验或当相对于他们之前的假设对他们所看到的事实进行简单检验时,他们也不能注意到实验的结果。因此,我们发现维尔拒绝接受这个事实,尽管他实际上已经把他的手指对着杯子。莉娅似乎承认了自己感觉到的证据,然而他的画还依然重复着原来的错误。

现在,这些反应(它们与儿童对物理空间的理解相关)自然地引起了一个基本的几何学问题。首先,很明显,为了理解这种经验性事实,儿童必须能够把他看到的水面与一些参照系统联系起来。他可以通过两种方法来实现。其中,最简单的方法是把水面与瓶子外部的一些固体物品,如桌子或瓶子的垫子相联系。但这里还有一个可以选用的方法,他需要观察与倾斜容器的四壁相关的,液体表面方向的不断变化,除了瓶子本身而不去关注其他物体。然而,实际结果显示,这些儿童没有使用这其中的任意一种方法。他们没有观察液体是否与桌面平行,或者它相对于瓶子四壁和底部是否改变了方向。与此相反,他们认为水面与瓶子的底部保持平行;同时,他们这样做的原因是由于不断重复着在瓶子于初始位置时看到的现象,而不能注意到或适当地推测出在后续位置上所发生的现象。

这把我们带到了几何学水平的基础问题上面。如果这些儿童不能使用可以使他们正确解释这些事实的基本理论,这是否仅仅是因为这个问题超出了他们的能力范围,或

这个问题对他们来说没有什么意义呢？换句话说，他们不能理解水平的物理特性，可能并不是由于他们不能发展出一个几何参照系统。

现在，尽管还不能确定是否在这个年龄上不能预测水平，是因为不能感知到一个坐标系统——因为它可能是由于兴趣的缺乏，粗心等——理解这些重要事实的困难导致了完全不同的结果。它毫无疑问地表明了儿童在评估涉及线和面的定向感知觉信息上能力的缺乏，因此这暗示了儿童在这样坐标部分上的失败。坐标系统实际是什么？或在不同位置和方向上的物体之间的对比是什么？如果没有做这种比较，那是因为在这种系统（即静止的物体被当作运动物体的参照点）中，把不同物体连接在一起的问题还没有发生在儿童身上。他不能正确地解释这种感知觉或物理的信息，这是因为他没有意识到建立这样一种参照系统的需要。所以，具体地说，尽管倾斜的瓶子改变了水面的位置，但是因为这种位移发生在物理空间，所以发生移动的要素（液体表面）必须与静止的参照框架（桌子等）相联系。构成几何运算基础的关系的建立，是坐标系统的基础。正是由于儿童缺乏这种运算，他们不能够解释这种水平的物理事实。

然而，这并不是否定了这些儿童与处于第一阶段的儿童相比，没有取得大的进步。因为，他们不仅会把水面认定为一个表面或一个平面，而且他们同样可以把这个表面与瓶子的底部联系起来。他们开始使用参照点，尽管是移动的，还不是固定的参照点。尽管现在这些发现还不足以构建起一个参考框架，但是它们已经为它做好了准备。符合欧几里得空间的参考系统是对定位于空白区域物体之间一系列比较的最终结果。这个过程开始于直线、平面、平行线和角的构建，最终结束于能够使这些比较普遍化的轴的发展。与那些处于第一阶段的儿童相比，处于现有水平的儿童，在某些情景（例如当他们把自己当作与他们平行物体的参考时。见第六章第一部分）下已经掌握了直线和平面的用法。这些儿童把水面与瓶子底部联系起来的做法显示出了对于平行（与菱形中的角相关的平行形成对照，构成长方形的平面或线之间的平行，第十一章）的基本看法。这样的概念（尽管限制在一定范围）表现出了战胜空白空间的初步尝试；换句话说，是对相距很远的物体之间的协调。

这一过程在垂直轴的实验中表现得更为显著。这让人回想起来，处于第一阶段的儿童还不敢把树和标杆直立在山坡上的空白区域。然而，他在不知道把它们放置在什么位置的情况下，就把它们摆放得与边缘平行。顺着对平面和平行的发现，就像在水平面实验中提到的那样，儿童对树和标杆的处理表现出了一种类似的探索，这对于参照框架的发展同样重要。现在树和标杆被画得，如果不垂直——仅仅如同水面被画成水平——至少被画得与斜面近乎垂直，同时直角的概念开始补充长方形中平面和平行的概念。

马格(4;6) 把标杆、房子、树和人摆放得与沙山的斜面垂直。在做出一个向山上爬或向山下滑的玩偶时，他总是把玩偶与山的斜面垂直。在画出向山上爬的人时，他同样是这样做的。我们向他展示了一个站在房顶的代表人的玩偶，然后问

他，如果这个人扔出了一个石头，那么石头会如何下降（在还没有被扔出的时候）。马格画出了一条斜线。

马尔（4;7） 对于沙山上的玩偶和在山的斜坡上画出树和标杆时，做出了相似的反应。铅垂线：当针插在面向儿童的一边时，它被画成了垂直的，但当它被悬挂在山坡（从侧面看是凹形的）上时，线不是垂直的，而是弯曲的了。

马尔同样主动地画出了一个房子。烟囱是和倾斜的屋顶垂直的。最后，我们向马尔展示了两个斜面（形如钟的一半），一个上面有一条垂直于其边缘的线，另一个上面有垂直的线。对于前者，他说，“*它们是直的*。”对于后者，“*它们是倾斜的*”。

韦尔（4;8） 画出了一幅非常好的形如三角形的图画。在它的斜面上，他画了两朵很大的有直线茎的花和一个高高的有尖形屋顶的房子。所有这三个物体都是与斜面垂直的。

皮耶（5;1） 在玩具山，和他做的图画中都把物体摆放得与其表面垂直。“这些人在什么位置？——*垂直的*。——当你在爬山的时候，你是像这样（与斜面垂直）站呢，还是像这样（我们画出了一个与地面垂直的人）站？——*是的，像那样*（与斜面垂直），*否则你会弯下身子*。”画出了一条与马尔相同的铅垂线。

若斯（6;4） 相似的结构和图画。在钟形的斜坡上，我们放了很多物体，有些是与地面垂直的，有些是与斜面垂直的。在斜面上，若斯把垂直于地面的物体看作是“*倾斜的*”，而把垂直于斜面的物体看作是“*直的*”。但是最终，他又把那些垂直于地面的物体看作是“*直的*”，而把那些真正倾斜的物体看作是“*倾斜的*”了。

斯皮（7;1） 画出了一座三角形的山，在斜面上方的空白区域，他把标杆、房子和人与山坡垂直地放置。一个人好像拿着一条有细长鳄鱼的皮带。这被画在了山坡边缘的里面，并与斜面平行。整个图画可以被分解为垂直和平行。

这种描绘事物的方式［自克申史坦那（kerschensteiner）[①]和吕屈埃[②]等人的研究之后，在关于儿童心理学的文章中非常著名］，从几何学的视角来看有着明显的重要性。这种一致和普遍类型的反应体现了直角的概念，如同平面、平行等，它是坐标系统的发展基础，在这样的系统产生之前就已经被儿童掌握了。

假如事实如此，那么为什么儿童能够把标杆、树等画得与山坡垂直，而不能在把它们画得垂直于地面，或在一个倾斜的瓶子中画出水平的线？一个简单的原因是：他们所熟悉的直角、垂直和平行线（在每一个实验中，它们都与长方形一起出现）对于单一的物体保持着纯粹的内在，或者很多相邻的物体构成了一个有结构的整体（山坡与其上的物体等）。然而，为了设想或想象出垂直和水平，儿童必须逐步形成，不仅包括邻近的，而且包括远距离物体的，更为广泛和全面的关系。特别是，他必须逐步发展出可以将空白

① Kerschensteiner, *Entwicklung der Zeichnerischen Begabung*, Munich, 1905.

② Luquet, op. cit.

空间联系在一起的关系，这种关系阻碍了第一阶段的儿童，却是现阶段儿童正开始建立起来的关系，尽管至今儿童仍没有在思维中把空白空间联系起来。

这恰恰是因为他们的空间概念被局限于单一复杂物体或模式之中，因此儿童，例如马尔或若斯把倾斜的物体(但是与斜面垂直)看作是“直的”，同时把实际上是垂直的物体看作是“倾斜的”。总而言之，他们还不能把这些物体与由这种系统(由受限的构造组成)外部的任何事物联系起来。

第四节　第2B亚阶段：中介类型的反应

上面描述的反应与关于水平和垂直(第三阶段)的发现之间是一系列值得仔细研究的反应。因为，儿童通过不断尝试错误来解决这一难题的努力经常会给他之后运算系统的建构提供有益的帮助和启示。

这里向前迈出的第一步发生在儿童能够在瓶子上指出，当其倾斜时，水移动方向的时候。然而，在这一阶段，与在2A亚阶段表现得一样，他的图画仍然显示水面平行与瓶子的底部。垂直轴(像漂浮的软木所显示的那样)仍然与水的表面保持着垂直，而没有考虑到倾斜。这里有一些介于2A亚阶段和2B亚阶段之间的这些反应的事例。

帕格(5;1)　“当我把瓶子倾斜时，水会保持这样吗？——*它会变得倾斜*(他指出了一个平面，在瓶子的右手边更高，而在左手边更低，一个很好的预测)。——把它画出来(他得到了一个倾斜瓶子的图)。——*它是倾斜的*(水面与底部平行)。——假如我把这艘船放在水面上呢？——*它也会变得倾斜*(桅杆与水面垂直)。——如果我把它再倾斜一点儿呢？——(他把水面画得更加倾斜了。)——如果我把瓶子放平呢？——(他把水面画成了垂直的，软木上面的桅杆变成了水平的！)——用你的手指指出来。——(他首先在很多位置上正确地指出了水面，但最后在上面指出了水面，并且它们彼此平行，就好像在瓶子里水面仅仅升高了而保持在同一位置。)——现在请仔细看，(实验被演示出来)这是对的吗？——*是的*。——请把你看到的画出来。——(他画出了一个介于水平和与底部平行之间的水面。)”

安(5;6)　同样在开始的时候用两只手指在倾斜的瓶子上指出了水平面，但是弄错了倾斜的方向，每次都把它颠倒。在他的图画中，安把水面描绘得似乎是悬浮在瓶颈附近的空中，液体的下表面与瓶子的底部平行：“*那是因为当你把它倾斜的时候，水面就会上升*。”然后，他开始画船，并不是在水面之上，而是在水面以下；同时，桅杆与水的下表面保持垂直。当瓶子水平时，水面变得垂直。使用球形长颈瓶得出了相同的结果。当面对实际实验时，安强调说他画出的瓶子里的水面是正确的：“*是的，这是对的，因为水面会向瓶子的边缘升高*。”然而，通过把瓶子的一角作

为参照点，他把他的图画向着水平位置修正，因此他提前进入了下一阶段。

乌拉(5;2)　可以预测水移动的方向，但是在每一个倾斜角度上，他仍把水面画得与瓶子底部平行。此外，当要求他画出挂在吊钩上并悬浮于瓶子(已经对它进行了接触，并看到它是垂直悬挂的)中的铅垂线时，他把它画得与水面垂直。然而，当瓶子倾斜时，他画出的线也变得倾斜，随着瓶子的倾斜而越来越不垂直。关于桅杆的船，我们得出了相同的结果。

米克(6;7)　尽管其行为更加矛盾，但他做出了相似的反应。他并没有用自己的手指出水面，而是把一支铅笔沿着瓶子的边放置来显示变化后的水面。"很好。现在画出你刚才指出的。——(他把水面画得与底部平行。)——现在瓶子会向另一个方向倾斜，请向我们展示一下水将怎么移动。——(他的演示或多或少是正确的)——现在把它画出来。——(他再一次把水面画得与底部平行。)——在你的图画中，是不是一边比另一边高呢？——*不是，在两边都是一样高的。*——现在，请仔细看这个水面(实验演示)，这是对的吗？——*是的。*——和你画的一样吗？——*是的……*"我们不能再说服他了。

在关于船和铅垂线的实验中，米克在不同的倾斜角度上都做出了桅杆垂直于水面的图画，而几乎没有注意到垂直轴。最后，在球形长颈瓶中，米克始终把水面画成弯曲的，并接近瓶子的底部。当它倾斜的时候，水面似乎沿着长颈瓶的边升高了。从一组图画中，他选择了液体倾斜并弯曲的画，而拒绝了水平液体的图画。

米(7;0)　表现出了与米克相似的反应，即通过使用一个尺子来表现水面的移动，然后把它画得与瓶子底部平行。当面对实际实验时，他努力地通过把自己的画靠在瓶子上来检验自己的画是否正确，但最终还是没有把它修正好。"用尺子向我们展示一下瓶子中的水面(仍在他的面前保持倾斜)。——*像这样*(沿着水面他把尺子水平放置)。——现在把你的尺子放在图画上，然后指出水面应该在什么位置。——(他把尺放在图画上，并与瓶子的底部平行。)——是一样的吗？——*噢，不是*(他通过在水平和倾斜的平行间做出妥协，来努力做着修正，然后画出了一个弯曲的面。最终一部分水面是水平的，而另一部分是与底部平行的)！"

阿尔(6;10)　与之前的儿童一样，表现出相同的反应。然后，我们给他呈现了一系列移动的硬纸板模型，这些模型描绘了在不同位置上的水面；随后，要求他把它们调整到正确的角度。他并没有把瓶子倾斜到适当的角度，而是把它们的瓶颈都垂直起来，没有考虑到变成倾斜、垂直或水平的水面。当从一组图画中区分出正确的和不正确的时候，他根据瓶子的角度进行判断，而不是根据水面与瓶子角度之间的关系。

前面少数儿童表现出的唯一过程是：当用他们的手指在玻璃瓶子上指出水面移动的方向时，他们不再把它想象为向瓶颈升高，而是在瓶子倾斜(安例外，他把方向弄颠倒

了)时会与瓶子底部保持平行。但是,这种纯粹经验主义的发现并没有在几何学上与任一外部的参照系统相联系,诸如桌子或者平台,甚至在观察瓶子时也是如此,更不用说要求他们画出它。儿童只是知道水面会向瓶颈移动,而不会做出把这种移动与固定物体进行几何学联系的尝试。的确,在要求其画出预期的水面时,他会像他在2A亚阶段表现得那样,把它画得与瓶子底部平行。甚至当液体的下表面被画得好像悬浮在空中(见安)时,情况也是如此。

这种退步是因为儿童在画图方面的技术困难吗?这种解释似乎是不太可能的,因为当我们给儿童呈现移动硬纸板模型让其调整,或一系列图画让其挑选时(见阿尔),他们做出了相同的反应。此外,当实验被演示出来时,他们甚至不能对他们的图画进行修正,也不能做出足够的比较(见米克和米)。对于垂直轴情况也是一样,即所有物体都与它们直接的底部保持垂直,而没有参照外部物体。

总而言之,这些儿童和那些处于2A亚阶段的儿童一样,还不能把水面与固定的参照框架相联系。他们的发展相比之前的儿童更为进步,因为能够预测到水会向倾斜的方向移动,这是极为显著的。然而,尽管如此,他们仍然不能利用他们的发现,因为还不能根据几何学系统(这种系统能够协调物理空间中的水平–垂直轴),对物理信息进行解释。同时,这些儿童(甚至比之前阶段的儿童更多),可以通过直角和垂直的想法来给出熟悉的、可见的证据,如同他们看到的船上的桅杆和悬挂在瓶子中的铅垂线一样。然而,这些基本的几何概念(仅仅是不同方向上物体之间比较的开始)仍不足以决定水平和垂直的出现。因为这最终取决于协调的整个过程,同时这只有通过真正坐标系统的发展,才能得以实现。

接下来,让我们转向一些属于2B亚阶段的例子。这些儿童表现出了相对于那些处于2A亚阶段的儿童更加进步的证据,因为他们不再把水面想象为与瓶子底部保持平行,而是把它看作是随着瓶子而发生移动。然而,因为他们不能把水的表面与外界固定的参考框架相联系,因此他们把它画成了一条从瓶子一角发出的倾斜的线。

马尔(5;10)　就像2A亚阶段的儿童一样,开始时把水面简单地想象成不断升高,并与瓶子的底部保持平行,然后尝试把水面画得沿倾斜的方向移动。他把顶部右手边的角与底部左手边的角通过一条直线连接在一起,最终形成了一个近乎水平的表面。但是,对于更加倾斜的位置,他也是这样做的。因此,这条线就越来越偏离水平位置。另外,船上的桅杆和铅垂线与水面保持垂直,当瓶子倾斜时,它们也变得越来越倾斜。

费尔(5;11)　在瓶子玻璃上指出了水面将沿着瓶子倾斜的方向移动。然后,他画出了一条连接瓶子底部一角和对面边上一点的线。这产生了一条略微倾斜的水位线,在不断倾斜的瓶子图画中它变得越来越倾斜了。对于向一侧平躺的瓶子,他画出了一条从一角延伸到另一角的倾斜水位线。另一方面,对于上下颠倒的瓶

子，他把水面表现为水平的（因为它与底部平行）。当实验最终被演示出来的时候，在每一次瓶子倾斜之前，费尔被要求在空瓶子上把一支铅笔平行于水面放置。然后，他发现铅笔是保持不动的，并且是“*直的*”（水平的）。然而，他并没有从这里得出任何可以应用于之后预测的结论。

古伊（6;3） “请在瓶子（直立的）中指出水面。——*它是完全平的*（他把他的铅笔水平放置）。——如果瓶子变倾斜呢？——（他把铅笔倾斜，平行于底部。）——那么当它向另一个方向倾斜的时候呢？——（相同的反应，但是方向颠倒了。）——现在请画出了水面在哪里。——（他画出了一系列图画，前面的图画显示出水面几乎与瓶子底部平行，后面的显示出一条随着瓶子倾斜度的增加，而倾向于越来越把相对的角连接在一起的线，这样水面就变得越来越倾斜了。）——那么当瓶子平放呢？——（画出了一条垂直的线！）——如果这样（上下颠倒）呢？——*像这样*（水平的，因为平行于底部）。”

乍（7;9）把铅笔保持水平，来表示初始的水面。“如果我们把瓶子倾斜，会发生什么呢？——*水会位于其中一边，而另一边没有水*。——如果我们把它向另一个方向倾斜呢？——*它不会移动*（因此，他注意到了这一物理过程）。*不，它不是像那样的。那里会有很多水，而这里没有很多水，那里将会升高，而这里会下降*（他指出了一个倾斜的表面）。——画出它。——（水面从底部的某一角延伸到对面边上的中点，它是倾斜的。）——如果我们把它变得更加倾斜呢？——（把线画得越来越倾斜，最终把两个相对的角连接在一起。）”

船上的桅杆和铅垂线被画得与水面垂直，而与瓶子的边平行。

费斯（7;6） 是一个有趣的被试，因为后来在看到实验演示之后表现出了不同的反应。在看到倾斜瓶子中的水之前，他和之前儿童的表现相同：“*它会是倾斜的*（图画中的水面从瓶子底部的一角延伸出来）。”我们给他了两幅图画来进行选择，一幅图中的水是倾斜的，另一幅图中的水是水平的（在倾斜45°的瓶子中）。他选择了水是倾斜的那幅图画。“现在我们将看到你选择的图画是否是正确的。你可以用这个尺子来做检查（靠着瓶子的边）。——*它是错的*。——为什么不是正确的呢？——*它是直的*（水平的）。——现在我们会把它像这样倾斜。这里的水会怎么样呢？——（他把尺子倾斜。）——好的，我想你应该把尺子平放。——噢，不！*那是不可能的*。——现在请仔细看（实验演示）。——*噢，是的，它是对的*！——如果我们把它变得更加倾斜呢？——*它会变得更高*（他再次把尺子倾斜）。”等等。

这些儿童取得的进步，与那些2A亚阶段的儿童和之前引用的过渡例子相比，是非常明显的。他们不再满足于只说出当瓶子倾斜时，水会移动，而是可以在他们的图画中表现出这种移动。他们可以看到水面不再平行于瓶子的底部，这样水面就不再严格地与倾斜的瓶子相联系，而是可以呈现出一个新的方向。

但是这个方向是什么呢？这就是把2B亚阶段从更早的阶段中划分出来的分界线。儿童仍然不能够把他预测的水面方向与外部的、固定的参照系统(例如桌子或平台)相联系。他只能预测到水面会相对于瓶子的边而发生变化，为了能够确定液体的新位置，他只能够在它包含的复杂模式内部寻找参照点。不再满足于水面与瓶子的底部保持平行的结论，他认为可以把水面与瓶子的角或者边上的一些点连接起来。在放弃了把它画得与底部平行的方法之后，他开始把它与角或其他东西联系起来。因为他不能把这些角度与一个坐标轴中稳定部分相联系——因为他还不会参照瓶子外部的物体——儿童转而进入混沌的和随意的反应模式，同时不能够建立垂直与水平。

在这一点，有必要对来源于图画问题和那些是几何学的因素进行区分，这会是一个前者偶然促使人们理解后者的过程。例如，当这一水平的儿童想要同时画出倾斜的瓶子和它下面的平台时，会经常发生这样的事情，即他们还不能对瓶子与放置瓶子的平台进行分离，也不能在前者的底部与后者的顶部之间形成一定的角度。结果，他们很正确地画出了瓶子的边，但是却把它们不断地扩大，以至于两边都接触到了平台，就好像瓶子是从平台上突出来的，没有一个可见的底部，这简单地是因为他们还不会描绘角度。

然而，基本的要点是，因为儿童既不知道当水面不再平行于瓶子底部时，他们图画中的水面是基于何种参照系统，也不知道怎样确定水面和容器边缘之间的角度，于是他们开始简单地把水与瓶子的角联系起来。因此，我们发现马尔不管瓶子的倾斜程度如何，总把瓶子中相对的角连接起来，其形成的水面变得越来越倾斜(不水平)。费尔也做出了相同的反应，同样把瓶颈与一个角连接了起来。古伊画出了一个水面，其从一角连接到了对边上的一点，他表现出了把水面与倾斜角度本身联系起来的意图，但是实际上他画出的水面变得更加倾斜，同时最终在水平的瓶子上画出了垂直的水面。只有当瓶子完全被颠倒过来的时候，通常儿童能够得出正确的预测，因为在这种情况下水面又再次与底部平行，

总而言之，水平问题仍然在这一阶段儿童的掌握范围之外。因为他们还不能使用瓶子外部的物体做参照，他们还远远不能理解它，以至于不能从看到的实验演示中得出任何结论。他们认为水面是倾斜的，同时与之前的儿童不同，在看到实验演示之后，甚至发现了它“*是直的*”(费斯)。在没有采用任何坐标系统的情况下，对信息的理解是如此不充分，以至于他们还不能在预测之后实验结果的时候去应用它。因此，在费斯发现了水面是“直的”之后，他很不情愿地在之后倾斜的瓶子上，保持尺子为直的。“*不，这是不可能的*。”他说，好像从之前实验的结果中得不出任何结论。这种理解水平概念的能力缺陷被很好地表达了出来。

对于垂直概念，我们可以看到一些用船上的桅杆和悬挂于瓶子内部的铅垂线所做的实验案例。玩具山和山坡上树的图画之间的比较显示出了一种类似的进步。一般而言，2B亚阶段的儿童会把房子和标杆垂直地放置在玩具山上，但是在他们的图画中，仍然把它们要么画得与斜面垂直，要么介于垂直于斜面和垂直于地面之间。

亚奇(5;0)　把所有物体(向上爬或向下滑的人、房子、树和标杆等)都垂直地放置在沙山上。但是当要把它们画出来时,他却把它们画得与斜面垂直,结果随着它发生变化形成了一定的角度。“当在沙地上时,情况是一样的吗?——*是的*。——确定吗?——*是的*。——尝试画出一棵直立的树,一棵倾斜的树和一棵更加倾斜的树。——(第一棵垂直于斜面,第二棵向下倾斜而第三棵向上倾斜。)——哪一棵是直立的?——*那一个*(第一个)。”

这之后,我们沿着斜面钉上去了一些大头针,然后要求他来预测悬挂在这些大头针上面的铅垂线的方向。有三次,他预测了它是垂直的,然而图画显示有两条线是垂直于斜面的,只有一条近乎是垂直的(在他眼前一直有一个模型)。

米奇(5;1)　毫不犹豫地把物体垂直地摆放在沙山上。实验者把其中一个垂直于斜面放置。“他们是一样的吗?——*不是,你的是倾斜的,我的是直的*。——那么谁是对的呢?——*我的*。——很好。现在在山坡上画出这些标杆。——(除了偶尔有一个或两个近乎垂直的之外,他把它们都画得垂直于斜面。)——请指出直的标杆。——(他指出了垂直于斜面的标杆。)——那么这些倾斜的标杆呢?——(他指出了近乎垂直的标杆。)——哪个是正确的?——(前面的那些。)”铅垂线:与亚奇相同。

弗朗(5;6)　把所有物体都垂直地摆放在山坡上,然后却都把它们画得与斜面垂直。我们向他展示了两幅相似的斜坡,一个上面是垂直的标杆,另一个上面是垂直于斜面的标杆。“这两幅图画是一样的,还是不一样的?——*不一样*。——好,现在请看这两幅图画(一个有垂直于斜面的烟囱的屋顶,另一个有垂直于地面的烟囱的屋顶)。这两个烟囱是一样的吗?——*是的*。——哪一个画得最好?——*这里有一个烟囱更为倾斜,那一个*(垂直于斜面)。——请在上面画上(添加)一些烟囱。——(他在垂直于地面的烟囱旁边画了一个垂直于地面的烟囱,而在垂直于屋顶斜面的烟囱旁边画了一个垂直于斜面的烟囱。)”

诺(6;2)　把所有物体都垂直地摆放在山坡上,然后却都把它们画得与斜面垂直。“你画的是对的吗?——*是的*。——再尝试一下怎么样?——(这一次,他既画出了一条真正垂直的线,又画出了一条介于垂直于斜面和垂直于地面之间的线。)——现在请看。这里有一个陡峭的山(轮廓图)。请画出在这座山上的一棵很直的树。——(他把它画得与斜坡垂直。)——那么现在请画出一棵倾斜的树。——(他画出了一棵向斜坡底部倾斜,并与斜坡成45°角的树。)”

利德(6;3)　一根铅垂线(系着橡皮泥做的鱼),悬挂于一个宽的、平的软木塞中间,在一个直边的瓶子里。“线是怎么悬挂的?——*是直的*(垂直的)。——如果我们把瓶子倾斜,然后线会怎么悬挂?——*它会倾斜*(他把它画得和瓶子的边平行)。——用这个尺子观察它(在线前面垂直放置)。——*尺子是垂直的*。——线呢?——*也是垂直的*(倾斜的新位置,利德的新画)。——线是怎么悬挂的?——

仍然是垂直的。——但是你的画是怎样的呢！——*是倾斜的。*——是对的还是错的？——*错的。*——那么更正它。——(利德发现这个很困难，因为他主要受铅垂线和瓶子的边之间的平行关系影响，又一次把它画在软木塞下面的直角位置。)"

现在，我们跳到画山腰上的树的问题。利德使它们都垂直于斜坡。我们为他画了两幅画，一个是垂直于斜坡的，另一个是垂直于地面的。"哪一个画得更好？——*那一个*(垂直于斜坡的)。"同样地，他画了一个垂直于屋顶的烟囱。最后，我们回到瓶子上来，在水上放了一个漂浮物。在倾斜的位置，他还是不变地画出了垂直于水面的桅杆(当水面不再水平时)。

凯尔(6;11)　漂浮物：桅杆垂直于水面并且和瓶子的边平行。瓶子中的铅垂线：和利德的反应一样。凯尔很难用垂直的尺子检查他的错误，他总是无意识地倾斜尺子使得它和他画中倾斜的线平行。他主张他所画的线是垂直的，没有区分垂直和略倾斜。然后把铅垂线悬挂于软木塞(直径为几厘米的圆盘状物体)上，但是在瓶子的外面："如果我倾斜软木塞，线会怎样悬挂？——它会*倾斜*。——现在看(实验。)——*它是直的*。——如果我继续倾斜它还会是直的吗？——*不*。——那么现在，你转动木塞使得线不再是直的。——(他转了90°)*啊，不，它仍旧还是直的*。——现在画出所有这些(已经给出了各种倾斜角度的软木塞图，他需要在上面添加铅垂线)。——(他画的所有铅垂线都是垂直于软木塞的。)——那对吗？——*是的*。"

当考虑到这些结果的复杂性，即它们是各种各样知觉的、概念的、形象的因素综合的结果时，它们是很有趣的。这些儿童当中的每一个都能复制在特定情形中的垂直，但是在另外一些情况下则不能，这是因为在每一种不同的情形下，他将自己的判断建立在不同的参考系上，尽管他自己没有意识到。很明显，儿童对垂直的想法并不是一个运算性的概念，因为即使是直线还仍未被以运算性的形式想象(比较第六章，第一部分)。垂直的想法仅仅是凭直觉获得的，很自然是由知觉环境所主导——就像在直线的情况下发现的那样——这就是与上面的结果一致的地方。

第一个需要注意的点就是，尽管存在一些表面的现象，垂直的掌握并不比水平早。将水平和垂直坐标轴得到的结果在类似的环境下进行比较，比如不同倾斜角度的瓶子，结果表明想象垂直既没有比想象水平困难，也没有比想象水平简单。事实上，我们仅仅引用了倾斜瓶子中的水面的例子，从而来避免过度地延长讨论。但是对于垂直轴，我们早就已经知道的关于儿童绘画的知识驱使我们研究其他的情况。结果，这些结果看上去是相互矛盾的。但是，我们已经指出，当比较限定在相似的情况下时，这种明显的不一致就消失了。

比如插有垂直桅杆的软木漂浮物，或者更典型的，悬挂于软木塞上的铅垂线，不管瓶子中是否有水或者水面的高低。这里我们发现利德和凯尔(与他们对于水平轴的反

应截然不同)坚持一种方向;他们认为漂浮的桅杆是垂直于水面,铅垂线是垂直于软木塞的(在后一种情况下,与瓶子的边也是平行的)。即使铅垂线被悬挂于瓶子的外面,凯尔仍坚持这种想法,尽管在这些情况下,通常来说问题在更早些时候就被解决了。这些儿童由于缺乏参考框架,在实验中所经历的困难是相当明显的。

和这个相反的,对于山腰上的树、人和标杆,儿童的反应随着物体是被安排在玩具山还是被画在一个图上而发生变化。和第一阶段的儿童把物体和斜坡平行放置不一样,和2A亚阶段的儿童把物体垂直于斜坡放置也不一样,现在的儿童把物体正确地放置垂直了。这可能是因为山是放置在屋子里的物体,有桌子、椅子的腿以及墙壁等表示的垂直轴作为参考。另一方面,在画中,物体还是不变地垂直于斜坡,因为这些画仅仅包含放置物体的斜坡,而没有包含被感知是地面的纸张本身。直到下一个阶段开始,这种表现垂直的方法才能归因于儿童习惯的绘画方法。[①]相反的,这个阶段的儿童经常发现区别垂直于斜坡和垂直于地面是困难的(见弗朗),甚至仅仅基于角度而不是坐标做出估计也是困难的,垂直于斜坡的物体被称作是垂直的,垂直于地面的物体被称作是倾斜的(亚奇、米奇、诺拉等)。

因此总体上来说,在这个阶段末,仍然没有出现垂直轴,因为方向是基于没有将全部因素考虑在内的、部分参考系统做出判断的。而且,在相同类型的环境下,比如倾斜的瓶子,因为缺乏外部的参考框架(也就是说,基于领域内大部分稳定元素的坐标轴),垂直的建构和水平几乎是一样的。

第五节　第三阶段:水平和垂直轴的发现

第三阶段获得的结果有力地证实了我们的假设并不像我们可能认为的:儿童不能给出正确答案仅仅是因为绘画技巧的缺乏,事实上,他是不能一下子发现水平和垂直的。在第一阶段,儿童不能把直线和面分隔出来,在第二阶段他不能利用他所想的模式以外的参考系统。然而,在第三阶段,尽管是逐渐地,他开始掌握更为延伸的参考系统,并且开始构建包含所有空间领域的坐标轴。

在这个过程中,大概能够区分三种主要类型的反应。首先,是介于2B亚阶段和3A亚阶段之间的一种,当瓶子横着放的时候,儿童能够发现水平,以及在部分情况下能够发现垂直。然后,3A亚阶段,对于所有位置水平和垂直轴建构的尝试和失败。最后,3B亚阶段,这种建构被以运算性的术语明确表达,并且直接应用于所有情形。

首先,介于2B亚阶段和3A亚阶段之间的反应值得特别的注意。尽管仅仅拥有一个

① 在根据想象自由画画时,6—7岁的儿童(在日内瓦)经常用垂直于斜面来表示垂直于水平面。M. Lewinnek 从 Ecole Nouvelle of Mlle 和 Hamaide in Brussels 那里收集了一系列的图画,在这些图画中,有树、房子等的山被大约相同年龄的儿童用同样的方式呈现出来。

区别它们和它们先驱的新颖特征，不过这些反应标志着向前发展重要的一步，因为它们表明儿童开始拓宽现有的局限的参考系统。这个新的特征就是当瓶子横着放的时候，对于水平的发现。水面不再与瓶子的底部平行，或者与瓶子的一角连接在一起(我们想起在2B亚阶段，当瓶子被颠倒时，儿童把水面画得水平，但是在这里它还是和底部平行)。自然地，水平以水和瓶子的边之间的平行为结果被发现。然而，这种与最初位置(水面与瓶子的底部平行)完全不同形式的平行，表明儿童开始建立与瓶子外部参考系统的连接，至少在这个特定的位置上是这样。

罗斯(7;2)　从2B亚阶段开始："*水在这里会更高*(在倾斜的方向)，*在那儿会低一些*。"他把水面画得倾斜，从低的一角开始流到对面的边的中间。对于其他的倾斜位置，他的做法也是一样的，但是对于横着放的瓶子，产生了一幅有意思的画。水开始从低的一角倾斜流动，但是一旦到达瓶颈，开始水平地流动，因此水的轮廓像一个梯形。

漂浮着的桅杆有时是垂直于地面的，有时是垂直于倾斜的水面的。

查尔(7;6)　对于球形的长颈瓶，在所有的倾斜角度上，他都画了一条倾斜的"水位线"，除了瓶子横着放的时候。在这种情况下，水的表面也是水平的。"为什么在这里它看上去是这样(90°)？——*因为它是直的*(=水平的)。——让我们看看是否正确(我们在各个倾斜的角度上进行实验)。——*不，水总是直的，但是我把它们画成倾斜的。它应该一直都是直的*。——这样呢(135°)？——*它仍然是直的*。"在实验的影响下，查尔看似对水平轴有了大致的发现。但是对于矩形的瓶子，他必须从头开始：对于45°的倾斜，他画了倾斜的水面。"水会像那样吗(我们把瓶子快速地倾斜了一下)？——*是的，如果瓶子再倾斜一点的话*。——但是你告诉过我水是直的。——*它不是直的*。"等。他又一次把水位线画得越来越倾斜，除了当瓶子横着放的时候。漂浮着的桅杆仍然垂直于水面。

韦伯(7;9)　对于球形的长颈瓶，他一开始把水面画成不断弯曲的椭圆，直到它们在瓶颈的地方形成一个球(对于较大的倾斜)。我们开始实验，他说，"*水是直的*。"在接下来的画中，他把所有的水面都画成水平的，表明已经注意到了他看到的。但是，当我们换成直边的瓶子时，他又一次预测所有的水面都是倾斜的，除了当瓶子平放的时候。然后，我们开始展示，他用尺子检查水面。"你画的画正确吗？——*不，是错的*。——如果我再倾斜一点？——*水也会倾斜*。——用尺子检查。——*倾斜的*(他不能判断尺子是否是水平的)。——你确定吗？——*不，是直的*。——水呢？——*肯定是直的，因为它和尺子在同样的位置*。——把这些硬纸板模型按照正确的顺序排列(代表球形长颈瓶各种各样的水面图案)。——(他用倾斜的水位线排列它们，除了倾斜90°的那个)——但是你说它总是直的。——*不，它是倾斜的*。——把你的尺子靠在瓶子上，怎么样？——*倾斜的*。——你真的

这样认为吗？——哦，不，它是直的(带着吃惊的样子)!”漂浮着的桅杆有时是垂直于地面的，有时是垂直于水面的。

多尔(7;2) 使用可移动的硬纸板图案的方法，对于球形长颈瓶，他几乎都做对了。对于直边瓶，他仅在水平(90°)和翻转(180°)的位置上成功了，但是对于倾斜的位置水面还是倾斜的，并且说，“*它下降了。*”尽管之前在球形长颈瓶的情况中早就承认“*水是直的，永远不会下降*”。随即给他呈现真实的瓶子并且进行实验。当瓶子轻微倾斜时，多尔认为水面是倾斜的，然而当角度接近90°时，他认为水面再一次变直了。要求他用尺子检查，但是他开始主动进行测量，使用他的手指和桌面作为参考。然而，这种方法是不准确的，他坚持最初的观点，“*有时候它是倾斜的，有时候它是直的!*”

查巴(7;2) 他认为水面都是倾斜的，除了在水平和翻转的位置。对于后一种情况，他在桌子上面移动手掌的同时，说“*水将会像这样*”，这表明他在把桌子当作一个外部的参考面。对于倾斜的位置，他认为“*水仍然会是倾斜的*”(顺便说一句，仍然这个词的使用表明这个信念是从更早的阶段保留下来的)；同时，对于球形长颈瓶，几乎在所有的位置，他都成功地预测了水平。

这些反应揭示了对水平概念的早期意识，因此值得我们特别关注。当瓶子横着放置的时候，水所呈现的位置构成了这个概念最初的真实表达——这和瓶子被颠倒时是不同的，尽管在颠倒的位置上儿童也认为水面是水平的，但是此时水面仍然是和瓶子的底部平行的。这个阶段的儿童怎么在这一特定位置有了这个发现，为什么他们不能把它延伸到其他的情况中?

毫无疑问，儿童能够发现水面仍然是水平的，实验本身在其中有重要的作用。但是这个实验呈现了两个方面，这两个方面都需要一个几何学结构，这个几何学结构延伸到了直接的物理数据之外。

首先，儿童必须注意到水面保持一个恒定的形状，它不像韦伯画的那样弯曲，也不像罗斯的梯形那样弯曲，而是一个平面。现在从第二阶段开始，能够清楚地表明水面保持一个恒定形状的实验，使得韦伯和罗斯能够更正他们的错误——第一阶段反应的延续。尽管这个看起来可能很初级，能够注意到这个事实毫无疑问地意味着儿童能够想象一个表面。

第二，这个对于他来说很难掌握——实验就是水面保持一个恒定方向的物理证据。换句话说，一把倚着瓶子中水位线的尺子，即使在瓶子倾斜的情况下也和它是平行的。这就是使得韦伯和许多其他的儿童感到惊奇的实验的第二个方面。确实，尽管他们开始以韦伯表达的形式那样接受它：水是直的，因为它和尺子在相同的位置，但是他们现在绝不能完全领会这一事实。

但是像这样的一个实验真正包含什么？主要的，某个专门的动作，比如用眼睛或者

尺子检查,这样的动作瞄准物体特定的特征(在这个例子中,是它的形状和方向)从而导致特定的提取。所有的这些相当于从物体中提取出特定的特征,这些特征被主体记下来并且包含在他们的概念格式中。

然而,如果获得这样一个概念仅仅需要物理演示,我们就不能明白为什么这个过程如此困难并且冗长,结果必定包含其他的因素。只有当它的结果首先被观察到(注意到实验),其次被解释(从中得到结论),一个实验才是一种实际的可能性。这就不可避免地假定一个推论系统,据此我们能够理性地理解实验在其中的作用。那也就是说,为了获得一件事情的准确知识,仅仅在事情的特定方面或特征上,表现出某一专门的动作是不够的。协调这些动作也是很必要的(不论是同时地还是继时地)。但是协调动作的过程并不是物理实验的一部分,而是智慧结构的一部分。因此,它是逻辑的、数学的包括欧几里得运算在内的基础。

事实上,所谓协调动作就是在它们结果的基础上把它们连接在一起,或者把一个格式植入另一个中。不论哪种情况,最终结果就是协调或连接受这种动作影响的物体。因此,这不再是一个用专门的、孤立的动作从一个物体提取出一个特定特征的问题。相反的,它包括添加新的特征,这些特征不是从它们的物理特性中提取出来的,但是与它们协调共存。这样,像数字、逻辑或者基本的几何学假设等关系与表现出协调的动作联系得更紧密了,相对于与这些动作有关的物体(比如,为了翻转关系,翻转动作的方向就够了)。在现在的例子中,即使是对平面的认识——它包含了从物体中进行特定的提取,当它仅仅是一个观察水面是水平的问题时——以同样的动作协调为基础进行提取是先决条件。在第一章和第二章中,我们常常看到"形状的提取"是在多大程度上取决于像这样的动作协调,因此在这里我们不再深究。

对于液体表面的恒定方向,也就是说,水平轴本身,很明显这是不能仅仅在物理实验的基础上被实现的众多概念之一,因为它需要一个丰富的互相连接的网络,这个网络会形成一个坐标系统。现在,这仅仅是这个过程的开始,它使得儿童仅仅能够在特定的情形下发现水平轴;同时,在这样做的过程中所遇到的困难也解释了为什么不能把他们的发现应用于所有的情况。

因此,在2A亚阶段期间,尝试把水面定位于和瓶子底部平行之后,在2B亚阶段,儿童开始寻找角度,并且将水位线和瓶子的角落连接在一起,继续通过这种方式去仅仅参考总体结构内部的参考系统。在上面所举的过渡期的例子中,对于所有直边瓶的倾斜位置仍然沿用这个程序,然而在水平的位置(和球形长颈瓶的所有位置),水平轴被正确地呈现。

其中的原因也并不难被发现,尤其在球形长颈瓶(在现在的阶段表现出,对于水平的预测更有利)的例子中,更明显。在缺乏角度和角落的情况下,儿童开始把水位线向球形瓶瓶颈的方向倾斜,但是因为这些没有提供瓶子内部的参考点,他马上开始寻找瓶子外部的参考点。从这点开始,根据每个个体案例,他开始或多或少有意识地参考桌子

或者瓶子所放置的位置，这些帮助他发现水一直是直的（查尔、多尔等），或者换句话说，与水平的位置平行。然而，在直边瓶的例子中，边和角落继续为所有倾斜角度提供内部参考系统，除了瓶子平躺的时候。在最后一个位置中，边和放置瓶子的地方是平行的。因此，儿童参考放置瓶子的位置或者桌子，也就是瓶子外部的参考系统，结果发现了水平。这就是查巴如何预测“*水会像那样*”，因为他指着桌子，表明他在寻找独立于瓶子的参考点。

在这个中间的阶段，儿童试图通过把水面和瓶子以外的参考点相关联的方式发现了水平轴。他只有在水平和垂直的位置下成功地定位水平；当瓶子在一个倾斜的角度时，他依旧不能这么做。他的发现还是不完整的。尽管这些反应是非演绎的、尝试和错误的类型，这里我们要说的是它不仅仅是一个简单的物理发现，而是通过把注意到的主要物体和其他与之独立的物体相联系的坐标和参考框架形成最初的一步。

对于垂直轴，也同样是这样。现阶段的儿童，在很大程度上，愿意把软木漂浮物上的桅杆画得和水面垂直，参考系统依然局限在瓶子内部。然而，在特定的情况中，通过和瓶子以外的物体建立关联，他们能够表现出垂直。

和这个过渡阶段截然不同，第三阶段大概平均从7—8岁开始，也就是具体运算开始出现的时候。现在，水平的概念不再仅仅出现在瓶子的特定位置，垂直的概念也不再取决于知觉环境。相反的，这些概念能够被实际、有效地应用于所有倾斜位置。因此，第三阶段明显区别于其他阶段。换句话说，由于具体运算取代了第二阶段简单连接的概念，现在儿童能够把他所考虑的模式的不同部分相互关联，包括在它们内部变化的参考系统和在它们外部固定的参考系统。但是，这个最终的目标不像在7岁或者8岁就实现的更为基本的概念（比如直线、平行等），没有一步就实现。因为水平和垂直构成一个坐标系统，这需要动作领域内全部物体间的相互关联，完全实现需要两个阶段。

在3A亚阶段期间，垂直和水平的概念逐渐地在实验过程中出现。只有在3B亚阶段，大概9岁左右，他们才能够有逻辑地、一致地从访谈开始就应用到所有的情况中。这里有一些3A亚阶段的例子。

韦尔（6;4，发展超前的）　对于倾斜45°的直边瓶，预测它的水面是倾斜的。“看（实验）。——*啊，不！*——如果再倾斜一点？——*然后水仍然会再倾斜一点*（实验）。*不，是直的。*——如果我们倾斜的程度更大呢？——*它仍然是直的，因为只有瓶子在变化。*——如果它朝我的方向倾斜呢？——*水开始朝你倾斜*（他用一把尺子来表示，随后他突然举起尺子说）。*不，如果我们用尺子检查，水还是直的。它是直的，因为你在倾斜。*——把它画出来。——（他把水面画得很倾斜，然后在所有的方向上转动纸，寻找一个参考点）*天啊，那是不对的*（他把它改成水平的，并且说），*我先画桌子再画水！*”

对于球形长颈瓶，在一开始，画中的水面有的时候是水平的，有的时候是倾斜

的，然后："*啊，那不对，因为它一直是直的。*"在玩具钓竿平衡在湖面上方的例子中，他做了几幅正确的画(线是垂直的，湖是水平的)，但是也有几幅奇怪的画，在画中：湖是倾斜的，钓竿在水面的下方，"湖是倾斜的？——*不，当起风暴的时候是。其他情况下，它是完全水平的。*——那么这幅画是什么样子的？——*是倾斜的。但是当你像这样放的时候，*(他把它颠倒)*则不是。*"因此，他把画颠倒而不担心纸的倾斜。然而，他知道怎么通过参考桌子的边缘把一切放到它本身的位置上。

哈恩(6;11)　对于垂直的铅垂线，他画的有时是垂直的，有时是和瓶子的边平行的。开始，他也把树垂直于山放置，后来他把它们改成垂直于水平面的。

在直边瓶倾斜45°的时候，他首先预测水面会和瓶子的底部平行，然后倾斜(与瓶子的一角连接)，最终，几乎水平。然后，他几乎把水平运用到所有的位置。

对于硬纸板模型，他正确地排列了球形瓶；但是，对于直边瓶，在倾斜的位置上，水面还是倾斜的。然后，他突然说，"*不，当水面是水平的时候才是正确的。*"

维(7;3)　开始的时候，在直边瓶的图上画的水面是倾斜的。"把这把尺子靠近瓶子，看看你做的对不对(实验)。——*我的画不完全是对的，因为它不是直的。*——(我们继续倾斜瓶子)现在呢？——*我不能理解它。它不应该是这样的*(水平的)。——看，我把铅笔端平(同时瓶子向更大的角度倾斜)。——*啊，是的！它完全是直的。但是好有趣，瓶子不是直的！*——如果我在更大程度上倾斜呢？——*它是直的！有一些我不明白。瓶子在动，水面却不动*(=水平的)！——如果我们像这样倾斜呢？——*它仍然是直的。*——向你倾斜呢？——*是一样的呀。*"然而，在后来表示这些水面是水平的时，他遇到了困难，但是逐渐地成功了。

球形长颈瓶："*它总是直的。*"

博尔(8;6)　不像维，他通过尝试和错误而不是有意识地推理来发现水平。在开始的时候，水面是倾斜的，在瓶子横着放的时候实现了水平。然后要求在他的画中添小船，并且在不破坏水面的情况下，让桅杆垂直。给他展示瓶子在其他角度的倾斜，他把水面画得有一点倾斜，并且认为这就是当进行实验的时候他所看到的。最终，他对水平的概念有了完整和大致的理解。

科尼(8;6)　开始的时候，在所有倾斜角度上水面都是倾斜的，但是当他排列硬纸板模型时犹豫了一会儿，然后把所有的水面都放成水平的，并且说，"*它只是一条简单的线。*"完成这个之后，他更正了自己的图画。要求他用尺子靠着瓶子来核查，他说，"*当瓶子倾斜的时候，尺子也会倾斜……不，一直是直的。它们和之前还是一样的。*"

布罗(8;6)　一开始的时候画了倾斜的水面，然后看完实验之后意识到它们还是水平的。"水会一直都是倾斜的吗？——*是的，如果瓶子再倾斜一点儿则不是。*——看(实验)。——啊，不，它还是直的。——你是怎么发现的？——*我看了桌子。*"

弗勒(9;6)　以同样的方式开始，但是后来惊呼(在倾斜20°—30°的时候)，"不，

我的画倾斜太多了，因为水是不会倾斜的；它一直都是直的，因为水必须一直是直的（水平的）。"

帕乌（9;10） 画了一条倾斜的水位线，和一条船，船上有与其垂直的桅杆。然后给他呈现实验。"*我都画错了。水会像那样*（平行于桌子的手势），*并且桅杆是直的*（垂直的手势）。"但是接下来，他又一次预测水面会是倾斜的（实验）："*不，更错了。*——如果瓶子再倾斜一点儿呢？——（这一次他所画的水面是水平的，并且使用了一把尺子，他把尺子和桌面的边缘平行放置）"但是奇怪的是，当他去处理另一种倾斜位置时，他又回到了倾斜的水面，用球形长颈瓶重复同样的错误。然而，他最终成功地在所有的情形下，产生水平的答案。

谢乌（10;3） 开始的时候，画了倾斜的水面。"*我不知道水是否到达了瓶子的角落*（他连接了瓶子的一角和其对边），*但是漂浮物是直的*（垂直于水平面的）。——如果瓶子倾斜呢？——（他把水面画得倾斜，漂浮物是垂直于水面的。当看到实验，他随即开始对其进行重新解释，并且协调一切使之一致）。*瓶子仍然是倾斜的。水面会是直的，但是在另一个方向，瓶子会是倾斜的，但是水面会同样是直的*（他把它画得稍微倾斜）。——好好观察，用这把尺子。——*它是直的。*——如果我倾斜得更厉害呢？——*你必须保持尺子是直的。*——在另一个方向呢？——*它也是直的。*——你是怎么知道的？——*我就是这么认为的。*"最后，使用可移动的硬纸板图案，对于所有的倾斜位置，他都认为水面是水平的。"*因为否则的话，水会在这里升起*（在一边），*在那里落下*（另一边）。"

艾斯（10;7） 在开始的时候犹豫了："*我不知道它会是直的还是倾斜的。*"他把水面画得倾斜，桅杆垂直于水面。他做了一系列的画，所有的都像这个，然后说，"*不，我应该使它更直一点。*——如果我朝那边倾斜呢？——*它也还是直的*……——你是怎么找到正确答案的？——*我观察纸或者桌子的边缘。*"球形长颈瓶：所有的画都是正确的。"*我观察了桌子*"。

特里皮（11;4） 以同样的方式犹豫，直到看完实验，他说，"*它一直都是直的。它必须一直都是直的*（他更正了他的画）。——你怎么判断它是对的？——*我把它画得和桌子平行。*"

最后，这里有两个关于垂直轴的例子。

杰奥（7;9） 开始的时候，使物体垂直于小山丘的斜坡摆放。"现在把它们画下来。——（又一次垂直于斜坡。）——画几个标杆。——（一些垂直于水平面，一些垂直于斜坡。）——你的树是直的吗？——*不，它们是倾斜的*（他改变它们，使它们垂直与水平面）。——房子呢？——（也更正了它们。）——画一个人爬上去并且下来。——（垂直于斜坡和垂直于水平面的混合。）——哪一个画得最好？——（指着

垂直的。)——你可以加一些树上去吗？——(他把它们都画成垂直于水平面的。)"

卡尔(8;2)　画了一座山，上面有人、树等。他开始的画是垂直于水平面和垂直于斜坡的混合，但是逐渐更正直到只剩垂直于水平面的物体。

很明显，我们可以说：通过3A亚阶段，儿童逐渐认识到了水平，并能将其应用于瓶子的全部位置；对于垂直也是同样的，儿童能够将其应用到相同的情形下或者斜坡的画中。同时，我们也面临一个令人吃惊的事实。这些介于6岁到11岁之间的儿童(少数12岁的)，只有在重复的尝试之后才能成功，在重复像第二阶段那样的错误之后才能成功，在要求他注意用瓶子进行的实验结果之后才能成功。帕乌就是典型的例子，尽管他已经接近10岁了。因此，水平和垂直的概念并不是在第三阶段的开始就被建构的(也就是具体运算开始出现的时候)。特殊情况除外，而是在整个阶段的过程中，在大概9岁的时候。换句话说，直到儿童能够完整地整合这些运算。

指明这点后，我们现在必须探究水平和垂直是怎么被儿童发现的。这看似是一个很难回答的问题，但是总结儿童的这些反应，会使得这个问题变得简单一些。在某种意义上，这个发现的确可以说是来源于这样的事实：水面仍然是水平的，铅垂线会下垂。但是，这些事实只有被整合到协调的格式网络中(这种网络的组织最终形成参考系统)，才能被注意和归纳性地应用。

当然，最令人惊奇的事情是儿童从他们所看到的当中推论出物理定律，特别是在水面的实验中对于水平的发现。因此韦尔发现他的预测与实验一直是矛盾的，并且最终被迫承认水面一直都是直的。维进一步根据经验形成定律："*这里有一些我不太明白的，水保持不变，但是瓶子是移动的！*"很明显，如果没有实验，儿童是不会成功地发现液体是保持水平的，因为这个发现是经验性的，而不是先验演绎的。但是，为什么这个实验直到第三阶段才是有效的？为什么会耗时如此之长，首先是一个简单的观察(在第一阶段是不可能的)，然后是一个总体的推论(在第二阶段是不可能的)？换句话说，为什么这些儿童开始的时候以注意实验事实为基础，得出了水一直保持水平的结论？

这时候儿童意识到参考框架的不可或缺的地位。为了认识到不管瓶子是怎么倾斜的，水面一直是水平的，桅杆或铅垂线一直是垂直的，通过把尺子和水面以及铅垂线对齐，从而建立水、线、尺子以及一系列瓶子以外的物体之间的关系是很有必要的(即使没有图画)，甚至是唯一的。不然的话，没有什么能够表明水的方向在容器移动过程中是否改变(就像一个相对运动如果没有参考系统是不能被理解的)。现在，很明显地看到，儿童通过尺子或多或少地意识到外部参考的重要。因此，韦耶(我们刚刚在上面评论他的发现的经验性特征)，在画出了正确的画之后说，"*我先画桌子，再画水。*"布罗表示他在画水的时候，观察桌子；帕乌清晰地把尺子和桌子的边缘对齐，尽管他没有这么说；艾斯公开承认"*我看纸或者桌子的边缘*"；特里皮说，"*我把它画得和桌子平行。*"我们可以问他们将桌面和什么进行比较，这会使他们重新提及水面。但是，对于儿童反应的第二

个方面而言，很明显，这不再是一个重要的物理问题，而是依据角度、平行、顺序以及距离来比较不同倾斜位置的几何学问题。简言之，借助于一个全面的系统，这正是坐标轴系统的开始。

然而，在讨论这点之前，我们必须首先研究一些3B亚阶段的例子。这些儿童知道水面是水平的，桅杆和铅垂线是垂直的，并且把这些概念运用于瓶子所有的倾斜角度。

桑(6;6) “如果瓶子倾斜的话，水面是什么样的？——*它会像这样*(用他的手指在瓶子上画了一条水平线)。——画出来。——(画得水平。)*它会像这么平*。——如果我们再倾斜一点呢？——*它会一直都是平的*。”

斯泰(6;7) 立即把水面画水平，桅杆画垂直。“你为什么把水面画成那样？——*因为它一直是直的*。”对于需要按顺序排列的图画以及可移动图案，他都做对了。

莱(7;0) 当把水面画得倾斜的时候，犹豫了一会儿，然后惊呼，“*不，水不会升起来*。”对于可移动的图案，他马上就排列正确了。对于瓶子的所有倾斜位置，铅垂线都是垂直于水平面的。

哈恩(7;3) 也犹豫了一会儿，然后说，“*是瓶子被倾斜了。水还是保持直的，它并不是黏附在瓶子上，当你倾斜瓶子的时候，它还是保持直的。如果你把这个硬纸板颠倒过来，里面的动物会掉下来，但是瓶子里的水一直是直的*。”然后，他画了几幅水平的画，为了确保“*它是直的*”，他测量了水的表面和瓶子的边之间的距离(在瓶子横着放的画中)。在接下来的一幅画中，他注意到这个检查是不够的，因此使用了桌子的边缘作为参考。

沃格(8;5) “*水必定一直都是直的，就像这样*。”铅垂线，也是正确的。

帕斯(9;6) “*它是水平的*。——铅垂线呢？——*垂直的*。——你怎么知道答案是对的？——*我一看就知道了*。——你可以用这把尺子检查一下吗？——(他把尺子从桌子移动到水面来表示平行，然后在他的纸上画了桌子，并且在他画的水位线两端都测量了水和桌子之间的距离)——铅垂线呢？——(他用眼睛检查垂直，来回观察线和桌子之间的直角)”

克瓦(10;7) “*它是水平的*。——你怎么确定你的画是正确的？——*我看桌子*。”

屈埃(11;1) “*水面是直的，因为水一直保持水平*。——你怎么确定？——*你可以测量一下，看看左边和右边到底部的距离是否相等*。——铅垂线呢？——(他把纸转了90°)*产生一个直角*(每一边)。”

蒂什(11;6) “*水面一直都是水平的。我把它画得像桌子一样*。——你怎么看到它是水平的？——*我看到底面是水平的，我把水面和底面关联起来*。”他在一张水平放置的纸上画了一幅成功的画，然后将之移到倾斜放置的纸上，用与纸的下边缘平行来表示水平，用与水平垂直来表示垂直。

这里有几个垂直的例子。

拉伊(6;10)　画了一座山,斜坡上面的物体垂直于水平面放置。在画山轮廓的过程中,铅垂线一直是垂直于水平面的,与斜坡无关。在所有的位置上,钓鱼竿都是垂直的。

达恩(7;6)、克拉伊(8;6)和弗雷德(9;3)是同样的反应。给弗雷德呈现一幅房子垂直于斜坡的画:"*天哪,砖块都会落下来的。没有人见过像这样的房子!*"

或许我们可以看到,这些儿童的年龄在7岁(一些大概是6岁半左右)和大概9岁(运算思维开始)之间。在发展最超前的接近抽象思维的儿童,比如屈埃和蒂什的例子中,我们发现,他们的坐标系统已经变得正规或者说是假设-演绎的。"*我认为底面是水平的。*"蒂什说,"*我把水面和底面相关联。*"这之后他开始根据平行和垂直排列全部物体,不管纸是直的还是倾斜的。对于根据直角坐标系完成一幅图画来说,物理上的水平和垂直因此不再仅仅是偶然。对于最年幼的儿童,从桑到克瓦,他们主张的关键依然是物理定律。然而,仔细检查他们的陈述就会发现:这仅仅是发展的意识开端,因为在处理这些动作的实质机制之前,是以处理表现在物体上的动作开始的。只有在一个广泛的协调过程之后,原则上类似于屈埃和蒂什能够明白地对其进行描述,这些年幼的儿童才能确定水面一直是平的。他们也通过直角和平行的系统(与物理矩形坐标系统截然相反,是几何学矩形坐标系统的本质)来建构物理或心理上的垂直和水平的图画。在这方面,哈恩的例子给我们留下深刻的印象。与3A亚阶段的尝试和错误形成鲜明的对比,他立即说,"*水不是黏附在瓶子上的。*"但是不管瓶子怎么倾斜,它还是保持水平的。然后,为了证明他的主张是合理的,他进行了一系列的测量,一开始只是测量瓶子,结果证明是错误的,这表明他需要把水面和水面与边之间形成的角度和平行进行关联——和一个完整的系统进行关联,这个系统后来被延伸到桌子的表面,因此也就是瓶子以外的物体。

简言之,这个最后的亚阶段的典型特征就是:在考虑中的、整个物体领域的角度和平行之间的协调。正是这个过程,使得儿童能够发现水面一直是水平的、铅垂线一直都是垂直的,一个最终独立于实验观察的概念。

第六节　总体参考系统的发展

到目前为止,这一章仅仅讨论了物质世界提供的自然参考系统的水平和垂直轴。然而,在总结之前,我们应该努力弄明白,为了复制特定位置和距离的排列,儿童是否能够自由利用独立于给定物体的参考系统,这将意味着一个主动的建构过程。

为了研究这个问题,我们使用了以下方法。1.我们把许多的计数器或有一定质量的方形珠子放在桌子上,并且以任意的方式排列它们(不同测验之间珠子的数量和模式的复杂性不同)。然后请儿童使用同样的珠子或计数器复制出准确的图形。儿童在进行最初的尝试之后,认识到了任务具有一定的困难,然后给他一些矩形的条形纸,长15—20cm,并且问这些是否给他提供了一定的帮助。为了帮助他,我们向他展示(当然是分开展示)一条纸应该怎么放置才可以使得一个计数器在它的左边,一个在它的右边,第三个和它一条线,另一条纸应该被放置地和另一副珠子相似,从而来帮助复制另外一个模式。2.两根小棍子被放置在一张不规则形状的纸上,要求儿童在同样的另外一张不规则形状的纸上把两根同样的棍子放在同样的位置,使用尺子和条形纸作为参考。同样的测验也可以使用在普通纸或者方格纸上交叉的棍子(像X),或者用一幅画,画里有一个烹饪的锅悬挂在交叉的棍子上,棍子下面是火。在这种情况下,儿童必须复制图画或者用小棍子在不规则的纸上模仿它,因此纸的边不能被当作参考来使用。

这些方法的明显缺点就是缺乏精确性。然而,它们帮助我们获得了确定的信息,这些信息与之前的结果相比是很有趣的。现在的实验表明,年幼的儿童是怎样对参考系统漠不关心,是怎么样随着年龄的增长逐渐意识到使用坐标轴的重要性的。

在第二阶段(测验在第一阶段无效),为了尝试复制模型,儿童全神贯注于完全的知觉特征。而没有尝试利用参考系统或者当劝说他们那么做的时候,没有理解怎么去运用参考系统。

马尔(6;2) 在桌子的一边放3颗方形的珠子。给马尔提供条形纸,并且向他演示如何使用。他把珠子排列得大概和模型中的珠子对称,而忽略了条形纸。"你看,你可以把这两张条形纸放在珠子的附近(把它们在珠子之间排列成X的形状)。给你,这些是你的。——(马尔把他的条形纸排列得完全不一样。)啊,*这里更倾斜*(他移动了一个珠子,把条形纸放在三者之间的一个角度上)。——现在这里有一些珠子,我打算把它们排列成这样(另一个模式)。——(马尔通过眼睛观察来复制图形,结果又一次和模型中的珠子对称而忽略了条形纸。)——那对吗?——*不对*。——如果我把条形纸像这样排列(交叉),那会帮助你复制吗?——(他不经意地交叉了条形纸,忽略了在四分之一的部分中有两个珠子,然而在模型中每一部分有一个珠子。)——用这六个珠子呢?——(进行了大概的复制,但仍没有使用条形纸)"等。因此,他没有从可以利用的参考点中得到帮助。

阿尔(6;10) (方法1)在第四小节已经报告过(2B亚阶段)。方法2:他通过眼睛观察排列珠子,不是十分准确,拒绝使用尺子作为参考。在方形纸上,他的表现同样很差,并且因为方格的缘故,任务变得更困难。他并没有意识到要使用方格。然后要求他在旁边的桌子上复制一根倾斜放置的棍子。他把棍子和桌子的边放在一条线上,然后意识到错了,倾斜了一点。

罗斯(7;2)　一幅平底锅悬于交叉的棍子上方的画。他通过视线观察复制它们,但两根棍子张开的角度太大了。“*我不能完成这个任务,离火太近了*。——你怎么才能做?——*我需要两把尺子,看看它们张开的角度有多大*(给了他尺子,但是他并没有使用)。*应该看看这些(线)是否更水平*。”

没有必要再列举更多的例子。这些儿童反应的主要特征是:只考虑了图形,而忽略了外部的参考系统。结果,他们没有使用条形纸、方格和尺子。应该注意到他们对倾斜和角度漠不关心,这是我们在第七章就已经讨论过的反应。

另一方面,在第三阶段,我们看到儿童开始使用与图形分离的参考系统。

谢尔(8;3)　复制了一个有5颗珠子的模型,但是一开始没有使用条形纸。“那个完全正确吗?——*不正确*。——如果你仅仅通过观察来复制,这个任务不是那么容易的。这些纸会不会让任务变得简单一些?”他把一张条形纸放在模型的任意一边,一张在他复制物的一边,并且又添加了一张在模型上,但是之后又把它移开,并且把它放在他的复制物的另一边。这样模型和复制物的侧面都有水平的条形纸,这使得他能够对他复制的模型进行些许的更正。对于10个珠子(一个更复杂的模型),他开始的时候又没有使用条形纸,然后把两张条形纸放在模型的两侧形成一个锐角,对于他的复制物也同样进行了上述程序,在这些参考的帮助下排列珠子。

伊哈(8;8)　开始的时候也没有使用条形纸,然后拿了两张并在模型的中间进行交叉,对于复制物也重复了上述程序。这使得他能够对其进行更正。但是尽管现在珠子的位置相对于由交叉所产生的4个部分是正确的,但是没有考虑它们的相对距离。后续的几个尝试也是同样的结果。

杰(9;0)　开始的时候通过眼睛的观察复制模型,然后在三个边包围它,把3张或者更多的条形纸放在他的复制物周围,然后继续进行更正。第二个尝试:2张条形纸或多或少平行地放在模型上,复制物也同样如此,但是距离不同。

亚奇(9;1)　用2张平行的条形纸开始,后来把它们进行交叉(X),“*这样就简单多了,不然你得不到角落(角)*”。

赫尔(8;9)　使用棍子,他测量了每一个并且转动了纸,因此一根棍子变得垂直,然后通过观察猜测另一个的方向。之后,他用尺子和其中的一根棍子排列出一个平行四边形,这使得他更容易估计第二根棍子的倾斜(因为它在平行四边形的内部)。

因此在第三阶段期间,儿童在应用甚至建构参考系统上取得了一定的进步。然而,他仅仅实现了计数器位置和方向的定性比较,还不能协调它们的相对距离和在总体上

的真正位置。

只有在11—12岁之后，在思维的形式运算阶段期间，真正的传统的参考系统才出现，使得位置和距离能够同时被比较。

克莱尔(11;2)　开始的时候，将条形纸平行排列于模型的两边，将珠子放在类似的模式中。然而，他注意到两种平行不是同等的远。不允许他使用第三张条形纸，因此他把它们重新排列成交叉状(+)。"这是不是或多或少比前面的准确？——*更准确一些，因为这样的话距离是相等的。*——为什么？——*因为你必须进行全部的测量。*"然后，他相对于十字排列珠子，将距离考虑在内。

伊尔(11;4)　立即把条形纸放成十字："为什么？——*因为之后你能找到每一个珠子的位置。*——像那样吗(平行)，那个会正确吗？——*不，因为你不能确定宽度是否相等。*——那么当是十字的时候呢？——*可以，因为它被分开了。*"他产生了4个分割，把计数器排列得和模型中的一样。

伯尔(11;10)　两根棍子：他首先测量了连接它们下端的直线，但是不能确定它们的倾斜。然后，他尝试测量它们到其他点的距离，最后使用其中的一根棍子作为横坐标，并且在两端进行了延伸。和这个垂直的，他画了一条直线作为纵坐标，基于这个参考系统进行测量。

很明显，这些儿童尝试使计数器的排列和距离与模型中的一致，最后形成一个真正的坐标系统。但是不像垂直-水平，这类系统直到到达形式运算阶段才能实现。这不足以为奇，因为这并不是由物理的方向所表明(像水面和铅垂线给出的)，而是必须被假设性地提出。

然而，在这里进行这个讨论的意义并不大，因为在下一章我们会以一种更符合儿童自然兴趣的形式，来对这个问题进行讨论。这就是地图或者平面图，比如一个村庄或者花园的布局建构。

第七节　结论：参考框架的建构

在开始部分，我们将概括目前所研究的儿童的发展过程。在第六章(第一部分)我们提出儿童通过"瞄准法"("瞄准法"能够使得物体沿着注意的线排列)和保持一个恒定的运动方向的欧几里得方法来获得直线的概念。因此，直线的概念包含顺序和连续性等拓扑概念，但是相比一个视点或运动方向，它们都是次要的。接下来，第十一章表明只要儿童获得了直线的概念，他就能朝着同样方向排列两条或更多的直线，因此也获得了在密切相关的转化过程中保持平行的直线的概念。最后，第十二章表明在儿童开始

理解直线和平行线的3A亚阶段，通过叠加和旋转两个图形，他还发现了三角形的相似性，不仅通过对应边的平行，而且通过对应角的相等。在3B亚阶段之前发展成熟后一个过程，导致了以一一对应性为基础的、系统的运算群集，并且由此导致了作为相似性必要补充的比例概念。

同时，在相同的发展阶段，同样建立在直线和平行线的基础上，儿童在空间坐标点之间建立第二种对应性。然而，这些由另外一个乘法的原则控制，这个原则是沿着三维空间直角坐标系的一一对应性。

乍看之下，根据这样的一个原则组织的空间看上去是再基本不过的了。当我们观察我们周围熟悉的物体时，它们看上去好像排列在一个平行直线的网格里，这些直线在三维空间内彼此垂直交叉。如果这个观点是不证自明的，那是因为实际经验强加于我们这样的一个结构，凭借所有我们感知为平行的垂直线和看似以直角切割这些垂直线。确实，方形纸的任何一部分、镶木地板、十字街口，或者一组楼暗含了同样的、十分普遍的、无可避免的坐标轴概念。简言之，一个参考框架就好比一个两列或三列的、互相参照的入口表，空间内的所有物体通过进入合适的一列，被按照一一对应性进行排列，因此协调这些物体看起来非常简单。

然而，现在这一章的发现清楚地表明这种观点是完全错误的，即人类具有某种先天的或者心理上早熟的空间知识，这个空间是在二维或三维空间内组织起来的。在开始的时候，儿童甚至没有意识到水平和垂直这两个物理或生理概念，这些结果表明，这仅仅是因为这样一个简单的原因即：知觉仅仅涵盖了一个非常局限的领域，然而一个参考系统是以几个领域之间相互的运算性协调为前提的。

参考框架不仅仅构成了空间意识的起点，事实上，它是整个欧几里得空间的心理发展的顶点，就像同时和继时、同时和等时的概念，定义了一个相同的时间，标志着时间概念的顶点而非起点。[①]一个坐标系统或者参考框架，首先是以顺序和维度等拓扑概念为先决条件的。那也就是说，一组关系使得物体能够沿着"*n*"维空间排列成一个系列。比如沿着一个维度 $O \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \ldots$ 沿着另一个维度 $O \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow C_2 \ldots$ 但是这并不是全部，因为两个系列(同胚)之间的拓扑对应性并不考虑系列内元素之间的距离。与此相反，当它们被并入到一个含有两个或"*n*"个坐标轴 $OA_1B_1C_1 \ldots$ 和 $OA_2B_2C_2 \ldots$ 的系统内时，两个或"*n*"个系列之间的对应性保存了距离 $A_1B_1=A_2B_2$，$B_1C_1=B_2C_2 \ldots$ 并且引入了一个连续间隔之间的度量等值 $OA_1=A_1B_1=B_1C_1=\ldots=OA_2=A_2B_2=B_2C_2 \ldots$

正是因为这个原因，引入这个系统的维度导致了拓扑概念中的"维度"的根本转变，拓扑概念中的"维度"最初取决于简单的概念，比如围绕和闭合(比较第四章)。这些概念没有考虑平行线和直线，然而最基本的参考框架内的轴包括了以直角切割其他线的直线，前一个或者平行(零度)或者以特定的倾斜角度切割。因此，参考框架是逻辑乘法

---

① 《儿童时间概念的形成》。

运用于拓扑系列的结果，通过在“n”个维度上引入直线、平行线、距离和角度的概念，拓扑系列被修改了。为了将物体之间连接在一起，因此构成一个欧几里得空间的总体组织，除了基本的拓扑关系，还需要应用整组的欧几里得概念，这也正是为什么它的发展这么晚才出现。

为什么知觉独自无法胜任这个任务，现在原因也同样很明显。确实，知觉能够粗略地估计顺序、距离、平行和角度。而且和智慧一样，基本的参考系统通常被包括在内，因此可以在一个“背景”下感知一个物体粗略的方向、大小和形状。然而当知觉和智慧进行比较时，知觉信息的概略性和不充分性就会变得很明显。

在第一章中我们看到，即使形状再认这一基本的过程，也需要受智慧控制的“知觉的主动性”的帮助。又一次，直线的形成也取决于运算化的思维。同时，第十一章表明，在知觉估计的准确性依然很低时，平行线被运算性地组织，在这种情况下，运算结构最初由知觉创造，对知觉自身进行反应且更正知觉自身。同样地，第十二章中对角度、相似、比例的研究表明：在与概念比较进行联系之前，知觉的“变形”依然是很粗略的。至于知觉空间的实际背景，沃斯滕的方向判断，特别是估计倾斜直线的长度的实验表明：就直角坐标系而言，8岁或9岁以下儿童还是不能很好地组织知觉空间，这也是我们自己一直所主张的。因此一方面，在判断直线是否倾斜时，年长的儿童比年幼的儿童判断得更准确，因为年幼儿童不知道怎么运用参考系统，在参考系统内会出现必要的平行线和角度。另一方面，年幼的儿童能够比年长的儿童（甚至成人）更精确地估计不同倾斜直线的长度，因为他们忽略了方向，并且不能在一个参考框架内定位倾斜的直线——在这种情况下会阻碍对倾斜直线和垂直直线长度的比较。现在很明显的是，知觉的协调在9岁的时候达到了最大效率，也就是在同样的年龄，垂直和水平的概念最终以潜在的坐标轴的形式出现。

这很自然地就引出了这样的一个问题，知觉的发展是智慧的进步的原因还是效果。我们将通过以下方式回答这个问题。第一，如果发展过程在特点上是纯知觉的，那么我们很难理解它的作用是什么以及为什么它的发展需要这么久。另一方面，智慧的作用是完全可理解的。它包括横跨更大的时空间隔去建立永久的关系，不仅仅在每一个连续的知觉领域，而是依次在每一个领域之间。这样，知觉活动能够通过运算化的机制被赋予一个潜在的方向，从而使得实际的方向能够被考虑。第二，我们同样可以理解为什么思维的发展如此缓慢，因为就像我们所看到的，它不仅仅需要完成顺序的运算（和单纯的顺序概念不同）——因为坐标轴是二维或三维空间内顺序关系之间的逻辑乘法——而且需要欧几里得空间的基本概念（直线、距离和测量、平行线和角度）合并为一个单一的运算化整体。

总结这个讨论，我们得出了这些最终结论。拓扑关系是物体或者模式内部的关系。与之相反，通过建构参考框架完成的欧几里得关系，是在无数个物体或模式之间建立的基本关系（尽管仍然影响它们的内部结构），这样的关系使得我们能够在一个有组

织的、包罗万象的系统内,对它们进行定位。这就是为什么建构水平-垂直轴和协调透视同时发生的原因,因为后者也构成了一个总体的系统,在这个系统内物体或模式之间是彼此联系的。但是,射影空间本质上是视点和与这些视点相关的图形的协调。另一方面,作为欧几里得空间的框架的坐标轴,根据物体的客观位置、位移和相对距离将它们联系在一起。因此9岁或者大约9岁,也就是具体运算初步成形期间的中点,是儿童空间概念发展(也就是完成适合全面的欧几里得和射影系统的框架)的决定性转折点,而且我们观察到一个很有趣的现象:其他全面的系统——比如时间、协调运动和速度——也正好在相同的年龄被完成。

第十四章　示意图和村庄模型示意图①

从前面的章节中，我们可以看出儿童从拓扑概念向射影和欧氏概念转变是多么简单。首先，儿童对视角、截面、射影和旋转平面认识的改变起源于不同观点的协调；其次，起源于直线、平行线、角度、坐标系的守恒。虽然我们没有对欧氏距离②做一个详细的研究，然而有一点很明确，射影空间概念和欧氏空间概念是共同发展，并且是相互依赖的。上一章的发现重新证实了这一结论。这些结论表明：基础的欧氏概念演化的最终阶段是物理参照系统的建构，它是与不同观点的逐步协调一起发展起来的，后者正是射影空间的显著特征（见第八章）。

为了更深入地检验这个假设，同时对现阶段一系列研究做一个总结，从建立一个更准确的拓扑格式的意义而言，没有比观察儿童如何画示意图更好的了。类似的活动非常重要，不仅从心理学的角度来看很重要，考虑到了儿童的几何绘画；而且从几何学的起源来讲也很重要，在古埃及，几何学就是起源于田野观察。

在此情况下，就像在先前的实验那样，尽量将我们的指导语控制在最低水平，去获得儿童最自然和自发的反应，还把我们的询问限制在两个问题上。第一个实验是上一章的几项研究的直接结果，内容是在一个有路有河的风景模型的自然参照系统的帮助下，将一个物体放在某一个位置。第二个实验是以相同的布局再现一个村庄和周边环境的模型，或是按一定的比例画一幅画。

第一项实验只针对年幼的儿童。在一个粘贴板上有这样一个模型：有一条河，一条路和几个谷仓，要求儿童在另一个相同的模型上，将一个玩具放在某个位置。玩具的位置要和原模型上的位置相对应。第二个模型是将原模型旋转了180°得到的，这样儿童在第二个模型上摆放玩具时就不能依据玩具在原模型上相对于自己的位置，而必须依据玩具相对于原模型中其他物体的位置。这是有困难的，但是这个基本的参照系比在倾斜的瓶子里判断水的高度（见第十三章）或是复制珠子的模式图（第十三章第六节）简单多了。在前一个例子中，忽视瓶子内部液体和参照点之间的邻近关系，寻找一个外部的参考点是必要的。相反，为了在模型中放对玩具的位置，邻近关系是最主要的原因，同时其他参考物体的顺序和距离会对邻近关系进行补充。此外，本章的研究与复制珠子的序列不同。由于所有的珠子都需要被排列（就像在本章的第二个实验中的示意图

---

① 与M. H. Aebli，A. Morf，以及Mlle. B. Demetriades合作。

② 在*La Géométrie Spontanée de l'Enfant*一书中解决，对测量（距离和尺寸）概念的贡献很大。

一样),然而在本研究中,只需要在一个已经存在的模型中放置一个玩具。当然,第二个模型被旋转了180°,因此儿童需要协调射影概念和欧氏关系,而这恰恰是该问题的有趣之处。

一方面,年幼的孩子还不能在坐标系中组织空间物体,但是却可以比年长的孩子更好地理解倒置的图或者镜像书写,这使得本章的研究对于他们来说更为简单。另一方面,左-右逆转和前-后逆转使本问题更困难了一些。

至于模型布局,是一个小型的微观景致,由一个村庄模型,几个谷仓,一栋教堂,几棵树等组成。这些物品以斜视的角度(大概45°)或是俯视的角度(鸟瞰角度)被放置在桌子上或地板上。第二个实验很明显比第一个更难,因为所有的物体都是相对摆放,虽说没有旋转(除非有年长的儿童被要求从其他的角度作图)。然而,就像放玩偶一样,布局图代表了一个双重问题,协调从不同角度看到的模型——从某个特定角度看到的村庄图——采用欧氏坐标系的观点从直接的视觉经验向基于坐标轴、距离等的示意图进行转换。

第一节　在一个风景模型中放一个玩偶

这里有两个相同的代表空旷野外的模型(见图21)。模型A中有一条河从上到下穿流而过,在河的右岸有一座山,山上有一座黄顶的房子,还有一条路从左下角起斜向上穿过去。路的左边有一座红顶的大房子,一条小路把它和黄顶的房子连了起来,通过一座桥跨越了河。在左上角,有三棵树象征着一个小山丘。

模型B除了旋转180°外,在所有方面都和模型A相同。用一张屏风把两个模型分隔开,以免儿童同时看这两个模型。要求儿童在模型B上放一个玩偶,这个位置要和研究者放在模型A上的位置相同。

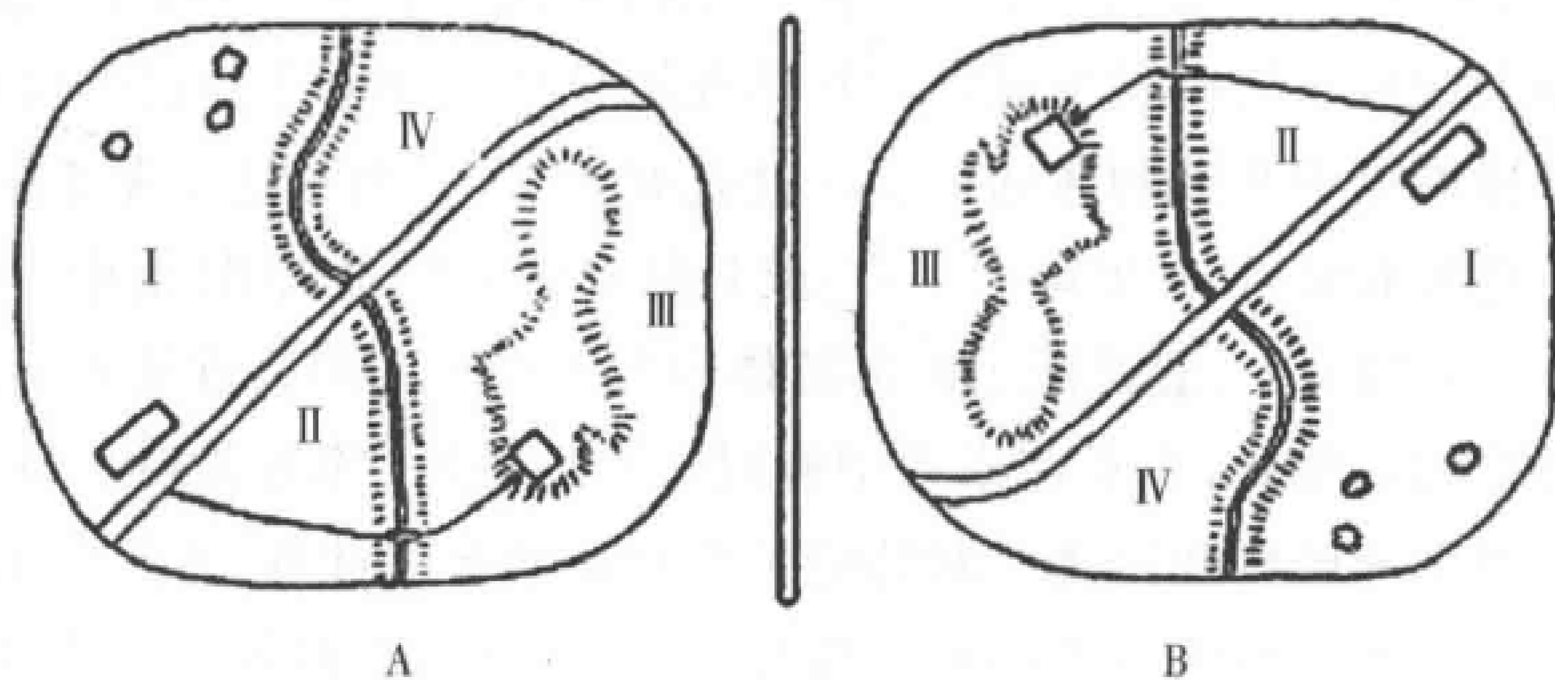


图21

一开始没有屏风,模型B也没有被旋转。要求儿童"把这个人放在相同的位置",位置的选择比较简单,例如房子的屋顶。随后模型B被旋转,儿童重新开始实验。最后,

实验者放上屏风，儿童交替地观看模型A和模型B来检验他的猜想。当儿童将玩偶放在几个位置后，让他闭上眼睛，尝试着去解释一下他所做的。他的解释水平赶不上他的行为水平。

这个玩偶已经相继被放在15个标准位置，它们被复制的难易程度是不同的。提前给儿童对此进行详细的描述是不起作用的，不言而喻的是，实验的关键不仅仅在于探清儿童能否在复制品中进行定位，而且还在于观察他们在尝试这样做的时候所采用的方法。换句话说，要观察他在寻找需求位置时要采用哪些关系和联系。从这个角度来说，屏风是一个非常有用的设备，它可以被拿走来核对正误或被重新放上来让儿童重新思考。

只能基于儿童的反应或平均反应来识别发展阶段。尽管儿童在这15个位置中的每一个位置上的反应顺序都相同，但是因为位置间的难度存在差异，儿童给出的不同解决办法间存在相当大的差异。可以这样说，儿童在第一阶段（3岁半到4岁），通常通过相似或周围环境的拓扑关系来确定位置。用心理学术语来讲，就是说把玩偶放在一个相似的“设置”或“环境”中（在田野中等），或靠近一个相同的物体，并且儿童没有考虑过这个物体相对于自己的左-右关系、前-后关系以及距离等。在第二阶段（4到7岁），儿童对多个位置经常出现不对应的答案。原因可能是这个阶段的儿童处于过渡期，受到知觉和概念因素的交互影响。在2A亚阶段，儿童在摆放玩偶的位置时可能是以自我为中心的，他们意识不到这是很主观的看法。这就是说，儿童依据自己的位置来摆放玩偶，忽视了第二个模型是倒置的。不过，他能考虑到一些关系，不再简单地依据周边物体的相似性来摆放玩偶。在2B亚阶段，他的想法越来越协调，直到第三阶段的出现（6岁半到7岁），通过逻辑乘法，儿童可以考虑所有的关系。

这是第一阶段的一些例子。

玩偶被放在第四部分（右上角），在河流的右侧，路的左边。杰（3;0）在模型B中将他的玩偶放在了第一部分（右下角），没有考虑到路的问题。阿尔（3岁0个月）同样将玩偶放在旷野中，他放在了第三部分，在河流和大山（在他右侧）之间。

马尔（4;0）　也把玩偶放在旷野中，但是在靠近路和河流的交叉口的位置。

当把玩偶放在大山和河流之间，靠近黄房子的位置。最初，阿尔在模型B上将玩偶放在相对自己是同一位置的地方，忽视了旋转的影响。随后，他把它放在靠近大山的位置（就像在模型A上一样），但是没有考虑到它相对于黄房子或河流的位置。

当把玩偶放在河流中，但是在模型A的底部，所有位于第一阶段的儿童在模型B中都将玩偶放在了河流中，但是阿尔把模型放在河流的中下位置，然而鲁特（3;6）把它放在河流的中间位置（在路和河流的交叉口）。

当玩偶被放在靠近黄房子的地方，位于大山的山顶，处于模型的右下角。阿尔

在他的模型上将玩偶放在山的下方,完全忽视了黄房子。波(3;0)刚开始也是这样做的,随后把玩偶挪到靠近红房子的位置,最后又把它挪到黄房子的边上。

对这些反应的解释其实不难理解①。玩偶的位置仅由相似性或是最接近的周围事物决定,而不考虑其他关系的逻辑乘法,也不能综合考虑几个相近的事物。因此模型*A*中的玩偶被放在田野中时,儿童在模型*B*中也把玩偶放在田野中,没有为到底放在哪个部分、周围有哪些物体而感到困扰,也没有考虑到模型的旋转使这些都改变了。如果在模型*A*中,玩偶被放在了河流中,那么在模型*B*中,它也会被放在河流中,也可能会被放在任何地方,他们忽视了外部的参考物体和模型的旋转。如果玩偶既靠近黄房子又在山顶上,那么儿童可能会只考虑在山上而忽视了黄房子(阿尔),或者是忽视了山,而把玩偶放在黄房子或红房子旁边,没有考虑到具体的颜色。在任意一种情况下,儿童都不能同时考虑多个属性,而这恰恰是儿童在处理多个关系时的反应的最显著特征。

儿童不能使用逻辑乘法,出现了三个相关的结果,第一个是仅考虑基于周围环境(在田野里或在河流里)或邻近(房子附近)关系的拓扑关系;第二点是不能协调射影观点,儿童忽视了模型的旋转以及随之引起的角度的变化;第三点是儿童忽视了欧氏关系(例如直线的距离、角度等),而这些正是坐标系的基础。

与之相对照,在第二阶段第一亚阶段,儿童开始建立一些关系,会或多或少地参考远处的物体。然而,多种观点仍然不能协调,更不用说让他们考虑到一个有组织架构的地形。

当把玩偶放在模型*A*上第四部分的田野的中间时(在河流的右侧,路的左侧),克拉(3;6)刚开始把玩偶放在其他部分,就像在第一阶段做的那样,然后进行了纠正(这时候还没有使用屏风),把它放在了一个绝对位置(例如,在第二部分,好像模型*B*没有被旋转)。他尝试着纠正错误,即使他弄错了结果,但这也预示着2A亚阶段的开端。克里(4;6)在有屏风的情况下,立即将玩偶放在和克拉一样的位置。亚奇(5;1)也是这样做的,然后寻找它和路的联系(有点远),接着把玩偶放在了路的右侧,最后又把它放在了路的左侧。

当把玩偶放在河流中(模型*A*的下方)时,维尔(3;9)也把玩偶放在了河流中,刚开始是朝向模型B的中心,然后把它放在了底部的右侧。克里和蒙(4;0)也是这样做的。

当把玩偶放在黄房子旁边,所有处于这一个阶段的儿童都成功地再现了位置;有几个儿童犹豫是将玩偶放在房子的左边还是右边,他们没有成功,因为没有考虑到模型的旋转。

① 需要说明的是:第一阶段得到的反应都是在没使用屏风的情况下得到的,目的是为了让儿童更容易地在两个模型之间进行比较。

当把玩偶放在河流和路的中间的田野上时，儿童考虑了这些特征，但是因为没有考虑到旋转的影响，没能把玩偶放在模型*B*中正确的部分。乌德(4;0)尝试在第一部分找到一个合适的位置，他把玩偶放在了模型*B*的第四部分，因为它像模型*A*中的第一部分一样，没有大山，也在模型*B*的左侧。

儿童相对于第一阶段的进步是不言而喻的，不再只根据一个特征放置玩偶(例如田野或房子)，他们可以参考两到三个特征(路和河，河和山或房子等)。儿童可以逐渐地协调很多物体的相对关系，左-右和前-后关系对他产生越来越大的影响。然而，从某个特定角度出发的时候，儿童不能协调一系列复杂的关系，因为还不能理解模型被旋转的影响，不能正确判断物体相对于自己的方向。此外，在一个坐标系中也不会放置这么多物体，只会放两到三个物体用作参考。

与之相对照，在第2B亚阶段，儿童从射影参考系和欧氏参考系的尝试向第三阶段的完整通用的参考系过渡。

玩偶被放在田野里(第四部分，模型*A*的右上方)，在路的左边，河的右边。蒙(5;0)刚开始把玩偶放在模型*B*的左边，朝向上方(第三部分)，接下来把它拿到下面朝向底部(第四部分)，在河和路之间找到了正确的位置。

当把玩偶放在第三部分的大山和河之间时(模型*A*的右下方)，蒙先把玩偶放在模型*B*的右边(第一部分)，随后把它挪到左边的正确位置。克拉韦(4;11)一开始就把玩偶放在了正确的部分，但是在找到正确的位置前，他一直在大山周围徘徊。同样的是，巴尔(5;1)把它放在相对于山和路很低的位置，随后把玩偶挪到远离路的位置，很靠近正确位置。皮塔(6;3)刚开始几乎放对了位置，但是他对比了玩偶相对于路的位置，又把它放在远离了路的位置(由模型*A*引起的困惑)，接下来把它放在了第三部分的黄房子的左边(再一次通过模型*A*类比过来)，最后把玩偶放在了黄房子的右边。

当玩偶被放在靠近红房子的位置时，卢策(5;5)一开始把玩偶放在了河的错误的一侧，随后纠正了自己的错误。巴尔(6;6)首先俯瞰了这些邻近关系，仅仅将玩偶从底部拿到顶部，他考虑到了前-后旋转的影响，忽视了左-右也发生了翻转。然后他把玩偶放在右边，房子对面，但是在河的错误的一侧。然而，最终他找到了正确的位置。其他的儿童能考虑到左右的翻转，但是忽视了模型也发生了上下颠倒(前-后关系)。

与2A亚阶段的儿童不同，那些儿童忽视了旋转的影响，现阶段的儿童可以考虑到这些影响，虽然是一步步地，从刚开始只考虑到一个方向的旋转到逐渐考虑到了另一个方向也发生了旋转，儿童逻辑上的进步也造成了一些矛盾的结果，导致他在处理更远处

的特征的过程中,会忽视明显的相似性(就像巴尔在红房子边的表现一样)。因此,一开始,各种各样的关系是不相联系的、不完整的。当同时考虑两个距离时,儿童的这种不协调会特别明显。儿童倾向于关注第一个,忽视第二个,接下来会做得相反。经过一系列尝试他才能正确地处理这种关系。

简而言之,儿童在这个亚阶段的表现是在协调的过程中循序渐进的一部分。但是这只能通过尝试和错误获得,儿童经常通过顿悟来处理射影关系(左–右、前–后)和欧氏关系(在两个维度上考虑顺序和距离)。这些协调不同观点的尝试和系统对比的使用都起源于多种关系的逻辑增长。同时,这个过程是依靠纯直觉得到的,不是通过已有的运算实现的。

最后儿童发展到第三阶段,在这个阶段的特征是他们掌握了各种关系。一共有41个儿童参加实验,我们没有发现一个儿童可以在7岁之前就能正确地处理这15种关系,然而7到8岁的儿童可以正确地处理所有的关系。

从3A亚阶段一开始,模型的旋转不再对儿童的判断产生影响,儿童能根据模型的双维度提供的双参考来放置玩偶。儿童在这么小的年纪即将出现的反应,如不同角度间的协调(第八章),垂直水平坐标(第十三章)等应该引起不小的惊讶。在当前的实验中,只需要在一个旋转180°的模型上摆放一个物体。然而,正因为这种情况,观察儿童的思维转变过程是多么有趣:从第一阶段的拓扑关系占绝对优势,到第二阶段和第三阶段的射影和欧氏关系逐渐发展,并在演化[①]中互相加强。

第二节　村庄模型布局:技巧和一般结果

随着布局的建构,我们再一次关注更普遍更复杂的问题,在之前的实验中就简单地介绍过。在第二个实验中,模型中要放置多个物体,儿童要在模型的轮廓图或示意图上,考虑它们的相互关系。

我们主要采用两种方法,第一种方法适用于所有年龄的儿童。它包括让儿童从某个特定的角度画物体,并且是按照一个缩小的比例画出物体。第二种方法主要适用于更年幼的儿童,他们也被用作对照组,让他们用实物再现一个比例缩减的模型。要从儿童的口述里分辨出他这么做的原因,要时刻牢记在上一章节中的一句话,儿童在空间概

① 非常有趣的是,当M. H. 埃贝利(M. H. Abeli)把模型*A*放在成人面前时,成人只允许有不到一秒的时间(平均为0.1秒)来决定把玩偶放在模型*B*上的15个位置中的一个位置。所有被试的表现和处于第二阶段的儿童的表现一样。当然,玩偶的位置不只是受限于拓扑关系(第一阶段),因为成人的空间特征是欧氏的、射影的。然而,这么短的时间妨碍了运算协调发挥作用,结果就是成人出现了很多明显的尝试错误,相同的逆向的错误,不能同时考虑多个关系等,和2B亚阶段甚至是2A亚阶段的儿童的表现类似。

念发展的过程中,射影概念和欧氏概念是相互影响的。换句话说,我们需要综合第六章到第十三章的概念。

事实上,格式的发展包括:(1)选择一个特定角度,也要有一些图示的约定来表现它。例如,在地图上,下边代表南,左边代表西等。一个村庄或区域的示意图通常采用俯视或斜向下的角度来表示物体等。因此,从一开始,地形图上的表示都带有射影特征。(2)一个坐标系统——它的功能是不言而喻的——与直线、平行线和角度的概念相连。(3)把它缩小到特定的比例,这包括相似和比例的概念。因此,要形成一个完整的概略图,需要整合先前的所有概念,同时还要看它们是怎么相互联系的。

然而,因为这些概念是相互依赖的,明智的做法是一开始就采用很灵活宽泛的方法来询问儿童,同时还要采取某些办法来单独检验某些特殊的变量。这里采用的主要做法是:在桌子上或是地板上放置一系列物体(例如教堂、房子、树等),同时让儿童从俯视(鸟瞰)的角度或是45°的角度将其画在一张比模型小的纸上。作为对照,还可以进行一系列追加实验,这要根据儿童的回答来选择。下面是大致的实验过程。

首先,儿童一完成他的第一幅画,实验者就把模型中的所有物体拿掉,让儿童以自己的画为参考,再现它们的位置。这是一个非常有用的对照实验,如果模型被恢复了,原实验得到了重复,要么儿童的表现会大有进步,要么他们的错误会表现得更加明显。第二点,原模型可能被简化了,或者任务被简化为从不同的角度画三个物体,接下来对比从不同角度绘制的模型。最后,给儿童呈现很多画,让他们评价和对比。

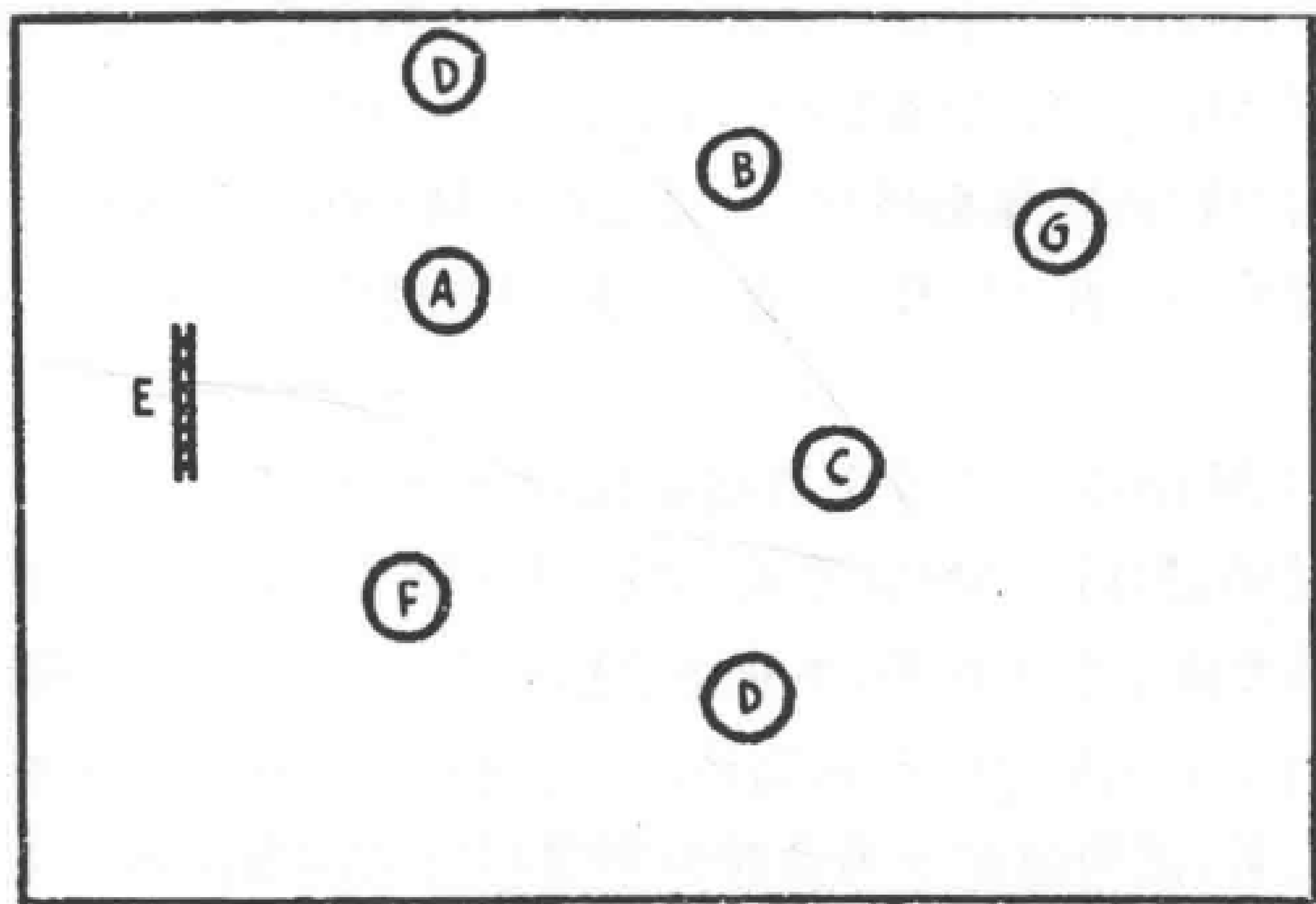


图22 8个物体布局模型

不过,使用这些方法时出现的主要困难起源于儿童自己的绘画所起的作用。特别是对于年幼的儿童来讲,实物建构很重要。出于这个目的,我们在硬纸板上放了一个村庄模型(见图22),给儿童一个硬纸板和一系列相似的物体,让儿童再现模型。在这种情况下,比例问题可以忽略,或者说硬纸板和物体可以比模型中的小。很明显,硬纸板模型除了纸板的边缘和物体之外,不能再包含任何线或参考点。此外,儿童可能会得到和

模型中数量一样多或者数量更多的物体,这样的话,他就得从中进行选择。

至于物体实际的排列,最好像控制变量一样,对于所有年龄的儿童保持对应(至少对于某些物体来说不必要进行简化),这样我们便可以对比不同阶段的儿童的表现而无需排除其他变量。

我们通过多种方法得到了以下的反应。在第一阶段(一直持续到差不多4岁),在两组物体之间,儿童没有获得任何空间关系或一一对应的关系。因此,如果他们得到了比模型中数量更多的物体,他不能选择出正确的数量,并且他的排列在位置和顺序上与原模型都不对应。尽管儿童经常把物体放在一堆或是放成一排,但是和模型中的顺序不一样,他最多观察到了某些邻近关系。

在第二阶段(通常从4岁持续到6至7岁),儿童能找出一些和模型的对应之处,并尝试着把它们放在相似的位置。不过,他还不能在参考系中定位一个位置,因为他还不能在三维空间中考虑距离和顺序的关系。通过实物建构的方法,儿童创立了一系列物体的小集合,它们彼此之间不相联系、却以集合的形式组织起来,并且通常是成对的。这种组织的发展可能起源于儿童逐一地看物体(有时会导致颠倒,当儿童从右边开始看,却是从左边进行实物构建),或是起源于物体间的相似(例如,把树放在一起),再或者是由于将相距较远的物体放在一起,儿童将一个物体当作中心的参考点,然后从它向外建构。儿童的绘画遵循相似的准则,物体的排列和在模型上的一样,但只是沿着一个维度,就像在第一阶段(在这一点上,在绘画和实物构建中存在不对应)。在第二阶段,距离就像观察角度一样被忽视了。至于参考系来说,物体之间的排列没有协调,物体和硬纸板代表的周围环境之间也没有协调。因此,一组物体会挤在一起,在左侧或是朝向纸板的底部;然而,其他的物体会挤在一起,忽视了第一组物体的位置。这种现象在2A亚阶段很典型,然而到了2B亚阶段,儿童已经通过直观建立了很多联系,从而预示了向第三阶段的发展。

第三阶段(从7到10岁),参考系被逐渐建立起来,儿童首先通过逻辑上的质的联系,开始于左-右关系,然后是前-后关系,只能部分地考虑到距离问题。基于这两种关系的大致排列变得大致上是正确的,虽然细节错误还会持续一段时间。此外,当要改变绘画来适应模型的变化或是来包括新物体时,儿童就会出现大的困难。儿童发现很难和其他系统建立联系,因为他在绘画的时候要采用特殊的参照点。儿童在表现从某个观察角度看到的事物时也要经历一系列的发展过程。

处于这一阶段早期的儿童会出现一些相当奇怪的妥协表现。当在示意图上画模型的时候,他只画了房子的屋顶,但是他以侧视图来表现房子,但是对于其他物体——不是全部——却是透视的角度。另外,当观察者的观察角度改变的时候,一些物体的相对位置会发生改变,儿童在颠倒左-右、前-后关系的时候仍然会有困难。在另一方面,在下一个亚阶段(3B亚阶段),就定性的关系而言(顺序上成对的关系),参考框架有了一个稳定的形式,还有不同观察角度的协调,虽然他们仍然缺乏对距离的准确的判断。

直到第四阶段(与第十三章第六节有关传统坐标系的结论对应),儿童才能以更广泛和更一般的方式理解示意图的概念。这就是说,儿童通过对距离的精确测量、图的按比例缩减以及一些早已掌握的关系共同完成了对示意图概念的理解。

第三节　第一阶段:除了一些基本的邻近关系外没有空间对应

儿童在这个阶段的最初反应是值得详细观察的,因为他们在随意的排列和空间对应上开始了真正的尝试。不幸的是,儿童除了最基础的拓扑关系之外没有掌握空间的对应关系。

杰(3;3)　看到的是这样一个模型:在一个长方形的硬纸板上,有8个物体分散在四个部分(这里采用的方法是简单重建法,同样的比例,只不过是多了几个物体以便让他进行选择)。杰在他的硬纸板上将14个物体挤在了左下角(不只是模型中出现的8个),没有任何顺序可言,而且它们之间的距离非常近。他似乎对模型上的空白区域有点害怕。至于多出来的那6个物体,有一些是板子上已经存在的物体的复制品(在模型和复制品中没有把它们的数量计算在内),其他的就是原模型中没有的物体(因此也没有逻辑上的对应关系)。有一些物体在外观上有相似之处,但这纯属偶然。

贝尔(3;1)　表现出相同的趋势,他使用的是同样的方法,将物体挤在纸板上的一角,同样忽视了距离和参考点。他也将原模型中没有的物体放了进来。另一方面,他在再现对应物体之间的邻近性时表现出了明显的努力。因此,在原模型中被放在左边缘的栅栏,在复制品中也被放在了相同的位置,然而两2动物被放在树旁边,在原模型中有一只动物靠近树。但是,在原模型中只有2棵树,彼此是不靠近的。贝尔在他的复制品中把4棵树排成一排,因为他在将概念上相似的物体放到一起时,不能区别它们的空间和逻辑邻近性。

克拉(3;11)　也用的是同样的方法,他表现出了两个有趣的反应(在其他例子中也可以看到)。在原模型中,栅栏靠近纸板的左边缘。然而,因为克拉的纸板在原模型的左边,他把栅栏放在了纸板的右边缘以便于让它和原模型的栅栏尽可能地近。接下来,他不再关注栅栏,他开始把物体或多或少地排成直线,再现了一些邻近物体(例如,一对马),但是它们没有完整的系统的组织结构。他也同样地把几个原模型中没有的物体包括进来。

亚奇(4;0)　被要求画一张乡村的图,乡村的右前方有一个湖(有一条上面有桥的河流向它),左边有一些树,一块绿色的草地(在右边),一个栅栏(左侧中心位

置),一块棕色的田野(左前方),一条路斜着穿过,用树和草地将湖和棕色的田野分隔开。他没有使用整张纸来绘图,他将物体成对放置:两棵树,田野和栅栏,路和湖等,所有物体都是沿着纸的下边缘。

这些最初的反应证实了那些儿童已经掌握的,即拓扑邻近关系的主要特征。事实上,这个特殊的实验使辨别儿童掌握拓扑关系、逻辑关系和前逻辑关系的关键点成为可能。

主题的选择使得本章成为之前观察的现象的概要。让我们通过回忆逻辑数学和时空关系的区别来展开讨论。前者研究所含物体的相似和区别(例如,逻辑分类、关系或数量),然而后者用于处理这样的物体,不管简单或是复杂(一组物体被视作一个结构下的复杂物体)。在这方面,儿童需要绘画或是复制的物体可以被认为是逻辑数学的(物体的分类或是数值的集合),或者是空间的实体(一个结构下的物体)。当实物构建或是示意图画好之后,儿童需要同时审视这两个方面。换句话说,物体必须是相同的(逻辑对应),按照相同的模式排列(空间对应)。

目前,在逻辑-数学运算(或对应)和空间运算(或对应)在相似(或区别)的概念和邻近(或分离)关系的概念中有一条明确的分界线。前者是逻辑-数学关系的起源,而后者是空间关系的起源。因此,两个相似的物体可能属于同一逻辑分类。然而,在空间上是分开的。两个邻近的物体在空间上是有联系的,但是它们有很大差别。

从这个角度来看,儿童在第一阶段的反应的重要性在于因为他们不能掌握逻辑-数学或是空间的对应关系(至少就本实验而言),他们不能辨别出空间相似或是逻辑相似(或是分离和差异)的区别。因此,杰在他的模型中多放了6个额外的物体,其中的一些和模型中的物体没有关联,他也没有观察到它们和模型中的物体在逻辑上或是数值上的对应关系。因此,他也不能按照模型中的空间顺序把它们排列起来,无论是在一个维度还是在多个维度。反而,他将所有的物体都挤在一个角落,只覆盖了可用表面的八分之一。他为什么要通过这种方法将物体挤在一起?他是通过这种方式来表明它们形成了一个逻辑的数值集合,还是想说它们在空间上是有联系的?在这种情况下,想判断他是想表示物体的邻近性还是纯偶然地把它们放在一起是不可能的。然而,相当明显的是,他想表达空间和逻辑上的联系,虽然他没有成功区分它们。结果就是他摆出了一个介于逻辑群组和周边物体模型的集合,但是他不相信空白区域的表现(如第十三章的第六节)表达了他想超越空间和逻辑关系的需要。

另一方面,贝尔一开始的表现也是这样,明显地尽力去再现邻近之处。就像在原模型中那样,他把栅栏放在纸板的边缘,把一只动物放在树旁边。但是,有趣的是,我们观察到他以简单的对应性为基础,把4棵树(是原模型中树的数量的两倍)放在一组,没有考虑它们的空间邻近性。与之相对照,克拉和亚奇的表现预示着从简单的邻近关系向序列顺序转变(见第三章),尽管它只是线性顺序,并且和模型中看到的顺序不对应。这

些儿童，克拉在他的实物建构中，亚奇在他的绘画中，仅仅以线性顺序再现在模型中看到的物体（有些是俯视，有些是侧视），有些邻近关系是正确的，有些不是。在这里，空间模式开始和逻辑-数学结构分离，空间模式的出现预示着儿童将要到达第二阶段。

第四节　第二阶段：部分协调

儿童在4到7岁时，协调几个小组物体的能力有所进步，虽然此时还不能建立任何一般的关系。我们可以从2A亚阶段——通过实物建构方法的例子来展开讨论。通过实物建构的方法获得的反应比通过画示意图的方法获得的反应进步更快一些。

马尔（4;0）　得到了比模型中更多的物体，刚开始他的反应和在第一阶段的儿童的反应类似，除了他有利用纸板上更大空间的倾向。一个例子就是他可以沿着纸板的上下轴正确地摆出一个邻近关系。在他的第二次尝试中，他每次只得到一个物体，他把一座房子放在模型的中央，然后放了第二座房子，一棵树，把一只动物放在第一座房子的左边。他把第一座房子当成参照点，从上到下摆放物体。

阿恩（4;1）　一开始的反应也和第一阶段儿童的反应类似，随后成功地摆出了两个有三个物体的独立的小组。物体排列的顺序和模型相对应，并且占据了硬纸板的整个区域。但是，两个组之间没有整体的联系，两个组和纸板的边缘之间也没有联系。在一个组中，一个栅栏、一座房子和一棵树形成了一个角或近似一个曲线，这或多或少是正确的。在另一个组中，一座房子、一棵树和一只动物摆成了穿越纸板的斜线。

戴尔（5;3）　把栅栏正确地放在左侧，把其他的物体粗略地摆成圆形顺序，依据的是他在看模型上的物体时眼睛的运动轨迹。他成功地再现出一些邻近之处。但是，整个布局集中于纸板的左侧，因此和纸板的边缘没有联系。在第二次尝试中，戴尔有了明显的进步。他先把沿着边缘的物体摆在了正确的位置，按从1到5的顺序摆成了一条线，在中央物体前面，中央物体的位置似乎是由这五个物体决定的。其他物体的摆放就毫无顺序可言。

利尔（6;9）　先确定了一个物体的位置，然后从它开始分了两个方向，首先是把三个物体排成一条线（这和模型上的不一样）；接着把两个物体放在了一起，却忽视了它们在模型上是分离的事实。整个布局被下移了，朝向纸板的底部。这两个模型除了含有共同的元素外没有什么联系。

让（6;3）　把一些物体放在一起，它们之间并不协调，一个物体被单独放着（错误的），另外三个物体被放在一条垂直的线上（同样也是错误的），整个布局集中在纸板的左侧。

下面是一些使用画示意图的方法得到的例子。

克里(5;4)　看到的是这样一个模型:最前面有一个谷仓,后面有一棵松树,右边有一座房子,房子在谷仓和松树之间。要求儿童"按照模型中的排列来画图"。在他画的示意图上,右边有一座大房子,中间有一棵松树,左边有一座谷仓(在一条线上)。同样的是,本来是排列成一个三角形的三棵松树被画在了一条线上,本来在松树后面的房子被简单地画在了线的右边。

巴(5;4)　看到的模型和亚奇(第三节)看到的相同。他在纸板的四周画了草地,把三棵树画在了一条直线上,右边画的是一个有一条河流入的湖,左边有一个方形的田野。但是,他在物体之间留了大量的空间,并且也没有画那条斜着穿过模型的路。因此,他的画在深度上不能被称作一个示意图。

披(6;0)　看到的是同一个模型,沿着纸的下边缘从左到右,他是这样安放物体的:一个蓝色河岸(湖),一个绿色带(草地),草地上面是两个棕色的笔画(路)和三棵树。当问他为什么不用纸的其他部分的时候,他回答说"*这太难了,我不知道怎么来安排它们*"。

克拉(6;1)　看到的第一个模型从前到后有三座房子,每座房子的右边都有一棵松树。在这些物体的右边有一个教堂,教堂前方有一座横跨河的桥。桥和河在教堂和最近的一座房子的前方的中间位置。克拉得到了一张大概是30cm×40cm的纸来画图,在纸的下边缘,从右到左,他是这样来排列这8个物体的:3座房子(在模型的左边)、桥、教堂,最后是3棵树。我们(指着模型)问他为什么这么画,"这座房子在哪儿(第二座)?——*在另外两座房子之间*。——那个呢(第一座)?——*在其他房子的边上*。——桥在哪儿?——*在教堂旁边*(这是正确的,只是没有考虑到深度),等。"(见图23)当他画完时,我们问道,"你是按照它被排列的方式画的吗?——*不是,我做不到画成那样*。——再试一次(他又得到了一张纸重新画图)。——*不,我做不到*。"我们把模型打乱,让克拉根据自己的画来重新建构。他根据自己的画把这八个物体放在了一排,没有意识到把它们放反了(就像是一幅完美的镜像书写)。

当模型中只有4个物体(树、教堂、房子和桥),从左到右分散放着,从上面看在深度上也是分开的。克拉再一次把它们画在了一条直线上,并且是以正面的角度。"从上面看到的村庄有可能是这样的吗?——*不,你只能看到房顶*。——但是你为什么画成这样呢?——*我想画出整座房子。把教堂画成完整的样子*。——仔细观察,画出你实际看到的样子。——(他再次画出了同一类型的图)"

最终,他看到的模型是在桌子中央有一座房子,在一个角落有一棵松树。要求克拉分别从桌子的四条边的角度来画这对物体(这样的话,第八章的想象就不会参

与进来)。他是这样画的:(1)树在左边(正确),但是在前边(错误)。(2)树在左边(错误),但是在前方(正确)。(3)树在右边并在前方(正确)。(4)树在左边并在前方(正确)。因此,对于左—右关系,他有四分之一的错误概率,却总是把树画在前边。对于第二个位置,他被问道,"这棵松树,你看到它在哪儿,前面还是后面? ——我看到它在后面,但是我不会把它画在后面。我得刺穿整张纸。"对于位置4,他大声嚷嚷道:"你移动了房子? ——不,我们没有。我们没有动任何东西。——你把桌子旋转了一圈! ——不,没有。谁在转? 你自己不是在旋转吗? ——噢,当然啦!"

帕克(6;0) 比克拉进步一些,不仅仅是把物体画在一条线上。他看到的模型是这样的:右边有一个教堂(A),教堂的左后方有一个谷仓(B),左边远一点的地方靠近正前方的位置有一座大房子(C),左边更远一点的地方是第三座房子(D),最左边有一座桥(E)在其他物体的后面。帕克的表现介于把它们简单的排成一排和能够在深度上表示它们的中间水平。教堂(A)有点靠后,接下来是B,C,D和E,它们邻近放着,形成了一条不明显的曲线。

接下来,B被放在左边,并且在A,C,D的前面,这三个一个挨一个的前后放着,E在右后方。帕克重新调整了顺序,把A,C和D的前后顺序调整正确,但是把B和A画在了同一条水平线上,把E和D画在了同一条水平线上。



图23 克拉的简单直线布局绘画

这些反应在多方面都比第一阶段的表现要进步,也符合我们的一般发现。第一,逻辑-数学对应性可以被正确地建立起来,使得基于邻近性的空间对应性能够和前者进行区分。第二,也是第一点的直接结果,儿童可以在头脑中通过整合邻近关系确立事物正确的顺序,这在他把摆在一条线上的物体重新放在两个维度上时就开始了。

第三,他建立的小组标志着以下两点的存在,不只是邻近、顺序和围绕关系,还有简单的欧氏概念如直线和曲线,平行线和角度的存在使得模型的很多特征得以再现,以及某些与观察者的角度相联系的射影关系(左-右,前-后)。这些反应,虽然都是第一阶段的进步,但是它受到以下需要强调的几点的限制。

首先,我们非常惊讶地看到:在这个阶段刚开始的时候,儿童利用整个空间或把物体散开到与模型中同样大的程度是多么困难。这种效应在实物构建的时候是非常明显的(在马尔、戴尔、利尔和让的例子中),整体布局偏向一边或是朝向下边缘。在画示意

图的时候,这种效应更明显(绘图总是在实物构建的后面),儿童不是把物体画在了一条直线上就是在一条曲线上,再或者就是把它们画满了整张纸,物体之间的空隙很大(见巴)。

儿童很勉强地占据空间,这种对空白区域的胆小态度,毫无疑问的是,它不仅是由于儿童对空间组织的早期尝试的整合需要,也受到了比运算因素更强烈的知觉因素的影响(如第三节所述)。在这一点上,我们可以回忆出处于这一阶段的儿童(见第六章的第一部分)可以画出与桌子边缘平行的直线,但是不能脱离它去画一条横穿角落的线。同样的是,现阶段的儿童好像想利用硬纸板或纸的边缘,把它作为知觉基础,依据它来放置物体或绘图,不敢在穿越空白区域扩展新关系时和它失去联系。

然而,这种倾向只是表现了一种更严重的缺点。他们不能利用整个表面,意味着他不能把周围环境当成参考框架来建立坐标系。但是,他们可以在两个或三个物体间建立联系(依据角度、直线等),却不能在两个组之间建立联系。至于周边环境,它们丝毫没有作用,除非有物体靠近边缘放着(此时就起着上文所说的知觉向导作用)。因此,在当前水平上,不可能把它说成示意图。儿童只是建立了少数由物体组成的小组,小组和整体布局以及它们的背景都没有联系。

只有当把物体摆在一条线上的时候,它们是一个整体。在此阶段的实物建构中已经看不到这种反应了(除了戴尔把它们摆放成圆形),但是在绘图中经常看到,先是以长方形的形式出现(克里和克拉),后来是以曲线的形式出现(帕克)。这种表现在绘图中持续存在的原因不难理解,它同样可以解释坐标系和一般参考系的缺失。虽然这个阶段的儿童,从围绕拓扑关系来看,对三个维度已经很熟悉了(见第四章),但是他还不能从三个维度组织欧氏概念。换句话说,在现阶段,他可以处理特殊图形的垂直或水平特征,却不能脱离垂直–水平坐标系(第七章第三节),因此当需要画出模型上的物体的示意图时,他不能同时表现出模型的宽度和深度,倾向于把物体都画在一个维度上。克拉清楚地知道自己画的示意图和模型上在两个维度的布局不一样,但是他"做不到""画成那样",但是帕克画的曲线是向两个维度发展的进步,是在直线(克里和克拉)和深度表现的折中。

除了和坐标系以及维度相关的问题之外,还有一个进一步的困难需要解决。就是根据透视来排列物体的射影,以及选择把后面的物体画在示意图的上方的图示惯例的问题。在这一点上,虽然儿童开始利用"左"和"右"关系,但他们经常不经意间把它们弄反(例如克拉在刚开始的表现),总是不能协调从不同角度看到的事物(例如克拉在最后的表现)。至于前–后关系,克拉知道某些物体在后面,但是在他的示意图中表现不出来。"*我看到它在靠后的位置。*"他说道,"*但是我不能把它画在后面。我得刺穿这张纸。*"因此,在这个阶段,射影坐标比起坐标系的发展来说没有更多的进展,因为儿童的思维局限于少数具体的关系,缺乏思维的一般运算。

儿童在2B亚阶段的反应介于局限的不完整的坐标系和第三阶段的逻辑多维关系

之间。

谢尔(5;10) 用实物再现了这个模型。他先是把4个物体摆成了一个四边形，非常精确地模仿出了模型中的形状。接下来他又放了3个物体和四边形的第一个物体组成了第二个四边形。他把剩下的一个物体放在右边，以纸板的边缘为参照，这就使得它与纸板左侧的7个物体分隔开来。

皮耶(6;8) 被要求画这样一个模型的示意图：右边有一个教堂，左边有一座房子，中间靠后的位置有一座房子。他正确地画出了它们的顺序，但是画在了一条线上。在第二次尝试中，模型中换了3个新物体，他把后面的物体画在了纸的最上方。在第三次尝试中也成功了，他这样评价画在示意图最上方的房子，“*它靠近天空*”。虽然他看到它在后面，在模型上也是这样。当物体之间的间距比较大的时候，他可以成功地表现出深度，但是当物体之间有轻微距离的时候，他不能成功地表现出来。当物体组成一个倾斜的序列，并且距离越来越远的时候，他也只能把它们画在两条线上。

至于比例的缩减，他把教堂和房子画得更小了一些，但他不是有意的，只是因为纸比较小。“*我把它们画小了，但这是不对的。应该把它们画的和模型上的一样大。*——如果你把它们画的和模型上一样大，你能把它们都画进去吗？——*你可以把它们画得靠近一些，但不是小一些。*”然而，当给他一张大一点的纸的时候，他用更大的字号来签他的名字，“为什么？——*因为纸更大了*”。

佩尔(7;0) 刚开始的表现和佩尔在2A亚阶段的表现一样，把物体画成了一条曲线来表示深度。随后，他把松树画在了房子的后面，“*它更远一点，不靠近门，而是更远一点*”。第二次尝试中，他正确再现了三个物体的前后顺序，但是没有根据观察角度来减小它们的尺寸。他把三座房子画成了三角形，没有把最远的那座房子画得足够靠后。但是，后来他指出了应该把那座房子画在什么位置。

田野四周有9所房子组成了一个椭圆形，田野里有一些松树(鸟瞰)。他把上面的物体画在了一条直线上，下面的物体画在了一个稍微有弯度的曲线上。他只画了从正面的角度看到的房子的屋顶。

很明显的是，虽然儿童可以在实物建构中把物体分成小组，在示意图中表现出两个维度，但是他们还不能做到把所有物体视作一个协调的整体，不论是从射影的角度还是从欧氏概念的角度。这是因为：对于前者而言，儿童不能把物体和周围环境联系起来；对于后者而言，儿童不能辨别从不同角度看到的物体(例如，俯视和斜视看到的就经常会混淆)。另外，儿童也没有出现对相似和比例的觉察，即使是像皮耶一样的儿童也无意识地在示意图中把它们的比例缩小了。这最后的观察也符合其他章节中对2B亚阶段的描述。

第五节　第3A亚阶段：一般射影坐标和欧氏坐标的开端

第三阶段的儿童在射影和欧氏概念的发展变化在7—8岁的时候就很明显了。通过实物建构的方法，儿童可以很好地再现模型，除了在精确的测量和比例的缩减上做得不够好；同时在画示意图时，他也可以根据模型中的两个维度和特定的观察角度来安排物体。

阿尔(7;0)　以相同的比例绘制了这个模型，小分组之间也是相互联系的。他把物体结成对，从先前的物体出发建立新的联系，他的做法更像是一种归纳，而不是同步逻辑乘法(simultaneous logical multiplication)。他甚至开始自发地进行一些测量，总是从纸板的边缘开始，一次只处理一个维度。经过了几次尝试，他基本上得到了一个精确的示意图，虽然有些距离是非常不精确的，这个错误在他缩减比例的时候更为突出。

戈恩(5;10)　在他的示意图上立刻把6个物体画好，虽然他还不能保持正确的距离。然而，当模型中的一个物体被移动了，戈恩只能通过一系列邻近关系把它画在一个新地方，先把一个单独的物体当成参照点，后来通过和其他物体的对比来纠正它的位置。"看看现在我把教堂放在了哪儿？——*在大房子后面*(他画了一幅画)。*没用，我把这个房子画的太远太高了*(他又重新开始画画)。"从俯视的角度来说，他只画了房子的屋顶，但是他的观察角度却介于45°和90°之间。当要求他绕着一个中间有一座房子，角落里有一棵松树的模型转一圈，从四个不同的位置来画出这个模型时，他这样做了，也成功再现了左-右关系和前-后关系。"有什么东西被改变了吗？——*不，当然没有。是我，我自己，在转圈。*"他被要求描述松树(在房子的前方)的位置。"如果我看不到松树，你怎么能告诉我松树在哪儿？——*它在房子前边。*——在前边？——*不。*——在后边？——*不，在前边，我说不清楚。*"

蒂什(7;1)　在他的示意图上也是按照两个维度来安排物体的，但是犯了一些错误。例如，松树被画在了左边，并且在前面，而非在后面。另外，他不再混淆左右关系了，从前到后的距离虽稍有缩减，但是大致是正确的。他的语言表述包括，"*更靠近松树……教堂的另一侧……在右边……在中间。*"他从俯视的角度画的画不够具体，但是更系统，正确地表现出了物体的相对位置，虽然它没有表现出正确的透视关系。

莱佩(7;2)　能正确地表现出两个维度，只是偶尔会有错误和混淆。物体之间的宽度距离差不多是正确的，但在深度距离上被大幅缩减了。他的语言表达包括，

“*在两者之间……它在教堂旁边……在左边……靠下边。*”当要求把它们缩减到四分之一的比例时，他把物体画得更近，但是它们的大小保持不变。他尽力保证物体之间的相对位置不变，但是实在找不到空间放松树，只能把它放在其他地方。这幅缩减的比例图和全比例图相比缺少深度的概念。

安卡(7;4) 以45°的角度成功再现了物体的相对位置，但是物体之间的距离很不正确。他从俯视的角度画的图更准确，通过屋顶来表达一些透视感，但是他还不能广泛地应用。他能正确地从四个位置来画中央有一座房子，角落有一棵松树的模型。“*松树在前方。松树没有改变位置，只有我在移动位置。*——我呢？——*它在后面。因为你在另一边。*”

沙卡(7;5) 在前-后关系上犯了一些错误(观察角度是45°)，但是从俯视角度观察的时候，他的画比其他儿童的更精确。所有的房顶都是矩形的，与从正面或是从四分之三的视角画的不同。

达姆(7;6) 正确画出了45°角度看到的事物，但是从俯视角度画的示意图和前者很容易区别。他综合了安卡和沙卡的优点。另外，他倾向于低估深度距离(这改变了他的示意图的高度)，还会在很大程度上高估宽度，以至于他又要了一张纸来完成它的示意图。

弗朗(8;6) 的表现和达姆的类似。他的语言描述包括，“*更接近纸的底部……距离房子更远一点的位置……在中间*”。

佩尔(9;0) 也有类似的表现，正确地再现了从某个观察角度看到的物体的位置。他是这样描述他对坐标系和距离的判断的：“*就在房子的下面……在房顶上面……它们之间的间距更大……在下面……*”

另外，在四分之一的比例图上，他把房子画得太大，但是随后注意到了这一点(这提前出现了3B亚阶段的反应，随后的描述也是这样)：“*如果所有事物更小一点会更好。*——能把房子画的像它的四分之一那样小吗？——*可以，这很简单。*”但是，在扩大他的第一幅图时，他不能把距离扩展到充分大，导致示意图仍然很小。他再一次意识到了自己的错误，“*在我的图中，这些事物靠得太近了。把它们画得更分散一些会更好*”。

加德(9;5)大致正确地再现了物体的位置：“*相比较松树而言，房子更靠前一些，等。*”当要把它们缩减到四分之一的比例时，一开始把房子画成了原来的比例，而且还把它们画得很近。但是，当他意识到纸的空间不够的时候，猛拍了一下脑袋。他通过把物体画得更近一点来克服这个困难，但这导致了前—后关系的错误。

这个阶段的儿童的表现和第二阶段的儿童的表现之间的区别是很明显的。引人注目的是这些自发反应和在关于射影空间、欧氏空间的坐标系、相似性和比例的实验所得到的反应之间的相似。

首先,它不再是简单地把物体分成彼此之间不协调或与外部环境没有联系的小组。相反,从现在开始,把所有物体都综合成一个整体是可能的,包含了周边环境和里面的物体。在这一点上,3A 亚阶段明确标志着形成坐标系概念的开端,就像第十三章标志着水平和垂直维度的开端。

因此,通过实物建构的方法,儿童可以毫不困难地排列物体,仅仅是通过把它们和纸板的边缘联系起来(见阿尔的例子),只是垂直距离和比例的缩减不够精确。至于绘图,它总是落后于实物建构的水平,现在它已经赶上了,绘画发展的速度随着儿童的意向而定。需要指出的是,不像第二阶段的儿童(包括那些在2B 亚阶段的儿童),现阶段的儿童可以立刻依据前-后关系和左-右关系把物体画好(纸的最上面代表模型的后面)。当然,还会存在一些细节错误,尤其是和深度相联系的时候。然而,这些图真正地表现了两个维度,而不是像第二阶段的儿童那样仅仅是依照线性顺序(或是稍微有弯度的曲线来表现深度)把物体画在一起,再或者就是把它们分散在整张纸上(见巴),不能区分出前面和后面。此外,从开始画画的那一瞬间,就可以很明显地看出:现阶段的儿童把物体和周边环境联系起来,可以根据纸的大小来分散物体,就像它们在模型中的布局一样。这种把它们和周边物体联系起来,同时把它们在两个维度上相互联系起来的倾向是一个新的重要发展。早期"对于空白区域的恐惧",或者解释为把物体堆在一侧,现在也被概念关系所取代,这也标志了坐标系概念的形成。

儿童可以自然地想象出空间关系,比他们在绘图中的表现更好,他们经常表现出已经掌握了空间关系,这只能在以后的绘图中表现出来。戈恩是这样描述在房子前面的树的位置的,"*它在房子的前面,在房子的前面,我说不清*"。还有佩尔把一个物体描述为"就在房子的那条线的下面",所有孩子的表现都说明他们在某种程度上建立了一个相互联系和相互参照的网络,这已经很接近坐标系概念了。

与欧氏空间的综合的组织密切相关的区分和协调不同视角的开端(第八章研究过),在3A 亚阶段也很明显。每个儿童在绘制不同角度看到的事物时都有明显进步,俯视看到的事物和45°看到的事物有明显不同。在这一点上,儿童绘制的示意图阐明了发展的各个阶段,从以侧面表示屋顶(与房子的其他部分是分离的),到有些儿童从俯视角度表示房顶(屋脊从中心向下延伸)。当改变自己的位置的时候(在一个实验中,在硬纸板的中央有一座房子,一个角落里有一颗树),这些儿童几乎是以和第八章同一阶段的儿童同样的方式,越来越能意识到相对于自己的观察角度的重要性(如"*树没有移动位置,只有我在移动*")。

至于发展中的射影坐标和欧氏参考框架之间的联系,现阶段的情况可以和持续和连续[1]概念的联合发展的过程进行直接的对比。在某些儿童中,射影坐标的发展比欧氏参考系概念发展得快(沙卡),但在某些儿童中,情况恰恰相反(蒂什)。大多数情况下,

① 参照《儿童时间概念的形成》。

两个概念以同样的速度在发展。不足为奇的是，一方面，参考系包括从某个特殊角度进行的观察（足够远使得角的两条射线平行）。另一方面，个别角度（如45°）是相对于观察者和物体的位置而言的，因此物体只能通过一个空间参考系来定位。不管哪种概念发展得快，一种概念早晚会对另一种概念产生影响。

除了这些优点，还有三个主要的缺点，儿童要等到3B亚阶段才能解决它们。这也符合我们对相似性和比例的发现，也和儿童从两个维度[1]表现物体的发现相对应。

首先，儿童不能准确地估计距离，虽然他在某种程度上尝试着这么做（如阿尔、戈恩等）。这个困难使他止步于粗略的测量，除此之外，上述结果还表明了一个有趣的现象，这种错误是常见的也是普遍的。虽然横向（左–右）距离可以被比较精确地画出来，但是深度（示意图的垂直方向）距离在很大程度上被低估了。例如在观察角度为45°时，这种错误可能归因于儿童不能理解距离是如何随着观察角度而变化的。然而，这种错误在俯视图中也存在，这很难被解释为知觉错觉（在绘图中的垂直–水平错觉等）。因此，我们更倾向于把它理解成当儿童再现模型的时候，把物体安排在一条直线的倾向的残留，这种倾向是他们在第一阶段和第二阶段的表现。在达姆的例子中，他又要了一张纸来完成他的画，清楚地表明了这种早期表现。在高度或深度之前估计宽度的倾向毫无疑问的归因于知觉活动的正常功能，横向对比比纵向对比更容易获得。

第二个困难在很大程度上和在两个维度上测量距离有关，当儿童尝试着缩减比例时，它就出现了。他保持物体的大小不变，只是把它们画得更近一些。除了改变物体的大小和物体之间的距离之外，它还导致了一些不可能的安排（如莱佩、佩尔、加德）。另外需要指出的是，当儿童尝试着缩减比例的时候，他把物体放在一条线上的倾向就更明显了（如莱佩），当把物体放大时物体在横向上也是相连的（如佩尔）。这点我们在研究矩形的相似时（第十二章，第二部分）就已经看到过，但是现在情况截然相反。儿童通过扩大它们来描绘这些被延长的矩形时——就好像是他们理想中的矩形——现阶段的儿童在缩减它们的时候几乎也是这么做的——归因于想把物体放在一条线上的倾向——这本身也是横向对比的结果。因此在扩大和缩小的这两个例子中，虽然具体的操作相反，但是儿童不能完全理解这两个相似概念的困难是明显相关的。

最后，如果模型中的某个物体的位置变了，那么儿童就得调整他的示意图来适应这种情况（如戈恩），我们发现了他在参考系或坐标系发展中的困难。这个孩子只能通过一系列邻近之处来调整布局，首先是把一个新位置和一个单独的物体结合起来，接下来是和第二个物体结合起来，如此类推下去。他不能同时考虑所有的关系。这种类型的行为和形成序列时的行为类似，虽然这种行为出现得更晚，因为它更复杂一些。介于5岁半和6岁半之间的儿童，虽然他们可以在心理上建立高度概念，但会发现在插入横向物体时非常困难，因为序列的顺序依据的是一个整体的知觉模型而不是运算系统。坐

---

① Op. cit., *La géométrie spontanée de l'enfant.*

标系统刚开始无非是两个连续的位置序列,一个是水平的,一个是垂直的;换句话说,这是一个乘性系统(a multiplicative system)而非一个加性系统(an additive system)。但是,规则是一样的,在这个仍是强调运算协调的阶段,儿童在心理建构中还是会经历相似的困难。

第六节 第3B亚阶段:对距离和比例的掌握

一旦两个维度上的物体的顺序被确定下来,接下来的问题便是确定物体之间的间隔,这就是说,问题在于距离。当然,这个问题在3A亚阶段也存在,但是难能可贵的是,现阶段的儿童在考虑间隔之前,已经将他的主要精力用于再现物体之间合适的顺序,特别是在宽度和深度上。另外,儿童在两个维度上确定物体的顺序存在的困难——换句话说,建立坐标系的困难——通常在3B亚阶段得以解决,儿童在这个阶段的进步主要集中在间隔或距离上。

除了对距离更谨慎的判断,还有一个重要的进步体现在儿童绘制的缩减的比例图中。然而,3A亚阶段的儿童只是简单地把物体画在一起,没有缩小它们的尺寸。然而,3B亚阶段的儿童不仅把物体的尺寸缩小了,也把物体之间的距离缩小了。不言而喻的是,比例和距离非常接近,从一个模型过渡到一个示意图意味着减小,如果能把模型的距离缩减到一定比例,那么据此画出的示意图就被认为是"比例良好的"。事实上,在第十二章,在同一阶段也出现了比例的问题,例如1:2和1:4这种简单的比例,这是基于平行线和角度的定性相似的空间关系集成的结果。

以下是一些儿童出现新表现的例子。

班恩(9;5) 可以在纸上正确地沿着两个维度画出物体的位置和物体之间的距离,但是在他画图的过程中,不能令人满意地解释他在做什么。让他在一张四分之一大小的纸上重新画一遍(他没有被告知真实的尺寸),他只靠眼睛观察就缩小了物体的尺寸和物体之间的距离。除了有几个小细节不同之外,这幅图和第一幅图很相似。

迪布(9;9) 画的是从45°观察到的模型,两个维度上的位置都是正确的。"你在看什么?——*房子(B),因为它(树,C)有点高(更远一点)。*——你为什么继续看这儿?——*我看它是因为它到教堂的距离*(他做了一个表示间隔的手势)……*我从教堂开始画是因为这样可以更好地看出从房子到教堂的距离。松树在右边,靠近房子(G)。*——你为什么从尖顶开始画?——*我想知道它到房子(G)有多远。*"虽然他看起来考虑了距离,但是仍然低估了深度距离。

以俯视角度来看,他画的是正确的,屋顶也是以俯视的角度画的等。

缩减比例图:他画了一个相似的图,他不仅缩小了物体的尺寸,也缩小了物体之间的距离。

安卡(10;4) 他的表现也是这样的。"*我想知道房子和教堂之间的距离等*"。将比例缩减到四分之一,"*我把它画得更小了,否则就不能把其他的东西画上去*"。当他画完了缩减的比例图,并且保持了正确的比例时,我们又叫他把它们放大,但是不让他看原图或是模型。但是他对结果不满意,虽然他的话在本质上是正确的:"*房子之间的空间不够大。*""*我把房子画长了,我也要把它画得宽一点,因为你把一个物体变长了,也要把它变得宽一点。*"

从俯视角度来看,他的画是正确的。

马特(10;6) 也是从教堂开始画。"你在看什么?——*教堂和这座房子的距离以及它的方向。*——你为什么选了这座房子?——*因为从它开始可以更容易地判断距离(几乎是一条水平线)。*"接下来,"*我观察两棵树之间的距离,以免把它们之间的距离画得太大了。啊,这里距离太大了*(在*G*和*H*之间)……*这儿的距离比*(C)*和*(A)*之间的距离还要大。*"

对于比例问题:"在这张纸上画图,你可以看到纸只有模型的四分之一那么小,你怎么把所有东西都画进去?——*我把距离画小,把物体画小。*"他很乐意进行测量:"*你必须把所有东西的四分之一测量出来。*"但是他更倾向于用眼睛进行测量。从俯视角度来看,他的画也是正确的。

邦(10;8) 在位置和距离上的表现也是一样的。他先画了一幅缩减的比例图,又把它们放大,"*这就好像是在大田野上的小房子。你得把它们画得大一点*"。

说到了2B亚阶段,儿童已经可以胜任画示意图的任务,并且可以考虑到位置和距离(如坐标)以及观察角度和比例。他们还不能做到的是画出一个所有物体的位置都基于精确测量的示意图。儿童在第四阶段才能达到抽象的形式运算的水平。然而,以它现有的表现看,示意图可以被视作可逆关系的三维运算的平衡。

如第十三章所述,从现在开始,坐标系或参考系是欧氏空间中综合的三维组织或结构的结果。如第十二章所述,缩减到四分之一的比例和反向的扩大从今以后也可以通过图形的相似和比例得到。结果就是,欧氏和射影关系在相似图形或等比的概念(介于度量坐标和射影坐标之间)的应用中可以联合起作用,至少,在以上这些简单的任务中是这样的。已经详细阐释过的复杂的关系系统现在已经为通过抽象的或正式的方式表现出来做好了准备,这在第四阶段就会表现出来。

第七节　度量坐标的抽象示意图

在第十三章的第六节提到，虽然在3B亚阶段通过个体经验得到的坐标系，已经形成了水平直线和垂直直线组成的网络。但是，直到第四阶段，儿童才能形成标准坐标系。这点在这样的实验中可以表现出来，要求儿童再现由一系列物体组成的模型，儿童会把纸条作为坐标轴来帮助组织图形。

在画示意图的实验中，从自然坐标到标准坐标的转换，或者说是从初级坐标到抽象坐标的转换，就更明显了。然而，恰恰是抽象运算的发展使儿童可以理解地图和作业中的坐标轴，11到12岁的儿童倾向于综合个体得到的经验和学校学到的知识。然而，此处很值得给出三个这样的儿童的例子。

奥尔布(11;7)　他的行为表现出了从2B亚阶段到第四阶段的过渡。"假如你做了这个模型，你想让别人把它完全再现出来。你需要怎么做呢？——*给这些房子画一幅图*。——画什么样的图？——*从透视的角度*。——这就足够了吗？——*不，你需要画出房子的轮廓*。——需要画出高度吗？——*不，这不必要*。"接下来，他画了一幅图，每个物体都以矩形、方形、圆形(树)等形状呈现，虽然他没有进行精细的测量，但是物体的位置和距离都是正确的。

桑(12;4)　在一开始的情况是一样的。"*你需要从上往下看这些东西*。——它们会是什么样子呢？——(他画了几个矩形)*这个矩形代表教堂，这些代表房子*。——在你开始画之前，你有什么方法可以帮助你把物体画在正确的位置吗？——*你可以画几条轴线*(他把纸折成了四部分)。——为什么？——*有一些房子靠近这些轴线。你可以更容易地找到物体的位置*(他开始画)。*这栋房子和那栋房子距离这条轴线的距离是一样的*(他进行了测量)。*这栋房子距离轴线的距离是刚才的一半。你也可以对比它和边缘的距离*。——这精确吗？——*不，你需要测量方向，并把尺寸缩减到需要的比例上*。"

福(13;0)　立即测量了所有的物体，并且决定在他的第一幅图上，把物体缩减到四分之一的比例。"*你需要把房子画成四分之一。不，它有点大。不，它还好*。"他就这样自言自语地画着，看看"*纸的角落和边缘*"*以作参考*。在他进行了一些测量后，我们问道，"你的图上的距离比模型中的距离要小，这对吗？——对，*因为所有的物体都要变成四分之一*。"他的图是真正的示意图，物体都是用简单的几何图形表示。当他画完后，我们让他在第二幅图中，把它放大。福首先对比了第二张纸和第一张纸的尺寸。"*你需要测量这张纸和那张纸的大小*(他研究它们)。*我要用1.5倍的比例*。——如果这栋房子是2cm长？——*在这儿它会是3cm*。——另一边

呢？——你也需要量量它。——它会是正确的吗？——不，你需要用同样的比例把它扩大。"

儿童在学校学到的知识和在实验的回答中表现出来的知识被整合在一个概念体系中，概念体系的发展体现在上述的实验中。事实上，除了对已有格式的同化之外，学习难以发生。就像在儿童学习画画之前，他已经画了很长时间，在日常生活中，他通过处理坐标、射影角度、相似或比例来发展概念。这使得他在某一个特定年龄段，会通过在学校学到的好多新概念使他的实用运算系统更加明确化。

物体位置的形式或抽象的安排，换句话说，就像这些反应所阐释的格式的安排，不仅形成了一个起点，儿童也会在形式几何学的学习中不断整合概念，这也是一长段发展时期的高潮。它开始于初级的感觉运动和知觉活动，接下来形成了符号表象，然后是具体运算，最后是抽象的或者是假设—演绎推理运算。在这一点上，示意图的发展——它的起源是自发的，因为它是儿童在绘画中掌握各种要素的成果——非常清楚地揭示了概念逐步发展的过程，最初是拓扑的，最终是射影的和欧氏的，这也是我们尽力去揭示的过程。

第十五章　空间直觉的一般结论

几何直觉究竟是什么？当然，每一个数学家都想在儿童空间概念实验的最后找到答案。

大家普遍接受的观点认为几何直觉主要是对外部世界的“解读”，或者说是一种对外部世界的直接的知觉理解，并通过回忆过去的表象以及预测未来的知觉加以补充。庞加莱在一篇著名的文章中写道：“我们有各种各样的直觉，”“首先是直接基于感觉与想象的直觉，接下来是来自归纳过程的直觉——可以说是基于科学实验方法的模式，最终是纯粹的数的直觉。”[①]几何直觉通常被认为是属于这三种分类的第一类，或者是前两类。虽然它只是把归纳减少为对可能的知觉经验的预期。但是同时，空间直觉部分依赖于知觉与想象是确定的事实。我们禁不住把它视作小的圆的表面，或者是把它视作一个思路，而不是把它视作直觉依赖感觉的决定性的例子，这样的看法是平庸的。

然而，把空间直觉简化为只是知觉与想象的产物，可能会误解直觉的本质特征，就如同联想论者歪曲了思想的本质，把思想简化成一系列表象，并且把表象当成最终产物，而不是思想本身的唯一元素。相反，我们当前实验中的一个清楚的结果表明，表象和知觉数据在几何直觉中的作用与在其他的思维加工过程中的作用相似。也就是说，象征或者信号的作用与他们所预示的关系不同。

以下这一说法是真实的，当数学家用感觉和表象来描述直觉时，通常他们的目的与古典经验主义者的目的截然相反，他们的目的是去批判，而不是去证明那些已经被证明的价值。数学家们几乎一致认为，直觉具有欺骗性。因此，在区别了以上列举的三种直觉后，庞加莱补充道：“前两种直觉不能给我们任何确定的信息。”人们常说，直觉是发明创造的工具。然而，从严格意义上来说，证明或几何推理是逻辑分析的问题。事实上，在公理的发展过程中，现代几何学已经尝试着尽可能彻底地分离这两个过程。

然而，这个问题在这里并没有结束。从心理学的视角来看，把直觉简化成知觉与想象，通常是为了证明或批判直觉，任何这样的趋势都会完全被误解。事实上，在尝试去讨论几何认识论的一般问题时，它经常会有恶劣的影响。把直觉彻底地从逻辑或公理中分离出来，在实践中是不可行的；事实上，在原则上也是不可行的。在目前的背景下，对不同的意义进行详尽的分析是不适合的，对各种各样的直觉分类不做任何评论，许多作者都公开宣布他们想要缩小——事后——直觉和逻辑之间的差距。庞加莱认为，有

① H. Poincaré, *La Valeur de la Science*, p. 22, Paris, 1914.

一种直觉控制着思维的一般方向(与特定的逻辑运算相反),布伦茨威[1]直接把直觉视作思维的一般基础。温特[2](Winter)提出“转化直觉”与“简单直觉”是相反的。克莱因(Klein)提出“复杂直觉”,伟大的数学家布伦士维格认为“从严格上讲,它根本不是直觉”[3]。最后,布劳威尔(Brouwer)认为直觉是一个可操作的概念[4]。

简而言之,每一个转变的背后都把基本直觉与逻辑运算联系了起来。布伦茨威格曾经微妙地指出几何推理总是与直觉经验有关系。以逆向方式来看,经验智慧一开始在直觉的组织中和明确的结构上是可以操作的。贡塞斯[5](Gonseth)最近提出了一个相似的更先进的观点,形式逻辑所形成的“格式”总是追踪着直觉的痕迹,然而,基础直觉需要一定程度的格式化才能形成这种结构。

所有这些都表明,对数学家来说,直觉远非知觉或表象系统。相反,它在某种程度上是还没有被形式化的基本的空间意识。但是,这又再度提出了一个发展问题,意识怎样通过展现知觉或象征表象来直接地面对外部世界?又是怎样完全地降低了与外在的联系,以至于让它能够被完全属于主体的概念所替代?

对于这个问题,当前的实验给出了简单的答案。空间直觉不是对客体属性的“解读”或者理解,而是从一开始,就是对客体采取的动作。这完全是因为空间直觉丰富和发展了物理实在而不只是简单地从已有的结构中进行提取,动作最终能超越物理的局限并且形成运算格式,它能被形式化,并且可以通过纯抽象的、演绎的形式起作用。从根本上说,从基本的感知运动活动到抽象的运算,几何直觉的发展是活动的发展;同时,把客体同化到自己的功能结构中,在过程中把它完全地转化了,就像几何学转化了物理学一样。

动作首先表现在感知运动活动调节知觉的形式中。甚至在这个阶段,感觉数据的作用仅仅是去表示主动的运动同化所建立的关系。庞加莱对此有一些暗示,当他把运动视作基本的空间概念的源头,而不是运动和随后的思维运算的联系(除了他对群组位移的运动起源的著名观察)时,他基于感觉数据去描述运动,并且为了达到控制它们的目的,他假定智慧是首要的。

这是初期的表象阶段,很快,动作将体现出它的形式化角色。表象不再只是先前出现的动作的内部的模仿,还可以是能实现的动作的内部的模仿。我们的实验已经证明这样的动作在心理的形状建构中是多么重要,这种建构基于最初的拓扑关系,例如邻近顺序和闭合性。

先是具体运算阶段,之后是抽象运算阶段,时间越充足,动作越明显,运算的形式会

---

① L. Brunschvicg, *Les Étapes de la Philosophie Mathematique*, p. 451, 2nd edn., 1922.

② Revue. *De Metaph*, *et de Morale*, p.922, 1908. See also A. Reymond, ibid., p. 740, 1916.

③ Quoted by Brunschvicg, *Étapes*, p. 450.

④ Rolin Warve, “Mathématiques et philosophic,” *Arch. Soc. Belge de philos.*, p. 9, 1933.

⑤ F. Gonseth, *Les Mathématiques et la Realité.*

更纯粹。所谓越充足,是因为这个形式运算的动作是可逆的,并且能被无条件地组合;所谓越纯粹,是指从现在开始,他们将要超越他们所关注的客体。

目前,空间概念的运算主要取决于三个方面。首先,从大体框架来看,心理发展的顺序与几何结构的建构过程一致的。在这两种情况下,拓扑关系都是先于射影和欧氏关系的,并且后者从它们起源的基本概念的复杂性上来讲是等价的。

这些运算的第二个关键点来自于心理进化的视角,是它们把一个新的元素引入了直觉与逻辑对立的经典辩论中。它达到了这种程度,那就是动作内化为运算,甚至发生在观点的形式化之前,初级知觉的、经验的直觉变得合理和连贯。因此,具体运算系统的精确性超过了没有达到精确的抽象操作的基础直觉的精确性,它是假设-演绎命题的基础。这使得很有必要在直觉与逻辑之间引入新的渐变思想,主要是具体运算逻辑,出现在前逻辑直觉之后,并且在形式逻辑之前。

第三个以及最重要的点是:具体的运算揭示了直觉和逻辑关系的另一面。在不连续整体的具体客体之间,逻辑-数学特征的具体运算只能单独考虑相似性(分类和对称关系)和差异性(非对称的度量关系)或同时考虑二者(数量),与它们的时空定位相独立。与这些运算相平行,存在着时空或亚逻辑特征的运算,也正是这些组成了空间概念。

术语"亚逻辑"并不表示这些运算不如逻辑-数学运算精确。简单来说,它们的作用是产生客体的概念,这与客体的集合相反[根据罗素(Russell)的类型理论,它们超越了类型0;更精确地说,它们是亚逻辑的]。这些运算没有包括类包含关系,而是包含了单个客体的部分-整体关系。他们用顺序或位置(尤其是放置的概念)的相似或差异的概念替代了邻近的概念,用数的概念替代了测量的概念。一旦以命题的形式表达,它们就会明显区别于逻辑数学运算,它们会组成一个特别的种类,是连续的运算而非不连续的运算。

然而,在具体运算阶段,他们会形成逻辑数学运算的一个系统,逻辑数学运算的功能是把多种客体按照集合或数集排列。由于它们组成客体,亚逻辑运算就会伴随着象征表象(表象或表象表征),这个表象反应的不仅仅精确(尽管不是完全充分的),而且还有分类或数量的概念。这就是为何直觉的核心的持续性会得到承认,即使是以最抽象的几何形式,因为这个核心是证明空间邻近和连续的基本概念在起源上都是亚逻辑的证据。

简而言之,数学家对几何直觉的定义过程不会间断,从最初控制知觉活动的运动元素到后续的发展阶段中都会出现的运动元素,直到最终的运算。另一方面,从粗略的知觉信号,到最抽象的象征表象,感觉数据只是简单地起到信号或指示的作用。

第一节 知觉和概念空间及表象的功能

在检查儿童发展的相继阶段时，我们归纳出了空间知觉和最早的空间表象之间的根本差别。因为空间知觉发生于客体出现时，而表象发生于客体消失的时候，知觉空间的发展远比概念空间的发展迅速，前者甚至在后者刚开始的时候就达到了射影和准测量水平。因此，知觉建构和概念建构之间相差了几年，尽管它们遵循着相似的发展路径。而且，这两种截然不同的水平竟然被忽视了，人们出现了基于简单的欧氏形状来研究空间概念的错觉。2—4岁之间的儿童对这些形状的反应表明：从知觉角度来看，这些反应并不是先天的而是发展起来的（在儿童刚出生的几周就已经开始进化）；然而，这个时候这些形状还不是概念化的（现在只有最初级的关系可以适用于它们）。因此，为了获得关于几何直觉的满意理论，很有必要区分开知觉空间和概念空间。

知觉空间本身好像是一个复杂的产品，它同时来自于直接的感觉和感知运动活动，这种活动被用来控制用于决定知觉集中的多种运动的方向。感知运动活动最初包含儿童所有的行为。随后，随着表象的出现，它被严格地限定在运动和知觉领域，并且在一生中都在为空间概念奠定基础。因此，在儿童出生的第一年，正是感知运动活动带领他在接触客体的过程中，通过翻转、移动它们，来获得客体永久性（即使在看不到它们的时候）、大小恒常性和形状恒常性。在晚一点的阶段，这个活动和眼睛运动密切相关，在距离一定时估计大小以及以透视的角度估计形状时可以控制适应和会聚。

感知运动活动在知觉空间水平已经是操作性的，在相对无差别的状态中，通过两个互补的感觉和运动活动来区分它也是可能的。从后者的空间关系的起源来看，一旦发展过程开始——尤其是当它完成的时候——这些关系将被"信号"暗示或"指示"，而且这些确实包含感觉迹象或线索。结果，从深度或透视的角度来看一个图形，整个一系列的"虚拟关系"将会产生作用，超越了感觉接收器所记录的数据。这些虚拟关系是感知运动活动的产物，而且感觉数据仅仅作为指示它们的线索。

然而，单纯是感知运动活动难以超越直接的知觉领域。最多它会带来某些预期和重构，使得客体被屏风遮挡时可以被定位，或是通过特殊的路径对运动分组，但这也是它能力的局限。想象的任务就是要使空间超越知觉领域的局限。

当象征功能出现的时候，感知运动活动得到了想象的强化。也就是说，当"信号"以符号（表象）或是迹象（文字）形式开始和它们通过概念关系或是前概念关系[①]"象征"的不同。正是在这时，我们的研究中的真正的客体才开始出现。

在这里，首要的问题是明确想象和合适的活动各自的功能。一方面，我们需要指出

① *Play, Dreams and Imitation in Childhood*, 1952.

空间概念不再依靠于动作，而仅仅涉及回忆线索或符号中的实际或潜在动作的结果，而不是唤醒作为记忆表象本身的动作。另一方面，空间概念实际上是通过“迹象”和“符号”再现的内化的动作，想象引发的动作是早期感知运动活动的直接扩展，它和生理动作是等同的。当然，表象发挥的作用也会随着采用的两种解释方法的不同而不同。对于第一个解释，表象取代了活动；对于第二种解释，表象只是符号化地表达了动作。

对于动作本身，我们再次看到它比表象的作用更基础。几何直觉在特征上非常主动。它初步包含了虚拟动作、过去的格式或缩影、未来动作的预期格式，而且如果运动本身是不充分的，直觉就瓦解了。

这一点在以上介绍的实验中很明显。从初级的序列关系（按照两个方向排列物体）以及围绕（结）关系开始，过渡到射影关系（透视、阴影、截面和平面的旋转）和仿射关系（菱形的延长），以相似性、有布局的组的协调等告终，所有已经研究过的空间直觉都依赖于动作。这些动作如把一个物体摆在另一个物体旁边（邻近性）或按序列摆（顺序）、封闭动作、收紧或松开、改变视角、切割、旋转、打开或合上、放大或缩小等。

在决定空间概念是否是内化的动作或它们仅仅是替代生理动作的符号表象时，我们需要把两点牢记在心。首先，即使是最简单的动作，年幼的儿童也不能设想出它的结果，一定要在它实际发生之后才可以。因此，儿童不会认为一个松弛的绳结是一个拉紧的绳结的同胚，直到儿童通过拉绳子把它收紧才可以。儿童不能看出圆柱体的截面是圆形的，直到他拿小刀在橡皮泥圆柱上切一下；他也不能重构视角，除非他自己处于相对应的位置。这是因为思维只有在以动作本身提供的数据为基础时才可以替代动作。结果，除了在人工情形下，思维不能从活动内容中分离出来，也不能把知觉从感知运动的内容中分离出来。

但是，如果是这种情况，它是否遵循思维与动作没有太大关系的说法，因为它被局限于观察动作而且回忆动作的结果，就像是任何形式的外部事件通过想象被回忆起来？第二点就与之相关了。实验中儿童表现出来的通过动作来调整客体的行为并不单纯是处理客体内在特性的简单物理实验。如果是这样的话，那么我们就很难理解几何思维是如何从客体独立出来，而且在特征上逐渐变成是演绎的。儿童的几何思维在演绎性之前是实验性的，但并不是每个实验都是客观的实验。使空间思维得到发展的第一组实验实际上是在测试主体自己的动作，而且它还包含发现这些动作是如何相继发生的。例如，当把 B 放到 A 和 C 之间时，儿童发现他只能在 A 和 C 之间再次遇到 B。将一根绳子的末端穿过一个圆环后，儿童准备把它做成一个绳结，他发现把绳子继续往里面拉也不会改变绳结的本质等。

无可否认的是，在观察实验的过程中，儿童首先会考虑到这样的客体，为了意识到动作，个体必须先看到它的最终结果，而且从这个意义来说，实验确实是实际的，因为它告诉了儿童客体的一些特性。但是它不仅是实际的，因为对于观察到的实际客体来说，有必要更加复杂（如第十三章中水的高度水平），因为解释比动作协调更优先，更高级。

结果就是，儿童在这样的实验中不仅学到了关于客体的一些认识，还学到了动作的协调方式，以及一个动作是如何决定另一个动作的。当实验变得更先进时，儿童的体验就更多了。例如，把B放在A和C之间的动作同样意味着把B放在C和A之间，类似的是，把绳子绕成环所产生的绳结的特征是不可改变的，直到解绳子的逆向动作发生。

结果就是，先是拓扑关系，然后是射影关系和欧氏关系，假定不同动作之间的协调变得越来越复杂。一条直线，一个角，平行关系或坐标系的决定不仅包括一个简单的观察，还包括把它应用于不同动作时进行的精确调整。

因此，我们可以发现空间概念是内化的动作，而且不仅仅是对外部事物或事件的心理表象——或是对动作结果的表象。空间概念只有变得主动，通过操作实际的客体，而不仅仅是唤起它们的记忆表象，才能有效地预测这些结果。在心里排列客体不仅仅是想象一系列已经按顺序排列的物体，也不是想象排列它们的动作。它意味着排列序列，和生理动作一样是积极主动的，但是却是在心里对符号化的客体实施这些动作。这就是为什么儿童发现在桌子上排列计数器或切下橡皮泥的截面非常简单，而想象这些却非常困难；而且，在此同时，他发现想象自己在对抗赛中取得胜利非常容易，而在现实中打败对手却非常困难。因为空间概念是内化的动作（如同逻辑概念），想象仅仅是动作的替代品。

另外，动作在一系列阶段中不断得到内化，我们已经可以一个接一个地追踪这些阶段。感知运动活动直接与知觉相关，我们在想象中回忆的动作接下来就实际发生了。这便产生了思维，这种思维通过它的具体性和不可逆性再现了动作。这是第一阶段发现的最初级的直觉类型，一直持续到4—5岁。对于第二阶段（从4—5岁至7—8岁），生理动作的逐渐协调是和它们的格式（也就是说，对于它们的格式轮廓）的内化协调一起进行的，尽管在进行中会出现尝试和错误，只能零散地预期潜在的动作。从这一点上说，直觉与思维的联系是逐渐加强的说法是可能的。当格式被充分地协调整合后，这个过程引发了具体运算（从7—8岁到11—12岁），结果就是每一个在心理上都可以按相反的方向进行探索。这种可逆的组合类型代表了通过内化动作达到的最初的平衡状态，因此组成了最初的真实的运算系统。随着运算协调的进一步发展，他有可能同时觉察到许多系统。因此现在儿童（大概11—12岁）可以处理抽象运算，可以通过命题的形式表达出来。这标志着知觉发展的最终阶段以及思维类型的开始；与此同时，动作持续的内化达到了顶点，也为空间概念的精细化做了准备，空间概念是其逻辑上离散特征逐渐增加的结果。

在动作内化过程中的每个阶段，在表象的发展过程中都对应着一个等价的阶段。因此，思维从最初出现到最终发展到纯粹抽象的形式，表象（“信号”）和它的“象征”关系（内化的动作）的功能性联结之间也在经历持续的转换。

在它实际的起源里，表象不仅是对一个动作包含的肌肉适应的追溯或记录。每个施加于客体上的动作都是对它的顺化或同化。也就是说，它收到了关于探索事物的形

式的消极印象。当然，动作最重要的特征并不是这个印刻的过程，而是把客体同化到主体的格式中去。然而，每个有效的同化都或多或少地对应着一些有效的顺化。当后者发生于感知运动水平时，它包含通过动作对客体的模仿。更准确地说，模仿仅仅是对基础的消极顺化过程的积极追溯。现在，在概念或想象水平，延迟模仿成为可能(更多的是从立即模仿到延迟模仿的过渡，延迟模仿是所有类型的表征思维的起点)，而且这逐渐内化于对客体的表象或模仿格式中。因此，这证明了：独立的无助的表象不能使主体获得关于客体的知识，因为它不是同化的工具，而是伴随着同化过程的顺化过程的副产品。在了解客体的实际过程中，它仅仅发挥着"信号"或符号的作用。但是，这是一个非常重要的功能，生理动作可以通过表象被唤起，也可以被概念化。虽然表象起着非常重要的作用，但是它并不是组成概念关系的表象。这些取决于把客体同化于主体的格式中的动作。因此，尝试把空间直觉缩减为一个表象系统是完全错误的，因为在最后的分析里，通过"直觉获得的"事物是表象可以象征但是难以取代的动作。

但是，如果这就是表象的功能，它的相对重要性自然会随着它所象征的虚拟动作的组织化程度而变化。在直觉思维的最初阶段，空间思维是仅仅建立在简单的不可逆的动作记忆表象之上的，这种活动仅仅是再现之前所表现的物理活动。在这个阶段，表象所发挥的作用至少和活动同等重要，活动的作用目前为止仅仅是最基本的。我们在其他地方把这个水平称为象征思维的前概念水平[①]。在当前的研究中，它与第一阶段相符合，在这个阶段直觉不能处理最简单的转换，再现之前活动的结果也受到限制。

在下一个阶段，思维之间开始相互联系。因为活动唤起的东西更加复杂，尤其是它们开始协调起来，表象发挥着作为必要的辅助的连接功能，尽管不再能永远帮助思维本身，它已经把它替代为可理解的内容。

在具体运算阶段，心理活动的可逆的组合特征变得足够精确以及有逻辑性，使得表象不再是必不可少的。最后，伴随着抽象运算的出现，表象被思维远远地抛在后面，以至于对应那些点和连续的线的表象对运算思维来说不再充分。

最开始的表象是具有符号化的特征的，随着思维的活跃成分越来越有组织性(其降低的符号价值被线索系统和数学语言替代)，它的从属地位越来越明显。然而，我们需要意识到在空间运算进化的过程中，表象发挥的作用与它在数学逻辑运算的例子中发挥的作用完全不同。空间领域是一个单独的格式，它包含呈现的所有成分，而且把它们组合为一个独立的单元，然而逻辑集合是与它们的构造联系的不连续成分，不管是否可以进行空间的及时定位。

绝对是因为它独立、单一的特点，康德把空间视为是"敏感性"(Sensibility)[②]的形式，考虑到直觉特征是它的基础。这完全没有排除空间作为运算方法的可能性——也就

① 参见 op. cit., *Play, Dreams and Imitation in Childhood*，第八章。

② "Anschauung"，通常被翻译成"直觉"，但是这不是很让人满意。它很难表达清楚这个德语词汇的含义；"Sensibility"可能和这个词的意思相近，代表"感觉-知觉的直觉"。

是，智慧的——但是指出客体的心理结构的亚逻辑运算（而且因此，用一个独立的格式）和处理实在物体的集合的逻辑数学测量运算之间的差别是很有必要的。

如果情况就是这样，那么表象很明显在不同的环境下发挥了不同的作用。相当正确的是，表象在集合、序列或数的集合中发挥着辅助的符号作用。因此，可能会通过想象其中的一个成员来想象一个完整的集合，或把它想象成一个像圆一样的空结构。相似的，一系列数字可能被想象成一排棍子或是木桩。但是，在这个例子中，表象不能和运算格式比较，因为它仅仅代表了大致的框架而缺乏内容，或是处理了部分内容而不是全部。另一方面，对应空间系统的表象或多或少地被直接和格式比较，因为这个系统一直是单个客体，而且表象把这个客体作为运算的产物来处理。因此即使表象保持着符号性，而且不能够替代运算本身，它也不能够和客体比较，然而数学逻辑测量运算的产物的符号化的表象仅仅代表了整体系统的不完全的一部分。

这就是为什么，尽管它明显不精确，空间表象还经常被认为是在几何直觉和空间格式中发挥了主要的作用；而且，尽管在事实上，除了那些亚逻辑和逻辑数学测量的运算，后者在运算上与集合、逻辑关系和数量的格式相等。

第二节 亚逻辑运算和连续性

首先，让我们摒弃一种可能的误解。当运算已经完全发展时，它们都会以一种抽象的方式进行，无论是亚逻辑的（时空的）还是逻辑-数学的（独立于邻近性）。这就是说，这些运算通过形式推理进行，通过命题所表述，独立于它们所应用的物质客体。在假设-演绎命题水平上，命题只存在一种含义以及命题之间存在不相容。这并不是说这种逻辑独立于运算或动作，因为命题总是在描述运算（或运算结果），它们的含义和不相容依然是运算，但是属于第二级的运算。这种逻辑的含义是使几何形式化，这就意味着把它置于和其他公理演绎理论相同的水平上，这样它就能够成为一个像其他命题系统那样的系统。然而，在空间运算可以被表述为命题之前，它们是基于生理动作的，并且在这一具体水平上，它们与那些关于数字和逻辑实体的运算（例如分类以及离散客体之间的关系）之间存在显著差异。被数学家称为经验的，而非公理的这一较低水平，是我们当前所考虑的唯一问题。

从这一点来看，依赖于空间概念的运算不是逻辑的，而是亚逻辑的。当然，这并不排除空间实体的可能性，在逻辑运算中同样也会考虑到空间实体。逻辑运算处理的是被视为不变量的单个客体，考虑把它们联系或是相互关联起来，而不考虑它们的时空位置。例如，$A+A'=B$；$B+B'=C$ 等，或是 $A>B>C$ 等。B 就是一个独特的、可识别的分类，与 A 和 A' 之间的距离无关，而 $A>B$ 的关系同样也独立于这些元素的时空特征。与此相反，亚逻辑运算包括在某一物体元素的基础上创造客体。这样它产生的就不是分类或是非空

间关系,而是各种各样的完整客体。例如,它可能会把一个客体的各个部分融合成一个单独的整体或是把它们按照某个特定的顺序排列。因此,亚逻辑关系并非把一个客体和另一个客体联系起来,或是根据相似性(基于类别和对称关系)或差异性(不对称的关系)把它们分开,而是根据邻近性和距离把客体联系起来或是区分开。因此,相邻的一些元素就会形成一个群集α,它与邻近的群集α'相联系,形成群集β等。序列中的每一个群集α、β、γ、σ等都是一个部分的整体,这些部分的整体在不同程度上构成了空间领域的整体客体的一部分。

邻近和分离可以像其他关系一样被视为关系吗?客体的部分可以被视为客体吗?——它们的结合形成了简单的类别——这样亚逻辑运算就只是逻辑运算的一种特例吗?回答是否定的,因为根据邻近性或相似性把元素组合在一起以形成客体或是对客体进行分类会涉及一种关于结合模式的根本矛盾。在邻近性的基础上把元素组合起来最终会产生一个连续的统一整体。例如,如果每个点都与该系列中至少一个其他点相邻的话,那么这一系列的点是连续的。另一方面,基于相似性把元素放在一起会产生不连续的系统,因此亚逻辑运算和逻辑运算不是等同的。这样,如果一些α构成了β的一部分,β构成了γ的一部分;如果客体γ属于逻辑分类A,而A属于另一个分类B,那么γ属于B,因为γ属于A,但是α或β不属于A或B。在这种情况下,在亚逻辑运算中,γ是和α和β相联系的终点,在逻辑运算中又是和A与B相联系的起点,但这两种运算并不能通过过渡而归为一类[①]。

事实上,我们已经看到(第五章)连续性的概念组成了空间概念根基的基本拓扑关系的最终综合。因此,连续性是一种复杂的概念,它处在儿童发展的一个比较高级的阶段,并且应用于运算协调所产生的射影和欧氏几何框架中。但是,从连续性的知觉起源来看,它是客体的有特点的、不同寻常的特征,与分离的集合不同。由于当前的处于最初形式的连续性概念是亚逻辑运算的起点,因而它还会在运算发展的顶点再次出现就显得不足为奇了,并且到时它的形式将把亚逻辑运算和逻辑-数学运算区分开来。事实上,以知觉的连续性开始,这是邻近性的最简单类型的显著特征,连续性的概念沿着两个互补的方向发展。

第一个方向,正如我们在第五章中所看到的,是对客体的逐渐细分,首先分成一些元素,连续的并且与整体是同形的;然后进一步分成点,在数量上仍然是有限的;最后,把这些点分成无限数量的点,这些点既没有形状也没有大小。另一个方向是越来越广泛的协调,从客体自身的协调开始,亚逻辑建构首先是经验性地解决结构之间的拓扑关系。因为这一水平的连续性纯粹是直觉的,也不适用于里面不包括任何客体的空的空间。另一方面,射影空间随着视角的协调不断发展起来,参考系统随着欧氏对比逐渐发

---

① 举一个简单的例子,如果α是线β的一部分,β是正方形γ的一部分,那么γ可能会属于正方形逻辑分类A,进而属于四边形逻辑分类B。但是部分α以及整体的线β不属于正方形分类A和四边形分类B。

展起来，连续性逐渐被应用于整个空间，这一空间被视为对所有客体和所有观察者都有效的一种普遍框架。

亚逻辑运算的结构基于邻近性，而逻辑运算的结构基于相似性，因此亚逻辑运算形成了连续的、统一的格式。换句话说，亚逻辑运算产生了完整的并且连续的空间，而逻辑-数学运算产生了分离的整体。在数字序列形成的特定阶段确实包括连续性。在这一阶段，无理数被添加到有理数中，目的在于填补有理数之间的空隙。然而，显然，无理数源于空间考虑，它们的引入是为了满足使数字序列与空间连续性相对应的需要。因此，无理数并非是逻辑-数学运算的一种自然的、必然的结果，而只是逻辑-数学运算和亚逻辑运算的交点[①]。

第三节　构成基本拓扑关系的亚逻辑运算

尽管我们把研究严格限制于发展心理学的范围之内，也就是说，在不借助预想概念的情况下考察心理发展过程，但我们将试着分析实验结果，观察空间概念的发展过程中会出现哪些类型的亚逻辑运算。此外，我们也将研究亚逻辑运算是如何与儿童的数字概念[②]中所涉及的逻辑-数学运算对应起来的。在这部分中，我们将从分析构成拓扑关系的运算开始，因为实验表明这些拓扑关系与射影关系和欧氏关系相比是非常基础的。

现在，我们最突出的研究结果是：构成拓扑关系的运算在很长一段时间内完全是定性的，并且只包含“精细的”特质。这说明，尽管存在明显的矛盾，但这些运算必须被视为空间的而非数学的！只有当这些运算被“群集”并且彼此协调时，它们才会产生“广泛的”或量化的运算，即数学运算，无论是度量的还是非度量的数学运算。

事实上，可以把实验中被试所使用的运算分为三种类型，或者分为两种基本类型。其中，第二种基本类型又可以进一步分为两种亚类型（包括亚逻辑运算和逻辑运算）。这种分类适用于思维的所有形式而非仅仅适用于儿童的思维。我们以集合 A 和 A' 为例，它们的结合构成集合 B。当运算只考虑到 $A<B$ 以及 $A'<B$ 这种关系，而忽略了 A 和 A' 之间的关系时，我们可以说这种量只是“精细的”。换句话说，这些运算只是向我们说

---

① 另一方面，存在不连续的“抽象空间”，也可能会说到“整数空间”等。因此，邻近关系通过对应性来说明，这种对应性的意义远远偏离这一概念字面的物理含义。但是，我们应当注意到除了保持某种物理特性，这些空间仍然依赖于邻近性的概念，这一概念往往与逻辑-数学概念相符合，并且与数字和空间概念相符合的方式不同（正如无理数的例子）。至于这种没有导致连续性建构的邻近性，它与在这一部分开始时所叙述的一致，即在假设-演绎和公理水平，逻辑和亚逻辑之间的区别不具有显著性。最后，在这些抽象空间实际应用于具体领域方面（例如在原子物理学中，空间在某些方面不连续），我们应当意识到空间的不连续性起因于在这一水平上“客体”的概念不具有任何意义。所以，我们在此处更少受亚逻辑和亚逻辑运算的限制。

② op. cit., *The Child's Conception of Number.*

明整体大于部分,而并没有说明其中的一部分是否比另一部分包括更多或更少的元素。与此相比,如果可以说明A与A'相比,是否包含更多的、更少的或是相同数量的元素,我们便可以说量变为"广泛的"。最后,当个体把A和A'或者A(或A')和B视作单元来比较时,这样个体就可以说出A是A'的几倍或几分之几(或者多少个A或A'可以组成B),我们称之为"度量的"或数量。当测量时不考虑单元,且所知道到的只是A比A'大或小而不知道具体数值时,我们说这种量是非度量的。

在这一点上,澄清术语很重要。数学家通常把空间概念划分为两类:度量的和定性的。拓扑学尤其被认为是定性的,因为它并不考虑度量关系。逻辑也被认为是"定性的",尽管二者的意义不同。一方面,分类和关系的逻辑在"精细的"意义上是定性的。例如,三段论只用于解决部分-整体的关系,例如$A<B$以及$A'<B$。它忽视了各部分之间的关系,因为它只使用"所有""没有""少许"以及"一个"(表示"一些")这样的量词。另一方面,拓扑学在"广泛的"意义上是定性的。例如,在拓扑学上,个体可以说集合A包含"几乎所有的"集合B的元素。也就是说,"除了一个数量不多的群集A的所有元素。"康托尔使用一系列封闭的间隔("封面")来定义连续性的著名假设使用了"几乎所有"这一类型的一系列关系。我们能够立刻看出这种关系具有广泛的特点(由于$A>A'$),而分类的逻辑忽略了这种类型的关系。

在澄清了这一点之后,我们很惊讶地发现:儿童用于形成其基本空间概念的亚逻辑运算完全是精细的。因而,它们可以与那些适用于只用性质进行界定的完全定性的分类和关系逻辑相比较。换句话说,儿童所建构的拓扑关系只包括简单的包围或序列。由于儿童不能处理连续性,因此他只能达到一种定性的空间逻辑(一种"精细的"亚逻辑)。在能够测量事物之前,儿童无疑能够知觉到整体的一部分比另一部分大或是小,例如他自己的那块蛋糕比邻居的小。但是,在相当长的时间内,这些"广泛的"关系完全是直觉的。直到儿童掌握了透视和相似(比例),这些关系才让位于精确的运算系统。另一方面,"精细的"关系在较早阶段引起了直觉概念,现在产生了更迅速的群集。重点是——这也是当前我们所感兴趣的——儿童的基本拓扑学完全是"精细的"。这是非常自然的,因为只有在连续性分析中无限概念的出现才使得拓扑变成"广泛的",进而是数学的,然而儿童在其思维达到抽象水平之前一直在进行有限运算。

我们试着把7岁左右的儿童通过邻近、分离、顺序、围绕以及连续性的精细关系建构的各种运算系统放入格式中。这里的邻近性并非是一种成熟的概念,而是一开始就存在的。因此,成为运算建构的起点。在下面的讨论中,我们将使用A和A'或者B和B'等来表示两个相邻的元素。

在分离的研究中,当A和A'这两个元素没有共同点时,它们是分离的:$A \times A' = \phi$。可是,我们发现当儿童把分离和围绕(包围)或边界(封闭)结合起来时,他能够更巧妙地处理分离概念。这在4岁左右的儿童(在他们可以画三角形、正方形以及其他的欧氏几何图形之前)的绘画中表现得很明显。这些早期绘画的内部、外部或恰好在封闭平面的边

界上会有某些元素。这样的一种观点可以被表述为：一个元素的环境组成了一个彼此相连的邻近性集合（即，邻近的一种亚集合），并且如果能够定义"在 A 之内"，"在 A 之外"或者"在 A 的边界上（A_0）"这些位置时，环境中的这一元素就被一个边界所封闭起来。如果一个点的环境只包含属于 A 的点时，那么这个点（或者 A 下级的任何元素）将在 A 之内；如果一个点的环境并未包含一个属于 A 的点时，那么这个点将在 A 之外；最后，如果一个点的环境包含 A 之内和 A 之外的点时，那么这个点在 A 的边界上。在将 A 与 A' 相分离的边界的例子中，使用双重分离来表示这种分离[①]：$(A+A_0)\times A'=\phi$，并且 $(A'+A_0)\times A=\phi$。

至于顺序的概念，它或者建构于一种元素的线性序列，或者建构于一种封闭的序列（线围成面或面围成体积）。最后，在符号思维和具体运算阶段，连续性以一种介于知觉连续性和数学连续性之间的形式出现。也就是说，在使无限概念得以理解的形式运算以及最终出现广泛的量化之前。众所周知，庞加莱使用公式：$X=Y$（X 与 Y 相同），$Y=Z$，但 $X\neq Z$ 来表示知觉连续性，这一公式非常简洁地描述了知觉的不合理本质。在符号思维和具体运算阶段，连续性可能会假设一种合理的形式（尽管这一形式在数学上是不充分的）。因此，X 与 Y 相邻而非分离；Y 与 Z 相邻而非分离；但是 Z 通过 Y 与 X 相分离。

一旦这些概念在儿童的头脑中以直觉形式出现，他能够形成接下来的运算结构。也就是说，只要这些概念得以充分联系来保证可逆的结合，儿童便到达了具体运算水平。

Ⅰ.集合的部分与子集的加法

第五章的结果揭示出儿童从六七岁开始，可以把一个连续的整体分成相邻的元素，然后再把它们组合成一个连续的整体。

因此：

$A+A'=B$，$B+B'=C$ 等；和 $C'-B'=B$；$B'-A'=A$

这可能是儿童建构的最基础的运算群。如果它直到儿童7岁时才出现，在把一个连续的客体打乱的例子中，这是因为在想象细分和物理连续性之间的心理分歧。在另一方面，如在一个方格纸或是一个马赛克图中，过程已经被揭示出来，细分和加法运算出现得非常早。

很明显，在邻近性的亚逻辑领域中，群和类包含（A，B，C 等）在逻辑上几乎是等价的。

Ⅱ.放置的顺序

第三章表明线性顺序的概念通过邻近性逐步形成，结果形成了正向和逆向的元素顺序 A，B，C 等。

$A\rightarrow B\rightarrow C\cdots$——$C\rightarrow B\rightarrow A$。通过遍历反向的序列而得到的逆向顺序实际上是一种

---

① 参见 Kuratowski，*Topologie*，Warsaw and Lodz，1933，pp. 99 and 101。包围和边界的数学概念是"点极限"和"凝结点"概念的结果，这些概念当然是广泛的概念。

位移,不是从客体的欧氏运动角度,而是从主体遍历序列的角度。

如果$A \to B \to C — \cdots \to X \to A \to B — \cdots$等,是圆形顺序,方向也可以被反向。

当一个给定的元素的环境或是连续封闭被按照顺序排列时包含了同样的群,在这种情况下,如果A是第一个封闭(封闭曲线围成一个表面,或者是表面围成一个体积),B是第二个等;接下来,顺序$ABC \cdots$会和群(Ⅰ)子集的加法一致,除了后者和顺序是独立的,因为$A'+A=B$和$A+A'=B$是同时获得的。

很明显,这种类型的群集的结果是放置的顺序,在逻辑的非对称的序列中是等价的。这就是当前情境下的亚逻辑,然而,不仅通过包含的邻近性表现出来,也会引起欧氏几何中的位移运算。

Ⅲ.*邻近性的互反性*

虽然这一点在先前的工作中没有涉及,但是可以从先前关于地理邻近[①]概念的研究中得知,儿童并不是在一开始就认识到邻近性必然是互反的。然而,在以上讨论的运算水平中,很明显,这种概念现在对于儿童而言没有多少困难。

如果在群Ⅰ中,儿童从元素A开始,认为A'是它的相邻元素(通过A_1和A'字的形式表现出来);他也可以从A'开始(通过A_2表示),认为A是它的相邻元素(通过A_2'表示)。随后他认识到:$A_1+A'=A_2+A'(=B)$;$B_1+B'=B_2+B'(=C)$;等。

这种关系(对分离关系也是一样)在逻辑中是"分离"的子逻辑副本。

Ⅳ.*对称的间隔关系*

就像在逻辑运算中,分离的群(是分类的群)被指定为对称关系的群,所以在亚逻辑域中,分离的互反性同样通过对称关系系统来表达,即间隔关系。基本的拓扑概念里没有距离守恒,这里的间隔关系和其他简单的"之间"关系的顺序的群(类型Ⅱ)相区别。例如,在正向顺序中,B在A和C之间;在逆向顺序中,B在C和A之间。因此,这种群起源于群Ⅱ(发展的方式和对称关系系统与从序列发展过来的方式相似):

$A \longleftrightarrow B(=\Phi)$;$A \longleftrightarrow C(=B)$;$A \longleftrightarrow D(=B,C)$;等。

我们在第二章中可以发现,儿童一旦形成了线性序列,他就理解了"之间"的概念,然而在它之前还有许多问题;而且,我们知道儿童在圆形顺序$ABCDAB \cdots$中是如何发现任意一个元素(比如D)总是在两个元素之间,正向顺序时是B和A,逆向顺序时是A和B[②]。这种群同样适用于封闭的序列(如在第三章叠加衣服的实验中以及在第四章中绳结的实验中)。

---

① 如果A和B相邻,那么B必然和A相邻吗?参见 Niculescu, Florea. "Les idées de l' enfant sur le village et la famille: tude sur le pense enfants roumains," Annemasse. 1936. (Thèse de Fac. Lettres. Genève, No. 79).

② 中文版译者认为,英文版译者在此句中误将C写成了B。——译者注

Ⅴ.元素的一一对应乘法

在第四章(第2节)中,在儿童能够理解正交坐标系的欧氏概念之前较长的一段时间内,他把维度理解为拓扑封闭关系。封闭在一个盒子中的一个客体只能和盒子外面的另一个客体通过穿越盒子的一边联系起来,即通过贯穿表面。在一个闭合的表面"里面的"一个元素和外面的元素只能通过穿越表面的边界联系起来。排成一条线的在C和A之间的B只能通过穿越C点和在AC另一边的元素D联系起来。这三种封闭的类型提供了维度的最简单的直观表象,一个三维系统以一个表面(一个二维系统)作为边界,一个二维系统以一条线(一个一维系统)作为边界,一个一维系统以点(零维)作为边界。一旦儿童从单维系统发展到双维系统,这些关系就会发展成为一个乘法群。在单维序列$ABCD$的例子中,把B和D连在一起的线是$ABCD$连线的一部分,因为它只是从这条线中去掉了某些点(比如C)。在另一方面,把一个封闭的表面内的一点和外面的一点联系起来的连线也把边界进行了切割。如果边界通过序列$A_1B_1C_1D_1$…切割线用序列$A_2B_2C_2D_2$…表示,二者的点是相同的。例如,让我们假定点C_1和点D_2对应,因此通过C_1D_2表示。这就组成了一个乘法运算,通过短语"同时"来表示,因为点C_1D_2"同时"属于序列$A_1B_1C_1D_1$等和$A_2B_2C_2D_2$等。在两个维度上,同样的运算也适用于曲线[①]的两个集合,儿童可以直观地感知到在任何网络中,这种关系都可以在两个方向上同时进行探索,就像交叉参考表一样。

因此如果元素是以群Ⅰ的方式闭合,逻辑乘法会使两个序列的元素出现类似于群Ⅰ交叉的组合形式:$A_1\times A_2=A_1A_2$;$B_1\times B_2=B_1B_2$;等。同样的结构可以延伸到三维或多维中。

Ⅵ.关系的一一对应乘法

儿童可能会基于关系来建构一个相似的二维或三维网络。虽然我们已经在研究维度的发展中检验了元素的乘法群,我们在处理关系时经常遇到相同类型的群。它们已经形成了一一对应的形式(质性同胚),从中儿童建立了顺序序列中成对之间的顺序。事实上,一一对应组成了一个网络,就像刚才提到的那个一样。因此,一个序列中的元素$A_1B_1C_1$等要和另一个序列中的元素A' B' C'等对应,要在A'和A_1',A_2和A_2'等元素之间建立联系。至于这种联系的精确本质,它通常不只是眼睛运动的轨迹,虽然很明显,它可以通过对应元素之间的连线来表示。在这种情况下,线会从序列$A_1B_1C_1$和$A_1'B_1'C_1'$穿过,形成了一个二维的乘法系统。

Ⅶ.和Ⅷ.元素或关系的一对多乘法

虽然我们没有从拓扑关系的角度(就像在第十二章处理角的问题那样)解决这个问题,然而,很明显,儿童的一一对应会影响他的一对多对应。例如,在一个矩阵中,元素

① op. cit. L. Godeaux, *Les Géométries*, p.180.

A 可能和几个相邻的元素 $A_2B_2C_2\cdots$ 对应，而且序列 $A_2B_2C_2$ 很可能和更多的相邻元素 $A_3B_3C_3D_3E_3\cdots$ 对应。这种连续的邻近性的扩展会形成一个拓扑结构，它预示着我们在处理角的问题时会遇到的射影系统和欧氏系统。

这就是定义简单拓扑关系的运算系统，儿童一旦到达了具体运算阶段就会掌握这些关系。即使他们象征性地表达出在他们的动作中含蓄的内容，它们都依赖于封闭性、顺序序列或对应性，即在概念上不包括广泛的量化的概念。这种系统只能采用定性推理，通过逐步的二分法进行。用数学语言来说，这是“群集运算”而非“群运算”。

第四节　由射影关系构成的亚逻辑运算

基本拓扑关系存在于单一客体的相邻部分之间，或客体和与之直接接触的环境之间，是连续的并且与距离无关[①]。这样的一个空间仅仅是元素的连续的集合，这些元素可以任意地扩大或缩小，同时直线、距离、角度也不会守恒。因此，拓扑概念并没有形成图形的稳定系统，也没有确定这些图形之间的关系，就如同参考框架确定了相对位置，或者射影系统定义了形状和图形相对于平面或视角的方向。拓扑的，每一个连续的领域构成了一个空间。因此，这里不存在一个通用的空间，能够作为一个框架进行运算，同时可以使客体或图形能够彼此参照进行定位。

在儿童空间概念的发展过程中，我们发现了与之前在时间实验[②]中相同的演变进程。拓扑概念比射影和欧氏概念发展得更早。起初，射影和欧氏概念在应用上受到了限制，后来它们导致了唯一的且包含一切的参考框架的出现。因此，我们可以在空间概念的发展和时间概念的发展之间进行类比。对于儿童来说，刚开始的时候，时间纯粹是片面的，并且分别适用于一个运动。后来，这些分离的概念融合在一起形成了同质且普遍的时间。与之相似，对于儿童来说，这里有多少个客体，多少种不同的图案，相距更远的元素之间有多少属于元素本身或毫无空间性质的间隔，这里就有多少个空间。在这一点上，射影运算在空间的整体协调中起到了至关重要的作用，这种作用如此重要以至于现在必须从运算结构的角度进行总结和概括。

射影概念不仅涉及内部的拓扑关系，而且涉及图形的形状以及它们的相对位置和视距，尽管通常与特殊的视角相关。例如，透视图不仅从视距的角度展示了一个图形的各部分之间的关系，而且展示了完整图形之间以及整个布局相对于特定视角的关系。拓扑概念是在没有参考系统的帮助下逐步发展起来的，然而射影概念运算可以参考协调的视角以及图形的射影平面。

---

① 同胚，初看可能包含一定距离的对比，它简单地表示了连续地改变一对对应图形中的一个图形可能性。

② *La Développement de la notion du temps chez l'enfant*, 1946.

与坐标系统不同，射影系统不能保持距离与维度的守恒，但却可以保持一个图形的各部分之间，或图形之间，或是图形相对于观察者，或对应着视觉领域的平面之间的相对位置的守恒。从心理学的角度来看，这一进程的本质特征是观察者的进入，或者与图形被投射角度相关的"视角"。从这个方面来看，射影几何可以被称为视角几何，并且它以拓扑关系的优先形成先决条件，这些拓扑关系在守恒的同时也在逐渐被射影几何所取代。

因此，基本射影概念建立在与拓扑概念相同的运算基础之上，但是加入了"视角"。例如，通过把这种"视角"与顺序的运算（类型Ⅱ）联系起来，射影直线被构造出来。因为，就像我们在第六章（第一部分）中看到的那样，直线是一系列的点，这些点被这样排列出来，即人们如果从"末端"看，可以看到它们被排成了一条线，同时在投影过程中，它们不断缩短最终变成了一个点。与此相似，空间维度的概念可以被更加清晰地定义为通过给定视角限定的条件的集合。因此，在拓扑学上，一维与直线序列相对应，第二个维度与闭合的线性边界的内部和外部的概念相对应，第三个维度与闭合的二维边界（表面）的内部和外部的概念相对应。但是考虑到与图形相关的透视视角，这些相同的关系现在可以包括相对方向，可以被表述为"在左边或在右边""上面或下面"以及"前面或后面"，这样它便表示出了三维空间的三个方向。因此，儿童可以只根据第三种关系而非前两种关系构造出直线，或者儿童可以通过前两种关系而非第三种关系构造出平面（例如，在第八章抽象出水平面的实验中）。

直线由一系列先后排列的点构成，这些点都在直线上面，不是在左边就是在右边，不是在上面就是在下面，从其他例如从左向右，或者从上向下的视角来看，它都可以被识别出来。这是投影几何的两种基本运算即射影和截面的结果。此外，直线对于射影而言成了一种重要的元素，因为投射一个图形意味着把它转换成平面上的另一个图形，这种转换是通过第一个图形上的点与第二个图形上对应的点的连线来实现的，这些连线是从这两个图形外部的一些点发射出来的。在促进空间概念产生的运算中，"视觉平面"（位于客体和观察者之间的前平行平面）上的客体投影发挥了主要的作用。正是在掌握这种运算的过程中，儿童渐渐理解了与它们自身相独立的射影，例如影子（第七章），同时这也正是我们主要从透视射影（这就是几何学上"一级图形"的射影）的角度来研究这些问题的原因。因此，他面临的主要问题是用更加基础的射影和截面来把客体和视觉领域联系起来，同时想象出沿不同横截面所截的射影方式来协调连续的视角（多个观察者，多种视角）。

在这些过程中，直线享有一个特殊的地位，不仅是因为它是射影建构的工具，而且（出于某种原因）在视角改变的时候，它的形状可以保持不变，只是它的长度会随着点而发生变化以进行限制。与基础拓扑关系一起被描述的八种运算群在射影关系的精细化中再次变得很明显，尽管"视角"概念的引入使它们发生了改变。然而，至于前述的运算，首先目前的发展还不是真正数学性质的发展，因为它仅仅包含了与定性逻辑运算相

类似的"精细的"亚逻辑运算。更不用说,这样的运算不能处理在射影几何(例如,谐和的四元数的守恒)中被使用到的精确的"广泛的"关系,同时正是通过随后的量化过程,这些基本的射影概念实现了数学的形式。然而就像我们经常指出的那样,努力尝试并分析投影几何的亚逻辑基础是十分重要的,因此它遵循着独立的发展进程,这已经被在绘画发展过程中的特定阶段出现的透视所证实。

Ⅰ.射影元素的加法和减法

在基本拓扑关系的水平上,把相邻元素相加起来(例如$A+A'=B$;$B+B'=C$)的唯一结果是得到了这样的概念,即部分保持不变,并且与整体的外观变形无关。尽管在第三节中已经提到并且它是空间关系中最简单的一个,考虑到前逻辑阶段儿童所面临的困难,它的重要性就不应该被低估。为了回到中心点,一个拓扑客体可以沿着任意方向扩大或缩小(就像在第五章中使用到的橡皮圈),在这一与同胚客体的元素相对应的过程中,它的元素也不会减少或消失。但是,这样的关系不能用来定义扩大和缩小。它们被限制于描述在变化中保持不变的恒定量,在给定的结构之外并且没有任何参考的情况下,这些必然会被认为完全是任意的。

与此相反,射影图形中的变化是由视角的变化引起的。这一新的特征(暗示着它经历了整个协调的过程)使组合的发展成为必需,这种组合可以使儿童能够处理整体的守恒以及它们在守恒过程中的一系列变化的问题。

在诸如把一个客体的相邻部分连接起来的实验($A+A'=B$;$B+B'=C$;等)中,逆向的射影运算包含着减少一个元素($B-A'=A$等),这种元素不再能够被看出,因为它被充当屏幕的其他客体所遮挡了。这种减法运算表示了一种截面,然而,相邻部分的结合(例如,正向运算)代表了所有元素(或投影在相同平面上的元素)的守恒,这些元素属于从某些视角看到的客体。

另一方面,当客体的一部分遮挡了另一个客体的一部分(在视角的翻转下,会形成互补关系),或者当一个属于单一模式的元素截断了另外一个元素(对于互补视角,反之亦然),接连发生的这些加法和减法并不简单,就像我们已经描述过的那些类型一样,它们是相互分离的。这直接带领我们来到了群集的类型Ⅲ。因此,群集Ⅰ只涉及物体透视图的结构,考虑了相互联系的部分以及因为干预其他客体或客体的一部分而被抑制的部分。

Ⅱ.直线顺序

当一系列的点被投影在第一个点上的时候,在竖直排列中,这种透视视角的效果就是把最初的拓扑结构提供的线性序列$A \rightarrow B \rightarrow C$等转换为直线性序列。这种通过"设定目标"(第六章,第一部分)的实践而获得的基本运算与先前的运算有关。从某种意义上,可以说是它起源于先前的运算,因为它就是把整体长度缩短为一点,从而隐藏了其

余的点，这种缩短有助于人们对直线的识别。相反的，这种运算以先前的运算为条件，因为它恰恰是构成透视整体（彼此相关并且和观察者相互关联）的汇聚和平行线的组合。结果是，只有直线可以在透视变换中保持形状不变，而平行线、角度和曲线的形状在视角改变的时候均会发生改变。

Ⅲ.互补的投影关系

在第三节中，最初$A_1+A'_1=A_2+A'_2$等运算表示邻近和分离是可交换的。在透视视角方面，这种运算具有了新的意义，它的重要性已经在第八章中被强调过。这一新的方面就是视角的相互作用（在逻辑方面而不是在射影几何中的技术意义），视角彼此之间是互补的。让我们从给定的视角，以从左向右的点的范围A_1+A_1'为例来进行说明。对于站在第一个观察者位置对面的第二名观察者（两个观察者位置之间的范围），同一个序列从左向右看到的是$A_2 \pm A_2'$，A_2与A_1' 相同，A_2' 与A_1相同，所以$A_1+A_1'=A_2$，这同样适用于从前向后的序列，等等。假如类型Ⅰ的单一群集表示相邻元素的守恒，那么类型Ⅲ的运算则表示它们在逆向视角下的相对位置的守恒。

第六章和第七章表明在运算的类型Ⅰ、类型Ⅱ和类型Ⅲ之间存在着一个短时延迟。在3A亚阶段的一些简单实验中，前者已经实现了群集，而后者一直到3B亚阶段才被儿童所掌握，这时视角以一种全面且综合的方式被协调了起来。

Ⅳ.对称的间隔关系

通过关系来表示，刚刚讨论过的类型Ⅲ的群集实际上构成了对称关系，不仅在逻辑意义上，而且在真正的空间对称和排列中，中间的元素保持它们的位置不变。例如，组合$A_1+A_1'+B_1'=A_2+A_2'+B_2'$表明，在逆向视角下，左边的元素$A_1$被右边的元素$B_1'$（现在是$A_2$）所替代，同时右边的元素$B_1'$被左边的元素$A_1$（现在是$B_2'$）所替代。同时，在间隔$A_1 \longleftrightarrow B_1'$（或$A_2 \longleftrightarrow B_2'$）中间的元素是保持不变的，且$A_1'=A_2'$。与中间不变的元素相比，$A_1+A_1'$和$A_2+B_2'$这两对元素是对称的。

从类型Ⅲ的组合来看，我们有可能得到类型Ⅳ的组合。本质上，这就是$X \longleftrightarrow Y = Y \longleftrightarrow X$，尽管存在逆向的视角，处于$X$和$Y$的间隔之间的元素仍然存在。一旦儿童掌握了在第八章中提到的互反性，他便能够理解这一事实。

Ⅴ.元素的一对一乘法

在拓扑关系的水平上，这种群集导致了基于封闭概念（见第三节）的维度结构的形成。通过透视视角的引入，相同的运算系统导致了射影维度的产生。因此，与给定的视角相关，这里会存在一些未被限制为一种分离模式的关系，例如“内部”或者“外部”，但是它会在很多图形之间保持不变。这种关系与“左-右”“上-下”和“前-后”的概念是对应的。与透视视角和类型Ⅴ的乘法群集一起，全部的这些关系形成了平面或平面集的

概念(与表面或三维空间不同)的出现。首先,平面与网络是一样的,这个网络上的交叉点(换句话说,这是乘法的成果,不是算术的而是逻辑或亚逻辑的)是依靠以上提到的三种关系中的两种关系建立起来的。因此,从给定视角看到的平面会逐渐缩小成一条直线——就像直线逐渐缩小成一个点一样——构成平面的所有直线要么都是从“左—右”的,要么是从“前—后”的,而不会是从“上—下”的。与此相似,平面的乘法导致了平面集的出现,即一个三维投影空间。

Ⅵ.关系的一对一乘法

实际上,上面提到的运算构成了双重或三重的交叉参照系统,并导致了射影空间维度的产生。与它们相类似的是处理对称关系的运算系统,它们在透视图中发挥着主要作用,并能够把背景的高和宽与前面的维度联系起来。

让我们以一个透视图(例如第十四章中从45°位置看到的村庄模型,或第八章中三座山的图画)为例来说明一下。前面是以一条很长的从左向右的直线开始,背景以一条与刚才的直线相平行(实际上是水平线)的直线结束。在这两条线之间,客体沿着视角分段的汇聚线从前向后放置,它们的外观长度比它们的实际长度更短。最终这些客体按照从上到下的顺序排列,从欧氏意义上来讲是水平的,但是此处只是从射影深度的意义上来讲。在这样的图中,所有客体同时在三个关系上联系起来,左×右、前×后、上×下。换句话说,根据三重交叉参照系统,坐标系统的射影对应物会根据特殊的视角而改变。

一旦儿童理解了射影的长度会缩短,那么三个维度(客体之间一一对应的三种类型)上的关系的乘法群集便使得儿童可以画出按透视法缩短的倾斜木棍(见第六章,第二部分)。如果我们把从侧面看到的木棍的各部分称为A_1,A_1'和B_1',各部分可以通过参照点被识别出来($A_1+A_1'=B_1$,$B_1+B_1'=C_1$,即木棍的全长);然后通过把感知为倾斜的木棍插入到上述的网络中,儿童可以认识到这些部分与缩短后的长度A_2,A_2'和B_2'相对应,所以有$A_2<A_1$,$A_2'<A_1'$,$B_2'<B_2'$[①],因此$B_2<B_1$,$C_2<C_1$。类似地,当木棍变得更加倾斜时,它的元素A_3,A_3'和B_3'将会有$A_3<A_2$,$A_3'<A_2'$和$B_3'<B_2'$。因此,与广泛的量化(这将逐渐发生变化)相互独立,最终在没有进行任何测量的情况下,儿童可以通过使用“长一点×短一点”的对抗关系,把所有转动的木棍的连续透视图对应起来。在关系的精细乘法中,我们获得了亚逻辑的起点,即一对一的射影对应或“同源”发展的起点。

Ⅶ和Ⅷ.元素和关系的一对多乘法

上述的运算系统组成了一个正交系统,这一系统依照给定的两个或三个维度的一一对应的双重或三重集合。与此相反,一对多的对应关系描述的是三角形的结构,这种

---

① 中文版译者认为,此处英文版译者误将B_1'写成了B_2'。——译者注

关系最简单的例子就是，在水平线上相交的一对透视线，例如第六章（第二部分）儿童画出的铁路线或栅栏。这样的系统也是二维的，因为沿着一个维度有连接轨道的枕木或栅栏的立柱，而沿着另一个维度是轨道、地平面和栅栏的顶部。但是这种对应关系不是一对一的，而是一对多的，因为每一个在长度上的增加量都可以被视为在零点（0）上加上了一个新的元素。因此，轨道相交处的位置对应着可察觉到的最短枕木（*A*），随后依次对应着长一点的枕木（*B*），最后对应着最长的枕木（*T*），枕木*T*也是距离观察者最近的。这种一对多的对应关系可以用元素（类型Ⅶ）或关系（类型Ⅷ）来表示。

从水平交点到距离观察者最近的点，枕木或立柱的逐渐增长导致了一种“广泛的”量化，这是在所有可能性中，儿童可以理解的最简单的类型，即儿童把增长看作是连续且统一的过程。但是，在第六章中看到的儿童反应的重点与此相反，在儿童不能考虑透视并且认为枕木的长度保持不变的阶段与儿童可以预料到这种变化是连续且统一的阶段之间，存在着一个儿童满足于“精细的”量化阶段。由于枕木出现在更远的地方，它们的尺寸不规则地减小了。换句话说，如果长度O，A，B，C等被规定在水平线交点O和最大的枕木*T*之间，同时它们的差值*A*（在*O*和*A*之间），*A*′（在*A*和*B*之间），*B*′（在*B*和*C*之间）等，而并不是$A=A'=B'=C$等或者$A<A'<B'<C'$等，这代表广泛的量化，在没有对它们的差值本身（*A*，*A*′，*B*′等）进行量化的情况下，这里简单地有$O<A<B<C$等。这些小例子很清楚地表明在这一阶段中的亚逻辑运算与简单定性逻辑（当$A+A'=B$时，仅仅包括关系$A<B$）是可以比较的，并与开始于差值比较（即把部分相互联系起来）的数学关系不同。

正是这种一对多关系的系统（它的亚逻辑格式我们已经讨论过）使得儿童能够近距离地认识到广泛的量化，即对透视的数学处理。一对一的对应关系使得儿童能够识别出在同一物体不同透视图中的相等元素，而这些一对多的对应关系表现为儿童认为尺寸会随着距离变化而发生改变，二者一起通过前数学的形式构成了“同源”的一个定性基础。

第五节　欧式空间中的亚逻辑运算

介于射影关系和欧式关系中间的是位置的变化（位移）和细分（分割），当然，儿童在掌握前者的时候也开始理解其他关系。

射影关系并不能保持平行线、角和距离守恒。另一方面，仿射关系可以保持平行线守恒，但是不能保持角度和距离守恒。菱形的转化就是一个例子（第十一章），我们也指出一旦儿童通过在实践中“设定目标”的方法掌握了射影直线的概念，掌握平行线（即使在菱形中是以倾斜的形式呈现）的概念就不困难。一开始这看起来非常古怪，因为从透视上看平行线会出现汇聚。但是，首先，设定目标的运算表明了通常保持方向不变的想

法,而且也适用于两条线,就像对一条直线那样容易。其次,当儿童明白了透视以后,他可以协调不同的视角。尽管在3B亚阶段之前他还不能全面地协调不同的视角,但是在透视线的例子中,儿童不难理解相对的视角看到的关系是相反的,因此两条直线对应着一对渐远的视角。我们可以再一次认为这个概念的发展领先于相对量化或绝对量化的发展。

然而,在相似性的例子中,图形保持它的形状不变(直线或曲线,平行线和角),但是图形的大小却随着比例关系而变化。在第十二章中,我们看到,在儿童掌握比例的意义之前,不论是度量的还是广泛的,他都不能通过对应边平行的方法认出一个三角形与另一个包围着它的三角形相似。此外,到目前为止,儿童可以通过把图形重叠之后再拿开的过程中的角的相等来进行同样的发现。然而在这些例子中,儿童只进行了粗略的估计。儿童认为形状大致上是相等的,或大致上是不相等的,在很长一段时期内,儿童都不能做到精确的测量或比较。因此,儿童就像在透视图中那样,根据一对多系统估计相似三角形的角度(第四节中的运算Ⅶ和运算Ⅷ)。即使这些运算群集最终没有使儿童掌握比例的概念,我们在第十二章中可以看到,从“精细的”这一意义上说,它首先纯粹是定性的。

至于由物理位移和欧氏测量组成的关系,除了使直线、平行线和角度守恒之外还可以使距离守恒。尽管我们早先调查了儿童关于物理位移[1]的概念,但在目前的研究中我们还没有解决距离的问题,更不用说解决测量涉及的主要问题,而这些问题在下一卷书中会得到解决。然而,我们关于自发的坐标系统(第十三章和第十四章)的研究,以及我们对运动的概念和物理位移的现有知识,使我们能够刻画出“精细的”空间运算的显著特征,而这也为真正的数学量化(在具体的测量案例中)奠定了基础。现在,这个问题也许会被问及,儿童是如何在不通过度量运算的情况下而优先地掌握距离或者大小的守恒的,因为距离脱离了测量的概念是毫无意义。如果情况是这样的,每个人就必须超越“精细的”定性运算。

如果没有顺利地跟上具体的空间测量的心理发展过程,他就进入了恶性循环,几乎与他们在时间测量中遇到的问题一样难以理解。在这里,通常心理学家关注物理学家而非数学家遇到的困难和关注点。测量假定在位移中大小保持守恒,因为在测量客体的时候,如果一根杆的长度能够变化就很不实用。事实上,年幼儿童不相信(请允许我们提前使用了后面工作的内容)长度的守恒,同样也不相信间隔和距离的守恒。因此,首先是简单的“精细的”的部分组成整体($A+A'=B$,等),这保证了在可能的测量之前的整体的守恒性,这也是我们早先在量[2]的守恒的研究中发现的。然而,当我们解决空间问题时,我们发现这个运算已经包含于拓扑整体的形式中(如一个有弹性的客体,或者

① 《儿童的运动和速度概念》第一章到第五章。

② J. Piaget and B. Inhelder. *Le développement des quantitiés chez l'enfant*, Geneva, 1941.

一个绳结,第四章和第五章),尽管这保证了这一整体是各部分总体的守恒,但是没有保证大小(长度等)的守恒。因此就产生了问题,即儿童是如何从相邻元素的守恒(第三节)过渡到长度和距离的守恒。

正是这种转换将欧氏空间从射影和拓扑空间中区分出来,即使同时也表明了它与后者的亲密关系。在拓扑空间中没有能提供参考框架的结构,因此也没有大小和距离的守恒。这后一种性质只在稳定的整体的参考框架或坐标系中才存在,距离是其中基本的组成成分。此外,与客体的大小变化(只考虑它们与主体之间的关系或是射影平面)相一致的视角的整体协调相反,欧式空间假定客体实际位置的坐标与客体的移动有关。移动的客体和它的连续位置间的关系使得它能够保持大小和距离不变。因此,距离和长度的守恒是整体的参考框架在发展中的一个必要的基本元素。

虽然欧式空间是以这样的方式从射影空间中区分出来,我们仍可以看出二者在本质上是同源的。不言自明的是,欧式测量(通常是度量的例子)和投射基于拓扑学是有可能的。建立坐标系所需要的公理与射影系统所需要的公理是等价的。但是从心理学的角度来说,当主体可以协调不同的视角时,他也可以构建射影关系,同样也可以协调距离,并且构建欧氏关系。因此,这两个系统是互相依赖的。

事实上,它们都会形成互相联系的图形或客体,取代了以特殊结构局限于邻近部分的过程。结果就出现了守恒,或是在视角的变化过程中保持不变的、抽象的、形式的、关系的守恒,或是在整个物理位移中的距离和大小的守恒。形状的恒常性与大小的恒常性在感知中是相联系的,因此可以被同时以视角和它的实际大小所感知,而且协调不同视角的运算是从客体自身的角度(例如,观察者从某个视角将东西放进去或者放在上面或者穿过它)来保证大小守恒的一部分。通过直线的方式将视觉表象和遥远的客体相联系意味着将这些客体拿近与这些线放在一起或者把直线按照相同的轨迹移向客体。两种情况都是通过将客体拿近来扩大它,直到出现它的真实大小。

这就是整体的射影系统通过互惠或互补的构建会导致位移(客体位置的变化,而不只是观察者位置的变化)的整体协调,最终导致与大小守恒的多个位置(或“放置”)的整体协调的原因。

坐标系统中的亚逻辑运算与上文已经概述的是类似的。但是,它们不处理与某个视角相对应的客体,也不处理视角的变化,而是处理与“放置”或位移有关的客体的多个特征。

Ⅰ.元素的加法和减法

考虑到一个客体(一维或者多维)占据了一些与其他客体相联系的位置。因此可以根据客体的形状或者它的位置来定义一些图形。也就是说,作为一个“空间图形”或者位置系统中的一个确定的部分。因此这些位置或“放置”不过是客体之间的某些关系,这些关系会被从运算Ⅱ开始处理。但是,即便是这样,从心理学的角度看,类型Ⅰ的运

算在考虑客体的位置之前首先考虑它的形状,颠倒这些运算的顺序没有多大作用。

因此,类型Ⅰ的运算仅仅能够把一个给定图形的各部分:$A+A'=B$,$B+B'=C$等联系起来或分离开来,并且保证了整体的守恒性,同时保证了客体的相对位置和形状的守恒。

Ⅱ.客体的放置和位移

现在让我们来考虑一下大量分离的客体,并且将它们按照任何给定的线性顺序(运算Ⅱ,第三节)排列,或者沿着一条直线(运算Ⅱ,第四节)排列,这将会有$A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow\cdots$这些客体将会被说成是"放置"在彼此的关系中。但是在组成欧氏空间概念的运算系统中,逆向运算不仅仅是沿着反方向排列系列$\cdots\rightarrow C\rightarrow B\rightarrow A$。它包含序列或"放置"的变化,即包括整个序列或是单个元素的反转的位移,例如$A\rightarrow C\rightarrow B$是将$B\rightarrow C$反转。正如我们在前面的研究[①]中所指出的,这个位移引入了元素的顺序和他们放置的顺序之间的区别,以及两个类似运算之间的区别,这是基于它们是否应用到运动的客体和它们潜在的位移,或者根据它们运动时穿过的固定位置。

在把由"位移群"定义的六个参数整合进定性的"群集"之前,"位移"的概念并没有超越纯粹定性的概念。

Ⅲ.参照的相互作用

让我们来考虑几个相邻的图形(由客体的形状或位置组成),同时考虑类型Ⅰ的运算,从参考点A_1开始。我们可能得到$A_1+A_1'=B$和$B_1+B_1'=C$。从被称为A_2的参照点A'或B'开始,也有可能以C结束,并且有$A_2+A_2'+B_2'=C$。同时考虑几个维度(类型Ⅵ)的顺序群集,类型Ⅲ的运算形成了相互作用的坐标系统或是参考系统。元素A_1和A_2被视为每个特殊系统的"起源"。

Ⅳ.间隔或距离的包含

直线上两点之间的间隔组成了距离。距离的守恒可以通过点在直线上的固定位置来保证,也可以通过一个穿过的运动的客体来保证。由于X和Y两点间的客体的位移组成了一个非对称的关系,距离组成了对应的对称的间隔关系,对称是因为从X到Y的距离与从Y到X的距离是相同的:$X\longleftrightarrow Y=Y\longleftrightarrow X$。

Ⅴ.元素的一对一乘法

元素为$A_1+A_1'=B_1$,$B_1+B_1'=C$的一个线性序列与另一个序列$A_2+A_2'+B_2\cdots$相乘,构成了一个表面。这两个序列与第三个序列$A_3+A_3'+B_3'+\cdots$相乘,构成了一个体积。

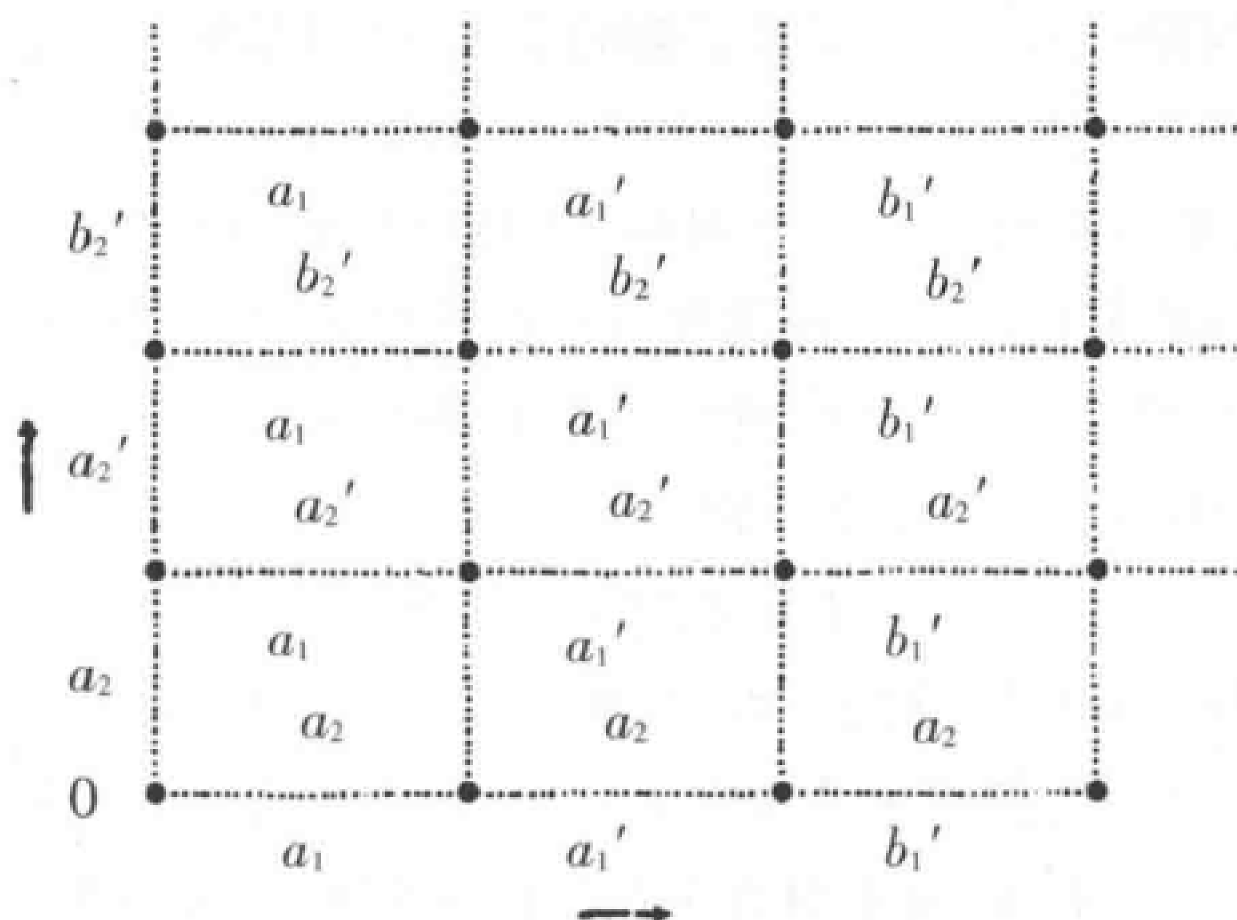
---

① 《儿童的运动和速度概念》第三章、第四章和结论。

Ⅵ.放置和位移关系的一对一乘法

当这些运算以非对称关系表示的时候(放置和位移的顺序),它正是一个坐标系统。实际上,这样的系统是一个根据参照点或静止客体"放置"的网络,同时占据两个到三个维度。沿着一个维度的一个序列组成了一个轴,沿着第二个维度的另两个序列组成了另一个轴。给定的放置之间的间隔组成了不变的距离(如运算Ⅳ中的定义)。这样的坐标系并不一定是度量的,就像在第十三章和第十四章中表现的那样。如果这一关系群集的结构在第三节和第四节中被详细地分析过,那么这一点就能很轻松地被掌握。

因此,假设一个放置点的系统按照两个维度从0(通过虚线连接的两个大的点表示)开始排列,把a_1、a_1'和b_1'或a_2、a_2'和b_2'作为联系它们的关系(例如,那些虚线)。这些关系也许是对称的,也许是非对称的,这取决于它们是表示序列关系还是距离关系。随后我们有:



我们可以看到表示序列关系和距离关系的两个系列:$a_1+a_1'=b_1$;$b_1+b_1'=c_1$等,并且$a_2+a_2'=b_2$,$b_2+b_2'=c_2$仍然是精细的,因为在连续的元素a,a',b'之间没有共同的单元或者特定的关系。然而,a_1,a_1'和b_1'或a_2,a_2'和b_2'的这些间隔通过一一对应(依次在两个维度上)来保证都是相同的,这种"精细的"相等由分布着点的直线的平行性来保证。

这幅通过平行关系的一一对应的乘法关系图准确地表达了处于第三阶段第二亚阶段(第八章和第九章)的儿童建构参考系的方式。就距离而言,儿童可以不通过测量而从以下断言:$a_1<b_1$或者$a_1'<b_1$(如果$a_1+a_1'=b_1$)中以及平行线[①]之间的间隔互相相等来获得距离概念。从一个群集到一个数学的坐标系的转变明显地引入了测量(例如a'或b与a有度量关系的)的概念。

Ⅶ.元素的一对多乘法

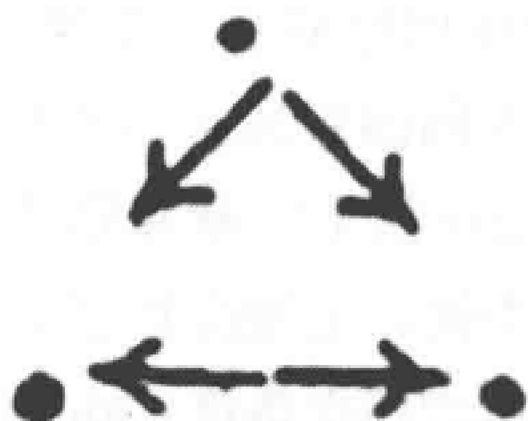
与以上系统中的一一对应的关系不同,一对多的关系产生了三角形的概念(二维)以及四面体的概念(三维)。

---

① 至于垂直关系,它对于系统来说不是必要的,但是仍然可以通过朝向最大反向的两个维度来给出。

Ⅷ.关系的一对多乘法

最后的这个群集的格式是由两个非对称的长度关系产生的渐增的对称间隔，即就像第七章中看到的那样，这个运算系统在适用于测量之前适用于对角度的定性估计。



这就是在欧式空间的亚逻辑建构中起作用的八种运算群集。它们很明显地再现了在第三节和第四节中描述的适用于拓扑和投射概念的八种群集的轮廓。然而，在整体组织的每一个连续的阶段中，它们获得了新的意义，通过给拓扑关系明确的界定而将它们进行了整合。

也许有人会问，第八种群集与什么对应，为什么恰好与它对应。首先，它与亚逻辑运算和逻辑运算间的相似性有关。从运算群集的角度来看，增加、联系、相乘，无论是以空间的邻近性和差异性，还是以整体的定性的相似性和差异性的形式，都是同样的事情，即使这些整体结构的具体意义都不同。

我们再次发现：已经在运算层面上描述过的八种类型的群集解决了逻辑类别和关系[①]问题，考虑到思维运算的功能统一性，这种对应就会变得非常有趣。例如，对群集的数量来说并不武断，因为它简单地代表了以下组合的结果——似乎只适用于“精细的”定性运算。元素或分类(Ⅰ)以及不对称关系(Ⅱ)可以被加入简单的序列中。它们也可以被加入到不同的方向中，因此有类别或元素的相互作用的系统(Ⅲ)和对称关系(Ⅳ)。最后，两个或者多个附加的序列也许会组合在一起，形成两维或三维的交叉参照表。换句话说，它们也许会相乘，不论是类别和元素的一对一乘法(Ⅴ)，还是关系的一对一乘法(Ⅵ)，又或是类别和元素的一对多乘法(Ⅶ)，还是关系的一对多乘法(Ⅷ)。一一对应和一对多的最终区别是自身的对称性和非对称性的逻辑相反的结果，因此，我们可以得到下面的组合方式：2(元素或关系)×2(对称或非对称)×2(加法或者乘法)=8。

第六节　“广泛的”运算、度量运算、发展的顺序问题

前面的运算(第三—五节)总体上为空间的亚逻辑概念提供了“精细的”或是定性的框架，是数学形式的准备框架，虽然还不是数学的形式。

---

① *Classes, Relations et Nombres.* Étude sur les ‘groupements’ de la logistique et la réversibilité de la pensée, 1942.

至少在两个例子中，我们可以看到儿童从"精细的"关系转向系统的"广泛的"定量关系。首先，在物体的尺寸随着距离越来越远而有规律地缩小的例子中（第六章，第二部分）；其次，在比例的例子中（第十二章）。第一个例子，也是这些过渡的最简单的形式，当儿童能够理解外观尺寸的减少时就发生了。他从简单的定性序列开始，铁轨之间的枕木或者是栅栏的立柱的长度随着突然的不规则的跳跃在不断减小。例如（按递增的方向布置序列），$A<B<C\cdots$，但是没有对差异 A'（A 和 B 之间），B'（B 和 C 之间）等进行量化。结果是 $A'<B'$ 或是 $A'>B'$ 或是 $A'=B'$，与简单的精细结构相对应（这些不规则的差异在序列 $A<B<C$ 中是可以比较的）。随后，儿童可以考虑到它们之间的差异，让它们的差异是常数，使 $A'=B'=C'$ 等（例如，A=2mm，B=3mm，C=4mm，每次的差异都是1mm），或者是让它们有规律地增长：$A'<B'<C'$（使它们按照一定的规律来增长）。

这个简单的例子已经清楚地展现了广泛的量化的本质。基本上是差异关系（使用关系语言）或者是单一整体 B 中的部分 A 和 A' 的关系（使用元素语言）。自然地，术语"差异""部分""整体"本身没有意义，除了与前面讨论的群集联系起来。如果没有群集，任何形式的比较或是关系都可能被认为与差异或者是单一整体内的部分有关。

在比例的例子中，过程更加复杂，但是由于与前面的例子比较相似，因此更具有教育意义。从三角形的两条腰 A_1 和 A_2 的一对多开始（群集Ⅶ和Ⅷ），角 A 的宽度被认为是角的两条腰 A_1 和 A_2 之间的距离。儿童发现通过延长两条腰的长度，增加了 A' 和 A_2'（因此，$A_1+A_1'=B_1$ 和 $A_2+A_2'=B_2$，B_1 和 B_2 是新的两条腰的长度），他发现角 B 和角 A 是平行的。迟早儿童会掌握这样一个事实，如果 A 和 B 是平行的，例如，根据某种相似关系，那么在 A_1' 和 A_2'，A_1 和 A_2 之间肯定存在定比。因此同样地也存在差异的量化以及部分之间的对比（A_1' 和 A_2' 或者是 A_1 和 A_2）以及整体之间的对比（B_1 和 B_2）。

因此，广泛的量化出现在整体中的部分之间的对比中。在某种意义上，这是前面精细的运算的连续；但是，在另一方面，预示着测量，因为差异可能由于某种特定的关系。例如，在渐进的客体的例子中，外观尺寸的增长给出了一个简单的精细的序列 $A>B>C\cdots$ 但是，差异可能通过等值来定量地表达出来 $A'=B'=C'$，那么我们就接近度量系统，而不是单纯地扩展 $A'<B'<C'\cdots$

度量量化或是测量出现了，事实上，一旦选择了一个尺寸作为一个整体，整体的不同部分就会和整体联系起来。例如，如果 $A=A'=B$，等，那么我们有 $A+A'=2A$，因此，$B=2A$，$C=3A$，等。但是，因为这个整体的重复假定部分 A 也适用于部分 A'，B' 等，通过全等使它们相等，很明显，测量是集合加法（$A+A'=B$）和位移加法（$A\rightarrow B\rightarrow C$）的综合，就像数组成类别的加法（$A+A'=B$）以及非对称关系的加法的综合（$A\rightarrow B\rightarrow C$）[①]。这些物理测量组成了亚逻辑运算的综合的方式与数组成逻辑-数学运算的综合的方式相同。自然的，这个粗略的框架很难被当成回答这个问题的满意答案。为了表现出在儿童的心理发展中真

① Op. cit., *The Child's Conception of Number. Also op. cot.*, *Classes*, *Relations et Nombres*, 1942.

正发生了什么,必须要有详细的研究,这也是我们在下一本书[1]中尽力去揭示的。

然而,广泛的度量关系的构建立即产生了一个与心理发展的时间顺序表有关的问题,事实上在摘要里概述的所有的运算都会产生这个问题,因此我们必须通过讨论这个问题来做总结。广泛的度量量化假定出现在整个的“广泛的”亚逻辑(或者至少,组成欧氏空间的类型Ⅰ和类型Ⅱ)之前。但是,我们经常也可以看到一旦儿童掌握了这些运算,测量就出现了。然而,儿童需要好几年来建构早期的“精细的”运算。第二,广泛的运算和度量运算是同时发生的,不是一个领先于另一个。第三,也是这些悖论中最重要的一个,射影运算和欧氏运算(也包括中间的仿射运算)几乎在同一水平即第三阶段都出现了,主要在3A亚阶段出现。它们甚至都假定基础拓扑运算的早期构建。这个过程直到第三阶段开始才逐渐完整(无可否认的是,顺序的运算在时间表上稍微领先),随后只针对有限的量化,因为儿童直到第四阶段才能理解无穷大的概念。

有可能完全颠倒我们试图证明的发展的顺序,或者是所有的事件,或者是我们采用的描述的顺序吗?

让我们想象一下,有一个对几何主题毫无所知的研究者,要去调查7岁左右的儿童的空间概念。也就是说,儿童的空间概念大约在第三阶段的开端,也是心理发展的一个关键的转折点。这个研究者没有调查欧氏运算,甚至是度量运算,而只研究了射影和仿射概念,最后考虑了些许拓扑关系,这样可能吗?最后,顺便说,如果他没有读过庞加莱、库拉托斯基(Kuratowski)、葛多(Godeaux)、贡塞斯等作者的书,他很难辨别出来。此外,他可能会把拓扑关系视作儿童对日常生活的想法的暂时的抽象。

这种争论可以通过三种方式来回答,每一种都证明了心理发展的顺序,从拓扑概念开始,接下来是射影概念、欧氏概念和过渡概念。

需要指出的第一点是儿童的前运算概念出现的顺序。一个运算系统,尤其是一个纯粹“精细的”群集(第一节),只是一系列动作最终的平衡条件。它们一开始就是物理的、不可逆的,接下来通过直观表象来内化(仍然是不完整的、不可逆的),最终以术语是“群集”(或群)的可逆的组合而告终。因此,追踪心理的发展过程和追踪空间的发展过程一样复杂,不能满足于只描述已完成的运算系统的特征。要追踪它们的发展,就有必要回归到最初的直觉,从这一点上,拓扑关系的基础性是很明显的。2—3岁的儿童把正方形、三角形和圆形简化地与“约当曲线”无差别,在他开始注意它们是否包含直线和角度之前,他更关心它们是不是封闭的。位于一个表面或者一个盒子的里面或外面的大小的概念在欧氏表面或体积被抽象化之前很早就出现了(例如,在第十三章中,第一阶段的儿童画水平面的例子中)。简言之,拓扑运算在儿童达到彻底的运算阶段之前长期扮演着形成性角色,介于象征思维或是生理动作的形式之间。

---

① *La Geometrie Spontanée de l' Enfant.*

第二点是虽然运算系统的形成阶段可能被拉长了——由于以上我们讨论的原因——一旦这个系统达到了平衡,也就是说,一个可逆的组合或"群组",它很快带来了一系列新的由自身含义所引起的重组。

这就是为何不要为发展中的两种看起来好像是矛盾情况的共存现象感到惊讶,它们通过基础的拓扑运算来完成重组。一方面,一旦运算系统达到完整,之前不完整的射影和欧氏概念也开始明确化。这给总体的组织给予了动力,它会在3B亚阶段达到顶点。在另一方面,拓扑基础的完成使得射影和欧氏系统成为可能(尤其是,通过顺序的群集),从"精细的"向"广泛的"度量的转换以很快的速度发展。这是因为后面的这些概念是一个简单的综合,它代表了与之前存在的"精细的"概念将要进行的综合。

如果在第一阶段和第二阶段的五年的准备阶段(平均从2岁到7岁)和介于3A亚阶段和3B亚阶段之间的两年组织阶段(平均从7岁到9岁)之间有一个对比,它就会更加明确,不只是针对空间概念,在适用于数字、物理数量和速度的研究。这就是说,没有任何成熟的现象可以加强智慧的功能方面,加速前者只能部分地覆盖结构的发展。

最后,第三点也是最重要的一点是运算的实质。一个运算系统的内容源自一系列主体动作的抽象,而非来自客体特殊的特征或属性。但是,抽象的过程会遇到很多客体,可能会被客观条件所促进或阻碍。因此,我们发现数的理解发生在空间测量之前,因为分离总体的不连续性预示着单位的重复,这比在一个或两个维度上的线性连续更容易。另一方面,一个正方形的模型比许多不能用数字估计,只能用"差不多"来描述的珠子更能促进幼儿对空间测量的理解。因此,这里采用的测试和实验结果总是部分地依赖于实验条件,而这使得分析它们的任务更加复杂。

但是,它依然遵循着这句话,一种运算在它彻底形式化和明确化之前可以含蓄地发挥作用。例如,让我们设想,运算*B*(例如,一个度量的或广泛的比例)意味着一个优先的运算*A*(通过一一对应的关系乘法),但是*B*的研究条件比*A*更好(例如,由方形纸代表的简单的数值关系,与*A*相关的问题的形式太抽象)。结果,可能会给人留下*B*发生在*A*之前的印象,一个更仔细的调查才能揭示出发展的真正顺序,使主体在理解运算*B*之前必须要理解运算*A*。

而且,以上的三种考虑的关联远远超越了对儿童的心理发展的研究。它们依据在最初的发展过程中的精确的相互关系,以及事件发生后的反思——后者的活动经常会颠倒前者的顺序。拓扑学或位置分析在最近一段时间仅仅是以一个独特的或者是单独的学科出现,这种现象绝不是一个历史偶然,集合论也是同样的情况,即便康托尔声明它也可以用于教小学生。解释是这样的,虽然儿童可以在日常生活中发现一一对应关系,在幼儿园就开始绘制约当曲线,但是在这些儿童活动中发现算术和几何的基本原理需要高度抽象的思维活动。

因此,不要惊讶于发现在个体真实的发展中,运算机制出现的真正的顺序有时候是混淆的、重叠的。在这些领域中,分歧也会产生运算,分歧会困扰不断增长的意识和抽

象思维,在某些方面促进它,在某些方面阻碍它;生理动作也是这样,通过连续的抽象,便产生了运算。这就是非常值得把实验方法和逻辑框架结合起来进行尝试的原因。除了这些方法产生的困难之外,在这项研究中,实验方法是为了服务于心理进化的目的。

原版索引

Abstraction 抽象,34
　　of shape 形状的抽象,25,27,68,269-270
Accommodation 顺化,455
Action 动作,279,283,291-294,449
co-ordination of 动作的协调,404
internalized 内化的动作,284-285
Adaption 适应,41
Addition of element 元素的增加,469,477
Abeli,H. 埃贝利,425-426
Affine transformations 仿射变换,305,318
Affinities 仿射,301,304
Analysis 分析,24
Analysis Situs 位置分析,45,485
Angles 角度,70
Anticipation 预期,291
　　schema of 预期格式,133-134
Apparent Shape 外观形状,171-172
Articulated Ideas 清晰的想法,82,120,123,185
Assimilation 同化,455
Axiomatic Geometry 几何公理,450

Bergson 柏格森,133
Binet and Simon 比奈和西蒙,68
Brouwer 布劳威尔,488
Brunschvicg 布伦茨威格,46,77,448
Brunswik 布伦斯维克,5,10

Cantor 康尔托,125,461,485
Centration 中心化,16,364

Closed Shapes 闭合的形状,67
Composition 组合,73
Concept 概念,226
    geometrical 几何概念,378
Configuration 图形构造,321,372
Conic sections 圆锥曲线,259
Constancy 恒常性:
    of Shape 形状恒常性,11,218,245–246,476
    of Size 大小恒常性,11,476
    perceptual 知觉恒常性,5
Constant errors 常见错误,326,330,332
Continuity 连续性,8,125,144,149,459,462
Convergent lines 收敛线,172
Co–ordinates 坐标,metric 矩阵,444
    system of 坐标系,386–387,390,442
Co–ordination 坐标,of perspectives 透视,241–242
Correspondence 对应,123–124
    bi–continuous 双连续的对应,124
    intuitive 直觉的对应,92–93
    one–many (co–univocal)一对多对应,352,372
    one–one (bi–univocal) 一一对应,9,372
    point–point 点–点对应,241

Decentration 去中心化,16,24,217–218,230
Decroly 德克雷利,46,87
Dedekind 戴德金,125
Delayed imitation 延迟模仿,12
Desargues 笛莎格,45
Descoeudres 德斯可伊瑞斯,87
Development of solids 立体的发展,258
    of surfaces 平面的发展,276
Direction 方向,sense of 方向感,91
Discrimination 区别,256
Displacement 位移,377
    concept of 位移的概念,375

of objects 物体的位移,477-478
Distance 距离,442-443
conservation of 距离守恒,476
logical inclusion of 逻辑距离,478
Domain (topological) 领域(拓扑的),467
Dominant feature 显著特征,228

Egocentric illusion 自我中心错觉,218
Egocentrism 自我中心主义,193-194,209,217,20,225
v. Ehrenfels 艾伦菲尔斯,321
Enclosure 封闭性,8,80,208
Enriques 恩里克斯,193
Equidistance 等距,concept of 概念的等距,338
Euclid 欧几里得,44
Euclidean space 欧氏空间(欧几里得空间),375,476
co-ordinates of 欧氏坐标,375ff

False-absolutes 虚假-绝对,194,213,223,242,389
Figure-Ground 图形-背景,164,400

Gassmann 加斯曼,320
Geometrical concepts 几何概念,440
Geometrical space 几何空间,77
Geometry 几何学,descriptive 描述性的几何学,248
euclidean 欧氏几何,247
projective 投射几何,247-248
solid 立体几何,258-259
Gestalt Theory 格式塔理论,8,10,38,43,68,245,321
Global 球形的,40
Grouping 群集,59,226,244,351,465,479,480
Godeaux 葛多,105,319,465
Gonseth 贡塞斯,448
Guillaume 纪尧姆,14

Haptic perception 触觉感知,16-18

Hetzer 赫泽尔,62
Hilbert 希尔伯特,301
Homeomorphism 同胚,9,105,124,153,466
Homology 共同点,301
Horizontal 水平,concept of 水平的概念,389-390,404-405

Illusions 错觉,215
Image 表象,17ff,40,217,294,455
intuitive 直观表象,295
ludic 滑稽表象,40
mental 心理表象,12,103,123,286,294
operational 操作图形,296
symbolic 象征图形,285,292
visual 视觉图形,41
Imitation 模仿,20,25,33,40
Inclinations (Angles) 倾斜(角度),74ff
Infinity 无穷大,141
Intellectual construction 知识结构,354ff,365
Intellectual realism 智慧现实,46,49ff,51,209,220
Intelligence 智慧,245,418
Intuition 直觉,geometrical 几何直觉,447,448ff,452-453
Intuitive correspondence 直觉对应,82
Irrationals 无理数,148
Isomorphism 同质,129,136

Jordan Curves 约当曲线,67,483,485

Kant 康德,3,192,456
Kerschensteiner 凯欣斯泰纳,392
Klein 克莱因,448
Knots 节点,theory of 纽结理论,105
Kohler 苛勒,144
Krotzsch 克罗斯,59
Kuratowski 库拉托斯基,462

Lambercier 朗佰西尔,5
Lazy tongs 懒人钳,伸缩钳,304
Leibnitz 莱布尼兹,168
Length 长度,conservation of 长度守恒,475
Lewinnek 卢因内克,400
Line 线,155
Logical addition 逻辑加法,126
classes 逻辑分类,80,126
multiplication 逻辑乘法,126,240–241
types 逻辑类型,371
Luquet 吕屈埃,46,49,50,61,209,223,249,273,392

Mathematics 运算,nature of 运算的本质,380–381
Maturation 成熟,484
Meili 梅里,7
Meyerson 梅耶森,97
Mirror writing 镜像书写,97,420
Monge 蒙赫,45
Motor activity 运动活动,13,42
adaptation 活动适应,134
Movement 运动,43,301
concept of 运动概念,320
Multiple perspectives 多维视角,210
Multiplication 乘法:
of elements 元素的乘法,465
of relations 关系的乘法,465
Multi-sensory 多维感知,30,42

Niculescu 尼古勒斯库,464
Number 数,concept of 数的概念,460

Object 物体,213
Oblique parallels 斜轴投影线,305
One-Many Multiplication 一对多乘法:
of elements 元素的一对多乘法,473–474,480

of relations 关系的一对多乘法,473–474,480
One–One Multiplication 一对一乘法:
of elements 元素的一对一乘法,471–472,478
of relations 关系的一对一乘法,471–472,478–479
Open Shapes 开放图形,67
Operation 运算,14,36,37,123,284,292,296
concrete 具体运算,129,313
Operational Correspondence 运算对应性,82
Operations 运算,Euclidean 欧氏运算,249,267,297
extensive 广泛的运算,461
intensive 精细的运算,461,480–481
intuitive 直觉运算,165
logico–mathematical 逻辑–数学运算,457ff
mental 心理运算,193
nature of 运算的本质,484–485
projective 射影变换,249,267,297
second–order 二阶运算,145
sectioning 分解运算,247
sub–logical 亚逻辑运算,450,457ff
topological 拓扑运算,484
Order (Sequence) 顺序(序列),7,80,103,462
circular 圆形顺序,91
of development 发展的顺序,483
direct 正向顺序,96
rectilinear 直线顺序,470
reverse 逆向顺序,96
Ordered correspondence 顺序对应,85–86
Orientation 方向,spatial 空间定位,387
Osterrieth 奥斯特里恩,39

Parallelism 心身平行论,303,316ff,337,371
Perception 知觉,38,45,294,321,365,368
Perceptual activity 认知活动,16,38–40,216
Perceptual estimate 知觉估计,354ff,365
Perspective 透视,视角,155,178,184,187,209

system 透视系统,209
Physical movements 生理运动,475
Piaget 皮亚杰,364,416
and Inhelder 皮亚杰与英海尔德,475
and Lambercier 朗伯西尔,272,344,359
Pictorial space 射影空间,44–45
Picture plane 投影面,178
Placement 布置,376,463
of objects 物体的布置,477–478
Poincare 庞加莱,3,144,447–448
Poncelet 彭色列,45
Pouillard 波尔勒德,46
Pre-concept 前概念,226,232–233
Pre-relation 前关系,230
Prinzhorn 普林兹霍恩,360
Projection 投射,190–191
Projective concepts 射影概念,467ff
plane 射影平面,192
space 射影空间,153,245
system 射影系统,210
Proportions 比例,320
concept of 比例概念,367ff
perception of 对比例的感知,322
Proximity 邻近,68,86,230–231,458
Pseudo-rotations 虚假-旋转,51,273

Quantification 量化,189
Quantity 量,extensive 广泛的,473,481–482
metric 度量,482
Quercy 凯尔西,97

Reciprocity 互反性,464
Reference 参考,frame of 参考框架,379,409,415–417,478,479
systems of 参考系,375,412
Regulatory mechanisms 调节机制,65–66

process 调节过程,59,359
Relations 关系,affinitive 仿射关系,474
asymmetry 不对称关系,126
'between' "之间"关系,192
dimensional 维度关系,358ff
distance 距离关系,73
euclidean 欧氏关系,418
intensive 广泛的关系,188
invariant 不变的关系,191
logical 逻辑关系,80
logico-mathematical 逻辑-数学关系,430-431
perspective 透视关系,225,228,470
projective 射影关系,209,244
spatio-temporal 时空关系,430
symmetry 对称关系,471
topological 拓扑关系,48-49,67-68,375,418,460
Relativity 相对性,232-233
Representation 表征,17,43,47
Representational space 表征空间,110
Reversible combinations 可逆组合,126
Rey 雷伊,127
Reymond 雷蒙,448
Rhythmic movements 有节奏的运动,61,65,66
Rotation (of surfaces) 旋转(平面),273,276,286
Russel 罗素,450

Saleve 萨利夫,216
Schema 格式,34,294,404,419,457
Scribbling 乱涂乱写,58ff
Sections 截面,190-191,247,248,261
Selz 塞尔兹,133
Sense-data 感知-数据,42,44
Sensori-motor 感知运动,38,233
Sensori-motor activity 感知-运动活动,451ff
Separation 分离,7,80,458,462

Sets 集合,theory of 集合论,463,485
Setting (ground) 布置(地面),422
Shadows 阴影,195,206
    projection of 投影,194
Sighting (aiming) 瞄准(设定),165,169
Significants 重要的,17
Significations 含义,17
Similarity 相似性,301,320
    concept of 相似的概念,372
    of rectangles 相似矩形,352
    of triangles 相似三角形,322
Solids 固体,developable 可展固体,297
Space 空间,concept of 空间概念,296,454
    empirical 经验空间,378
    perceptual 知觉空间,451ff
Spatial form 空间形态,77
Speed 速度,concept of 速度的概念,320
Stern 斯特恩,46
Straight line 直线,155,168,319,468-469
Subdivision 细分,126-128
Subtraction 减法,of elements 元素的减法,469,477
Surrounding (cover) 围绕(覆盖面),104-105,110-111
Symbolic functions 符号函数,452
Syncretic 融合,343,355
Synthetic incapacity 综合能力的缺乏,46-48
System 系统,operational 运算系统,483

Tactile exploration 触觉探索,19
Terman 推孟,68
Thales' theorem 泰勒定理,320,351
Time 时间,concept of 时间概念,416,418,467
Topological space 拓扑空间,153,244
Topology 拓扑学,拓扑结构,9,461
Trial and Error 尝试错误,425
Transposition 调换位置,321,344,359,366

Truncation (of solids) 截断(固体),200
Types 类型,logical theory of 类型的逻辑理论,380,405-406

Vertical 垂直,concept of 垂直面,380,405-406
and horizontal 垂直面和水平面,377-378
illusion 横竖错觉,379
Vicariance 物种的地理分离,logical 逻辑分离,464
Viewpoint 观点,interior 本质观点,254
projective 投射观点,165,192,207,213,217,220,243ff
Virtual perceptions 视觉感知,217,278
Visual constancies 视觉恒常性,193
Visual realism 视觉写实,46,52,175,209,220
Volkelt 弗尔凯特,30

Wavre 瓦夫尔,448
Weber's Law 韦伯定律,144,368
Weierstrass 维尔斯特拉斯,125
V. Weiszacker 魏茨泽克,14
Winter 温特,448
Wursten 沃斯滕,47,305,310,317,378

译 后 记

在译后记里，作为翻译工作的第一责任人，要感谢在2015年陪伴我走完这趟皮亚杰经典译著旅程的研究生同学们，没有他们，这个旅程是无法完成的，这一路上的美好风景都是他们带来的。从时间上说，对该部著作的翻译贯穿了2015年全年，上半年完成了初稿的翻译，下半年完成了翻译稿的校阅；从空间上说，上半年的工作主要是在西安完成的，下半年的工作则转移到了美国康州；从交流方式上说，上半年的工作主要是面对面沟通、协同完成的，而下半年则以在线的协作、探讨为主。进一步的审阅工作则是在2016年到2017年完成的；最后的审阅是在2017年4月，这时他们所有人都已经毕业了。2019年是个重要的年份，与几位在读研究生完成了最后的清样校对。

这项工作可以算作我担任硕士生导师以来，与诸位弟子通力合作完成的第一项大型工程，通过翻译我们师生加深了沟通、交流，研究生之间也实现了相互学习的效果，现如今我已正式成为一名博士生导师，更加能体会以项目或研究等工作为载体，化育英才的重要性所在。参加最初翻译工作的六位研究生，是我招收的第一和第二届学生，他们每个人都各有特色，在这里我略作介绍，以纪念这段悠悠岁月。

史俊在山西师范大学完成本科阶段心理学专业的学习，考入陕师大之后从事教师专业发展的研究，为人处世稳重、踏实，深具师姐风范。2016年研究生毕业后，她到北京师范大学中国基础教育质量监测协同创新中心工作。赵竹青本科在郑州大学学考古专业，后读硕士来到陕师大，她有比较好的文字底蕴，思维也比较灵活。2016年研究生毕业后，她去哈尔滨工业大学深圳分校工作。她们俩是我招硕士的开门弟子，很高兴地看到她们发展都很优秀！

谌鹏飞是从陕师大心理学院考到现代教学技术教育部重点实验室读研究生的，他是参加翻译工作的研究生里唯一的男生，所以也做了不少组织工作。鹏飞的研究基础较好，做人讲情讲义，在实验室人缘颇好，在读期间曾是研究生会主席，目前他任教于西安欧亚学院。王娟从大连医科大学心理学专业本科毕业后，以本专业笔试非常高的成绩考入陕师大，终于实现了从事创造力研究的愿望。她喜欢运动，做事充满毅力与韧性，目前她任教于内蒙古自治区鄂尔多斯东胜区第十一小学。蒋莉考研究生的专业跨度较大，来陕师大之前她在哈工大(威海)学习电子信息工程专业，在读期间曾从事幼儿创新素质培养的研究工作。她有比较好的工科基础，动手能力和执行力都很强，目前在上海市嘉定区苏民学校任教。薛荣是由内蒙古师范大学心理学专业经推荐免试到陕师大读研究生的，有较强的进取心，思维缜密，毕业后在内蒙古师范大学附属第二中学担

任教职。在我指导研究生的初期阶段,能够与这样一个本专业与跨专业背景相结合的优秀研究生队伍共同开拓,实在是人生幸事!

后面附上的翻译感言是由各位研究生撰写的,按翻译各章节的先后顺序附在后面,以飨读者。

——赵竹青:

当拿到这位最伟大的心理学家的最伟大的著作,被告知要去翻译它时,我认为这是不可能完成的任务。但是现在,经历了第一轮的初译、第二轮的校对和第三轮的交叉校对以后,我们的初稿已经出来了,不可能的任务已经完成了第一步。

回顾翻译工作,真是有多少艰辛就有多少收获。记得最初翻译的时候,我拿出来翻译一两段,又忍不住丢开;再拿出来翻译一页,又忍不住放弃;到一口气翻译好几页;再到可以保持每天高效地完成任务;到最后翻译第十五章时已经比较得心应手。可以说,翻译过皮亚杰,我已经不再惧怕任何文类的英文了!

我有幸和一群能干且认真的小伙伴们一起翻译。他们的英文水平、专业知识、认真态度、高效组织和积极热情都令我十分敬佩。在一段时间,一群人一起朝向一个目标做一件事情是很幸福的。

每次看译稿都有不满意的地方,今天写摘要仍然看到几处不妥。希望在衣老师定稿、编辑审阅的过程中再进行一些修改,日臻完善。让可爱的她以最美的样子见到最可爱的读者。

——蒋莉:

我们都很熟知皮亚杰的儿童发展阶段理论,可是读皮亚杰的书或者说翻译皮亚杰的书还是头一次。一开始的翻译工作进展很艰难,于是我们研读了很多"拓扑占优"的文献,了解了这些研究的概况。在每周一次的研讨会上,大家一起推敲术语的具体译法,研读长难句,力求翻译得准确、通顺。我们的翻译工作进展得越来越顺利,从这些研究"是什么",深入了解到"为什么"以及发展的过程。历时半年,翻译工作最终告一段落。这半年的时间里,我真正领略到了"钢铁是如何炼成的"。皮亚杰所选的研究工具很简单,儿童被试数量也不太多,但是却能从儿童的反应中,整理出儿童空间概念的发展脉络,而且他的观察很细致、系统,理论也很具有说服力,这着实让我们钦佩。对比当下火热的大数据、大样本的研究,这种精细的研究仍然闪烁着耀眼的光芒。

——史俊:

从2015年初翻译工作的着手准备到年中译稿的基本完成,在这将近半年的时间里,我们小组的每位成员都积极投入到翻译工作当中,通过查阅相关资料和文献,相互交流

和讨论,大家力求更准确地把握并尽可能忠实地呈现原著的思想观点。在自我翻译、彼此校对、小组讨论以及衣老师的指导下,译稿几经修改,最终基本达到了初稿的完成标准。

回顾这段时间的翻译工作,我有很多感触。能够有机会接触心理学大师皮亚杰的著作,近距离感受其充满智慧的思想,是一件非常荣幸的事情,但如何准确理解并反映其观点对我们来说也是一个不小的挑战。

在自我翻译阶段,每个人都积极通过各种途径来理解自己所负责的章节内容。我所承担的是第四章、第五章和第十章的翻译工作。在拿到纸质版的翻译材料后,我便马上投入到了"与大师的对话"当中。其中遇到的第一个难题便是对专业术语的翻译。由于之前对皮亚杰理论的了解主要来自心理学专业课本里概括性的阐述,缺乏对具体研究过程和专业术语的深入了解,而通过查阅词典所获得的解释也大都在适用领域上比较宽泛,并不一定能直接拿来注释章节中的专业术语。于是,在翻译时,我通常先将某个词汇的多种解释都浏览一遍,并依据上下文选取出较为拟合的词义,之后再将该词义在百度中进行搜索,查看是否有和皮亚杰理论相联系的条目,如果有,便进一步规范对该术语的表述。虽然这一过程有时候会比较烦琐、工作量也相对较大,但它在帮助我把握原文思想方面确实起到了非常有效的作用。

在基本"攻克"了大量的专业术语之后,摆在我面前的另一项艰巨任务便是句子的理解和连贯。众所周知,句子的翻译并不只是一味地词汇堆叠,很多时候我们需要根据语境和前后篇章的语义来对句子作出相应的解释。这一问题在翻译各个章节的研究方法部分体现得十分明显。由于皮亚杰对儿童心理发展过程的研究主要使用了谈话法,因此在方法介绍部分会出现大量研究者与儿童的对话,而对话的一个显著特点便是具有依赖于情境的简洁性,所以在原著中经常会出现一些表述方面具有省略性的句子,比如对代词的多次使用。如果简单将这些代词译为"他/她/它",就会容易使部分读者产生困惑甚至对内容产生误解。因此,在这种情况下,结合上下文对句子进行一定的补充就显得很有必要,这也是我在翻译句子过程中的一点重要体会。

此外,由于我们组所承担的翻译工作主要集中于儿童空间概念的发展,因而所提到的研究会涉及很多的空间结构和图形。很多时候,单凭文字性的表述我们可能并不能准确地在头脑中表征相应问题,但如果我们把文字转化成图形画在纸上,往往会对原先不理解的表述豁然开朗。比如第十章会涉及对很多立体图形的展开,单纯依靠文字可能并不能很好地理解作者所表达的思想,而如果配合相应的图形则会使问题变得非常直观,便于我们对整个篇章内容的把握。

在完成了第一遍的基本翻译后,我对翻译内容进行了几次自我校对,包括核对错别字、通顺语句、统一全篇用语、检查文稿逻辑等,在保证"信"和"达"的前提下,尽量使自己的翻译朝着"雅"的目标完善。

由于整本书各个部分的翻译工作由不同的小组成员承担,因而在保证自我翻译部分尽量完善的前提下,还需要进行小组内容的整合和连贯。于是,在衣老师的组织和指

导下，我们进行了多次以翻译工作交流为主题的组会和互相校稿工作，大家就自己在翻译中遇到的困难和问题交换意见，力求消灭自己的翻译难题，并就共同涉及的翻译内容达成一致。在这一过程中，我们分享资料和观点、互相鼓励和帮助，学习共同体的促进作用得到了充分的体现。

对我来说，能够参与并完成对皮亚杰著作的翻译工作是自己研究生学习生涯中的一次非常宝贵和难忘的经历。无论是自我翻译过程中的潜心思考，还是小组讨论中的观点交流，点点滴滴，受益匪浅。如今，初稿的翻译工作已经顺利完成，看着一行行的文字，满满的自我效能感。与此同时，我也深知成熟的翻译工作并非易事，我们的译稿中还有很多不足之处需要不断改进和完善，唯愿不负原著，不负读者。

——谌鹏飞：

历时半年，我们团队完成了对皮亚杰著作《儿童的空间概念》初稿的翻译工作，我完成了其中第六章、第七章、第十三章以及第十五章部分内容的翻译。在这一相对漫长的翻译过程中，我收获了精髓的知识，收获了坚持的毅力，收获了成长的快乐。

半年的翻译历程如同一场艰苦而难忘的长征。在衣老师的指导和监督下，我们确定了翻译期限和分工，进行了第一遍翻译，第一遍自我校对，第一遍相互校对和第二遍自我校对，最终定稿，并对其中的格式进行了调整和初步的排版。从一开始我便意识到这是一项浩繁而细致的工作，不但要从宏观上进行合理的考量和统筹，而且要在微观上进行认真的推敲和思考。从结果来看，我们基本达到了这两个方面的标准和要求。现在，我仍忘不了起初拿到英文原版书稿时的好奇和踌躇满志，仍忘不了对书稿中专业术语和难词难句进行反复推敲时的绞尽脑汁，仍忘不了对译稿进行一遍遍校对时的投入和坚持，仍忘不了翻译团队成员之间的互相帮助与精诚合作。

半年的翻译历程就像一场愉快而充实的旅行。它让我第一次这么近距离地了解了皮亚杰的思想，第一次深入地学习了临床法在实践情境中的运用。皮亚杰那份对科学研究的好奇和热忱以及对儿童心理发展的深入思考和独到见解，是他留给科研后辈的灿烂遗产，应该被更多的人学习、继承并传扬下去。皮亚杰把弗洛伊德的那种随意、缺乏系统性的临床观察，变为了更为科学和系统的临床研究，他所提出的临床法在儿童心理发展领域彰显出了特色和优势。回想这段旅行，眼前再次闪现出一幕幕生动的场景，处于较低发展阶段的儿童在实验者的引导下，总会把倾斜瓶子中的水面画成倾斜的，小山上房屋烟囱冒出的烟是向下的，而处于较高发展阶段的儿童总会从备选图画中选出正确的那一幅。皮亚杰运用这样一种亲切的研究方法，刻画出了儿童心理发展中美丽而迷人的图景，令人印象深刻。

翻译的工作结束了，但科研的这场长征和旅行还远未结束。

“生命的全部意义在于无穷地探索尚未知道的东西”，心理学领域有太多的内容有待开拓，有太多的规律和原理有待发掘。心理学恰恰给予了我们很多未知的知识和领

域。而这就是我生活的舞台和科研的意义。与君共勉！

——王娟：

依稀记得开始翻译第一页的时候自己的心情：把第一页的生词解决了之后，读了大概一个小时，然而也并没有理出什么头绪。自己负责的部分一共有八十多页，然而第一页就这么不易，让我瞬间觉得这项任务“无比艰巨”，所以在接下来的一个月我再也没有拿起来过。就这样研一的第一学期已经接近尾声，几乎再没有想起过翻译。

寒假的一天接到了老师在群里的通知：希望大家利用寒假抓紧时间翻译。心里有了紧迫感，于是决定每天翻译2页。开始的时候还一直在坚持，每天完成2页翻译之后，感觉特别好。但是“好景不长”，在家生活得很“颓废”，吃饭，睡觉，看电视，上网刷微博，没有运动，没有出去和朋友走走，每天做的唯一“正经”的事情就是逼自己看会儿书。这样的生活方式很快让我情绪低落、想法消极，每天的任务也不能按时完成（坚持了一个星期之后，这项工作又停止了），“专职”和男朋友找茬（抓住他的每一个小错误放大“百倍”），和家人几乎没有沟通，每天沉浸在自己消极的世界里。就这样寒假结束了，翻译了一共不到20页，期末作业也没有完成，我的“焦躁”状态也达到了巅峰。

研一下学期就这样开始了，开学的第一个星期各种任务没有完成，也不能再像假期那样安逸地生活了，和男朋友的矛盾也累积到了“临界点”。那是一段“黑暗”的时光：怀疑自己读研究生的意义，不知道自己现在做的这些以后有什么用，不知道即使我把皮亚杰的著作读透，知道儿童的发展过程有什么意义，甚至曾经想到过退学。

然而，庆幸自己当时没有被打倒。“作”够了，也冷静了。开始去练瑜伽，开始坚持每天都翻译2页，开始和同学出去玩儿。慢慢才发现，翻译的每一章开头和结尾部分是最难的，自己刚开始接触的都是比较难的部分，翻译到后来实验的部分终于能读懂了，这也带给了我不小的成就感。随着生活逐渐忙起来，也不再胡思乱想。每天坚持运动，情绪也一天天好起来。一直到5月4日，终于完成了初稿的翻译，万里长征终于成功了一小步。

初稿的翻译完成之后，每周都要开组会，讨论在翻译过程中遇到的问题。在翻译的过程中我也遇到了很多问题，比如每一章的理论部分读不懂，专业词语不知道怎么翻译、有些长难句也不知道该如何下手。每一次遇到不懂的专业词语、不懂的句子，我的第一感觉就是专业词语太多了、长难句太多了，根本无从下手。我已经被眼前所遇到的困难吓倒了，却很少想到要怎么克服。在开会的过程中，有两件事给我印象很深刻。一次组会上，衣老师让大家交流一下翻译过程遇到的问题。蒋莉第一个发言，她把自己在翻译过程中遇到的问题标记得很仔细，也问了很多问题。还有一次是薛荣把自己遇到的长难句写在纸上并且给大家都复印一份，大家一起讨论解决。这两位同学对待难题的态度，给了我很大的启发。开完会我自己试着反思了一下，在前几次开会的过程中，我的发言总是泛泛而谈，内容大概就是自己在翻译过程中觉得一些单词和句子很难，但是从来都没有具体说出是哪个单词、哪个句子。因为在开始的时候，遇到这种难点我的

态度总是很消极，自己琢磨上半天，也不知道对不对就过去了，很少去认真地标记出来然后和大家去讨论，我总是倾向于一个人纠结问题，而很少去努力解决问题。或许这也反映了自己一个很大的弱点，不善于与大家合作交流。受到了大家的启发，在后来的翻译过程中我也把自己不懂的地方详细地标记出来，在组会上和大家谈论。大部分时候，小伙伴们总是能给我很好的建议。所以在这个过程中，深刻地体会到"世上无难事，只怕有心人"。在学习的过程中，我们应该时刻标记出难点，和大家分享交流，问题再多，也要一个个着手去解决。而且我们也要时刻有开放、谦虚的态度，懂得和身边的同学去交流、去合作，可能我们研究的问题不同、翻译的不是同样的内容，但是每个人的思维方式不同，大家互相交流、沟通，经常会碰撞出"思维的火花"，让我们每个人对自己的问题有新的认识。

翻译过程中，遇到的第二件印象深刻的事情：在第二遍校正翻译的时候，我发现自己翻译的第九章存在很大的问题，需要改动很多地方，而这个时候大家基本都要完稿了，这让我感到很焦虑。当时甚至纠结过要不就这样吧，因为重新修改需要很大的工作量。但是每天坐在电脑前，总觉得这种想法是不对的，毕竟进行了一个学期的工作，不能用这样一个不完美的句号结束。那段时间是翻译过程中最辛苦的，每天早早就来实验室，基本不刷网页、不逛淘宝，全身心在翻译。也有想放弃的时候，觉得一句话、一个单词随便翻译一下其实也没什么，但是庆幸自己没有那么做，还是认认真真翻译完。即使翻译得不是很准确、很完美，但也可以说尽力了。

在翻译的过程中，我也领略了这位心理学大师的魅力。虽然到现在，我还不能通透理解其思想的精华部分，但是可以看出对于儿童的空间概念，皮亚杰倾注了大量了心血在研究。我看到了一位学者对待学术研究是怎样地孜孜不倦、怎样地细致入微。这也让我回想起来开学初自己的困惑：现在自己所研究的问题有什么用？即使我明白了儿童的空间概念是如何发展的又有什么用？记得在一次组会上，老师说物质追求固然很重要，但是我们同样应该有精神追求，要去思考一些问题，一些看起来或许"没有什么用"的问题。这个道理听起来好像很熟悉，因为上小学的时候，我们的课本里就不缺少这样的人，他们活着不是为了物质、为了财富，而是有更高的精神追求。然而上了这么多年学，这些道理听得太多反而"听而不闻"。从大学开始，似乎上学就有了很明确的目标，为了一份好的工作。很长的一段时间里，读书似乎早已失去了读书本应有的快乐，而多了更多的目的、更多的功利心。但是我们上学读书仅仅是为了一份工作吗？生存固然重要，但是我们也要沉下心来去领略知识的魅力、思考的魅力、研究的魅力，或许这些在短期内不会带给我们很多物质上的财富，但是会让我们在精神上感到充实。我想皮亚杰能够在一生中，如此有创造力并撰写出这么多的著作，也是凭借着对学术的热爱和像孩子一样的好奇心，也正是因为这样，他的思想才能一直在心理学领域闪烁着耀眼的光辉。

历时一个学期之久的翻译工作终于接近尾声。感觉和曾经登泰山的体验很相近，开始的时候畏惧困难、怀疑自己，然而最终大家互相支持、坚持不懈，终于登上了玉皇

顶。翻译的成果当然还有很大的提升空间,也总结了很多经验。比如再要进行类似的工作一定要在翻译的过程中多了解相关文献,在翻译的过程中最好一直使用牛津词典(因为后来发现有的很多单词释义是不准确的),一定要随时标记重难点和大家讨论交流。在翻译的过程中,自己除了书上的内容,也学到了很多。感谢这项翻译工作!感谢老师同学!感谢自己!

——薛荣:

经过近五个月的努力,终于将心理学家皮亚杰系列丛书的空间认知部分翻译完成了,在完成我负责翻译的第十一章(菱形的仿射变换与平行线的保留),以及第十二章(相似性和比例)的过程中,遇到了许多困难,让我深刻地认识到自己的翻译水平还有限,同时,在一次次小组讨论和解决问题的过程中,又学到了许多。

翻译的重点有两个,一个是准确地理解原文,一个是用恰当的专业的汉语表达原文。首先,对原文进行理解的时候,会碰到一些专业的词语,这些专业词语需要反复地推敲,因为它们往往与皮亚杰学术思想的核心相关联。为此,我们在查阅词典的基础上又搜集和阅读了与空间认知相关的已发表的文章和出版的书籍。在以上工作的基础上,我们才最终确定了某些关键词语的具体译法。皮亚杰著作的英文版翻译有许多的长难句,有的句子就是一整段话。在组会上,我们每个人都找到了一些这样的句子,导师和同学们共同讨论,先是翻译出段落中的核心词语,接着使用核心句分析的翻译方法确定句子的主要结构,最后组织语言,用合适的汉语表达出来。同样,为了保证句子翻译的准确性,我们查找了相关的文献,以确定翻译的句子和段落是准确合理的。此外,我们还将自己翻译的句子拿到英文翻译课向专业的英语老师求教。同样为了保证准确地用汉语表达出原文的意思,我们在自我翻译结束后,还根据翻译章节的相似性进行了两两校对。校对时,再一次找出个人觉得翻译不当的地方进行讨论协商,以确定成稿中的正确表达。

在导师的带领下,我深刻地感受到了皮亚杰所做的研究有多么细致。皮亚杰关于儿童思维发展的大部分资料是通过有简单实验支持的熟练问询方法得来的。他的观点基础是,逻辑与数学观念在儿童身上是首先作为外部活动而显现出来的。只是在较晚的时期,它们才内化了,并具有概念的性质。它们可以用缩微的内在活动来表达,其中事物被符号所替代,活动则被这些符号的运演所替代。当儿童的试误性达到皮亚杰所说的"平衡",即达到一个可以在思维中逆转的一定顺序模式时,理性活动才出现。

翻译并不像想象中的那么高不可攀,但也并不是那么简单。最重要的是保持一颗积极进取的心,无论何时都要保持热情,这样在遇到困难的时候我们才可以战胜它。而翻译是一个需要不断探索、积累、应用的过程。在此次翻译中,我深刻地认识到自身的不足,希望在未来的学习中能够越做越好。最后,衷心地感谢导师的谆谆教导以及同学们的帮助!

儿童的几何学概念

〔瑞士〕让·皮亚杰　〔瑞士〕巴蓓尔·英海尔德
〔波兰〕艾琳娜·斯泽明斯卡　著
朱莉琪等　译

儿童的几何学概念

法文版　*La Conception de la Géométrie par l' Enfant*, Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

作　者　Jean Piaget, Bärbel Inhelder, Alina Szeminska

英文版　*The Child' s Conception of Geometry*, Routledge and Kegan Paul Ltd, 1960.

英译者　E. A. Lunzer

朱莉琪等　译自英文

内容提要

儿童是如何进行测量的？这个问题不仅会引起数学家和哲学家的浓厚兴趣，更是心理学家和儿童教育工作者关心的问题。测量是一个复杂的问题。虽然现代认知发展研究发现幼儿也可以进行简单的测量，比如用步长粗略表征距离，但皮亚杰发现直到8—11岁时儿童才能够完全理解。皮亚杰和他的同事们发现，测量相关的问题也与儿童恒常性的发展紧密相关，是儿童认知发展中的里程碑式发展任务。作者采用了系统化的、细致深入的访谈研究方法，揭示了不同年龄儿童测量的发展水平和阶段。本书第一部分探讨了儿童对测量任务的自发性反应和对位置变化的表征，第二部分探讨了儿童对守恒和长度的测量，第三部分是角度和曲线测量，第四部分主要是讨论面积和体积的相关测量问题，第五部分是对空间测量学概念主要发展水平的回顾。

需要指出的是，皮亚杰和他的同事们考察的是儿童在正式接受数学教育前的自发测量反应。了解儿童的自发概念和认知结构，对于教育工作者有针对性地因材施教具有重要意义。

朱莉琪

目　　录

前言/451
第一篇　引言——位置的变化和自发性的测量/453
第一章　位置改变/455
第一节　方法和结果概要/456
第二节　阶段1和2:不能确定地标坐标,不能描述位置变化/458
第三节　亚阶段3A:通过使用路标能够部分表征位置变化坐标/465
第四节　亚阶段3B:完全知道路标坐标,位置变化表征完整/470
第五节　结论:坐标系和位置变化集合,对空间关系的自我中心态度/472
第二章　自发测量/476
第一节　方法和结果概要/478
第二节　阶段1:直接的视觉比较,迁移是纯粹视觉性的/480
第三节　阶段2:首先出现了位置的迁移,亚阶段2A:手动迁移作为视觉迁移的辅助/486
第四节　阶段2:位置变化基本的使用,亚阶段2B:身体迁移模仿被测量的物体/490
第五节　阶段2B和3A之间的过渡发展:独立中间项的逐渐发现/495
第六节　阶段3:运算性的共同测量,亚阶段3A:无须单位叠加的递推全等/499
第七节　阶段3:运算性的共同测量,亚阶段3B:通过单位叠加的测量系统的进化/504
第八节　总结:位置变化以及测量问题的表征/506
第二篇　守恒和长度测量/509
第三章　重构距离关系/511
第一节　方法和结果概要/512
第二节　阶段1:整体距离的缺失/514
第三节　亚阶段2A:整体距离的非守恒性,距离关系的不对称性/516
第四节　第2B亚阶段类型A:整体距离的非守恒性,距离关系的对称性/521
第五节　第2B亚阶段类型B:整体距离守恒,距离关系的非对称性/523
第六节　阶段3:距离守恒/525
第四章　位置变换以及长度守恒、长度和距离/530

第一节　线的长度及端点的一致性/531
第二节　阶段1和亚阶段2A:长度不守恒/534
第三节　亚阶段2B:过渡回答/537
第四节　阶段3:操作性守恒/539
第五章　长度的守恒与测量/542
第一部分　形状变化下的长度守恒/543
第一节　阶段1和亚阶段2A:不守恒/543
第二节　亚阶段2B:中间的反应/548
第三节　阶段3:运算守恒/551
第二部分　长度的测量/552
第四节　阶段1和亚阶段2A:在传递和测量之前的多种方法的比较/553
第五节　亚阶段2B:中间的反应/558
第六节　阶段3:运算的测量/560
第六章　对线段分段/562
第一节　结果和方法概要/563
第二节　阶段1和亚阶段2A:终点决定了线段的长度/564
第三节　亚阶段2B:中间阶段的反应/569
第四节　阶段3:运算的测量/574
第五节　结论:分段和位置改变的协调与运算合并,协调以及合并通过单位迭代表现/577
第三篇　直角坐标、角度和曲线/581
第七章　在三维空间内定位一个点/583
第一节　方法和结果概要/583
第二节　阶段1和亚阶段2A:视觉定位,不使用工具测量或不正确地使用工具/585
第三节　亚阶段2B:测量的开始,单维度测量/586
第四节　从亚阶段2B到亚阶段3A:二维测量的转换/589
第五节　亚阶段3A:二维测量的实证发现/592
第六节　亚阶段3B:操作地掌握二维测量/594
第七节　总结:三维测量/595
第八章　角度测量/598
第一部分　测量角度/598
第一节　亚阶段2A和2B:不测量角度/599
第二节　亚阶段3A:儿童试图复制坡度,考虑了平行线但不能分开测量角

度/602
第三节　亚阶段3B:分别测量角度/604
第四节　阶段4:使用直角来分别对角度进行测量/606
第二部分　三角形的测量/607
第五节　亚阶段2A和2B:不进行测量或局限于线性测量的三面之间没有协调/608
第六节　亚阶段3A:通过试误测量倾斜和角度/611
第七节　亚阶段3B:对三角形高度的测量结合了它的三边/613
第八节　阶段4:在给出图形外侧画出垂直线条/614
第九节　不规则多边形的测量/615
第三部分　对角度和三角形测量的总结/617
第十节　阶段2:不能理解相关的关系/618
第十一节　亚阶段3A:开始推导关系/620
第十二节　亚阶段3B:规则被概括化/624
第十三节　阶段4:形式必然性/626
第九章　几何轨迹的两个问题:直线和曲线/630
第一节　方法和结果概要/630
第二节　阶段1:等距的概念没有形成/632
第三节　阶段2:理解等距,逐渐发现轨迹/634
第四节　阶段3:对"轨迹"直接的和操作性的建构/641
第十章　圆、机械曲线和复合曲线的表征/644
第一节　方法和结果概要/644
第二节　阶段1:儿童甚至不能重构运动的圆形曲线/646
第三节　亚阶段2A:儿童画出运动的路线,但是不能区分两种曲线/648
第四节　亚阶段2B:区分简单运动和复合运动的首次尝试/654
第五节　亚阶段3A和3B:立即建构简单曲线,根据经验逐渐建构复合运动曲线/662
第六节　阶段4:直接的演绎的解答——结论/668
第四篇　面积和体积/673
第十一章　面积的守恒和测量,以及从较大的一致面积中拆分较小的全等面积/675
第一部分　从较大的全等面积中提取较小的全等面积/675
第一节　方法和结果概要/676
第二节　亚阶段2A:基于感觉的判断,无加减运算/677

第三节　亚阶段 2B：中介反应，阶段 3：运算成分/681
第二部分　守恒及对面积的测量/685
第四节　方法和结果概要/685
第五节　亚阶段 2A：无守恒/687
第六节　亚阶段 2B：中介反应/692
第七节　亚阶段 3A：运算守恒/696
第八节　在闭合边缘之外的面积守恒/697
第九节　叠加测量/703
第十节　单位叠加/707
第十二章　面积的减法和分数概念/712
第一节　方法和结果概要/712
第二节　阶段 1：二分问题/713
第三节　亚阶段 2A：三分问题/721
第四节　亚阶段 2B 和阶段 3：成功三分，渐进于亚阶段 2B，成功于阶段 3/728
第五节　亚阶段 3B：五等分和六等分/731
第六节　部分–整体关系和总体守恒/735
第七节　总结：分割面积和对分割部分的理解/740
第十三章　面积或体积的翻倍/743
第一节　方法和结果概要/744
第二节　阶段 2：甚至没有长度的翻倍/746
第三节　亚阶段 3A：正确地解决长度翻倍问题，通过简单地翻倍边长解决面积翻倍/748
第四节　亚阶段 3B：边界线长度和它们所包围的面积和体积之间关系的建立的实验/751
第五节　阶段 4：理解了面积或体积和边长的乘法关系/755
补充：线性测量与面积单位所组成的面积测量之间的关系/758
第十四章　体积的守恒和测量/759
第一节　方法和结果概要/760
第二节　亚阶段 2A：体积不守恒以及单维比较/763
第三节　亚阶段 2B：过渡性反应/769
第四节　亚阶段 3A：关系的逻辑乘法以及局限于内在体积的守恒/772
第五节　亚阶段 3B：首次开始考虑测量关系/777
第六节　阶段 4：三维度量的数学计算以及真正意义上的体积守恒/781

第十五章　欧几里得空间的建构:三个亚阶段/785

第一节　亚阶段3A:从守恒的拓扑关系到初级欧几里得概念的过渡/785

第二节　亚阶段3B:测量方法的成长/790

第三节　阶段4:面积和体积的计算/796

原版索引/799

前　言

在我们早期的工作——《儿童的空间概念》一书中,研究了有关儿童空间概念发展的某些问题,尤其是阐述了更基本的拓扑学概念中的映射和欧几里得概念。然而,空间直觉这一问题非常复杂,因此我们不得不推后对测量和测量几何学(metrical geometrics)的讨论。在本卷中我们将着重讨论这两部分。

几何测量是小学课程的一部分。因此,我们可以有把握地说,关于测量初始阶段的分析性研究,不仅会引起数学家和哲学家的浓厚兴趣,也会让那些依赖于心理发展规律而寻求教育方法的人产生兴趣。这些研究中所涉及的一些几何计量学概念的心理产生过程,不久之后也会在教育领域中得以应用。

由于当前使用的研究方法是心理学的而非教育学的,我们会尽力避免使用通过正式的学校教育才能获得的一些概念,否则就有可能掩盖一些重要的心理学发现。然而,儿童对于我们提出问题的一些自发性反应,能够激发我们从中寻找对于教育的启示意义。

作为心理学家,我们对儿童是如何进行测量的非常感兴趣。因为测量中包含的运算,一方面非常具体,根植于知觉活动中(对大小的视觉估计);但是另一方面又非常复杂,直到8—11岁时儿童才能够完全理解(依赖于运算过程中包含不同成分的数量多少而定)。更深层的有意思的问题是,与测量相关的问题与儿童恒常性的发展紧密相关,因此,儿童在测量上的进化可能代表着一种与数字发展并存的平行式进步。

由于这些问题非常重要,我们采用了比以往更加系统化的研究方法。本章的第一部分探讨的问题是儿童对测量任务的自发性反应和位置变化的表征,第二部分探讨守恒和长度的测量,第三部分解决的问题是角度和曲线测量的建构,第四部分主要是讨论面积和体积的相关问题,而第五部分是对空间测量学概念主要发展水平的一个回顾。

第一篇
引言——位置的变化和自发性的测量

复杂的运算过程往往要依赖于其他一些基础概念的支撑。这一点对于测量同样适用,因为测量是由两种不同的成分合并构成的,其中之一就是个体对位置变化的协调。由于第一部分的主要目的是对我们的研究做一个介绍,因此,我们会着重探讨能够激发儿童产生自发性反应的情境。这样的探讨使得我们能够观察测量行为作为一个整体如何反映在儿童的活动过程中。而且,我们应该清楚地认识到,测量是如何将一些特定的心理运算过程包含进来;这不仅发生在我们的实验情境中,也发生在儿童真实的生活中。因此,接下来的两章主要采取的是归纳而非演绎的研究方法。第一章要探讨的问题是儿童如何通过自身对空间领域的概念来重构自身的运动和位置的变化,同时,随着年龄发展,根据位置变化而进行的重构是否会越来越协调。第二章探讨的问题是儿童的测量方式,有一些儿童最初展示出来的行为最终成为他们的测量方式;真实的情境是一种游戏,在这个游戏中,儿童会被要求进行某种建构,他们迟早会明白这种建构需要一定程度的准确性,而这种准确性只有测量才能够保证。

第一章　位置改变①

位置改变这个概念是欧几里得测量学的基础。这些改变形成了一个数学的集合，并且能够通过一个坐标系中的三维空间结构来进行表征。这一概念在早期的两项研究中已有所涉及。第一项研究关注的是0—18个月时，婴幼儿如何在感知运动智慧水平上对位置变化的概念进行组织②。第二项研究关注的是4—12岁之间儿童发展起来的空间表征能力③：年幼儿童如何仅从终点位置的角度来描述位置的变化，年长儿童如何比较运动路径的差异。在另一项早期的研究中，我们探讨了方向和坐标系，观察到儿童如何逐步学会从水平和垂直角度构造其所感知到的空间，并继续向前发展，直到能够建构一个平面图，比如说一个村庄④。然而，我们还没有探讨儿童如何从一个综合的参照系，或坐标系的角度来重构物体位置的变化。

要想将早期的研究成果与当前研究中关于空间测量存在的问题相结合，一个好的方法是探讨儿童如何使用参照系来思考一系列的运动。这种探讨将从总体上为欧几里得计量学的研究提供有价值的开端。

测量就是从整体中拿出一个成分，将其看成一个单元，并将这个单元与整体中的剩余部分进行转换：因此测量其实是子成分和位置变化的合成。然而，虽然以这种方式看待测量是清楚和不证自明的，但事实上，其背后的加工过程却相当复杂。正如心理-基因发展过程中经常出现的现象，如果某种心理运算已经到达其最后的平衡状态，那么它看起来就会很简单，然而这具有极大的欺骗性，因为它的起源要复杂得多。

对于年幼儿童来说，理解位置变化这一概念具有双重困难。首先，测量这个概念远远超出了儿童进行必要的身体运动或者转换物体的能力；测量意味着对位置的变化进行表征，而且只有当儿童能够正确做出某些动作后，他们才能重新建构动作的序列。其次，仅仅能够想象出运动还不够，他们还必须能够将这些运动和参照点联系起来。有些参照系在任何一种运动序列的表征中都是内隐的。想要理解测量，需要将几个参照点形成一个系统的整体，即形成一个坐标系。这一点对于面积或体积的测量（参见第七章）尤其适用，因为在这些测量中个体必须同时考虑两个或多个计量指标；对于角度的

① 与Miss Gisella Muller合作完成写作。

② 《儿童"现实"的建构》，伦敦，1955，第二章。

③ 《儿童的运动和速度概念》，第三、四章。

④ 皮亚杰和英海尔德，《儿童的空间概念》。

测量(参见第十一章)也适用,因为个体不仅需要考虑物体位置的变化,还需要考虑方向的差异。

在上述提及的几项研究中,我们发现儿童仅仅能根据物体的终点来考虑其位置的变化。他们并不会尝试将终点和起点相互联系,更不用说以一种更具包容性的参照系统同时考虑起点和终点。在本书的一系列探讨中,我们将不断观察到儿童身上的这种现象,尤其是当儿童解决运动物体的长度恒常性时(参见第六章)。在分析儿童建构计量空间概念的方式之前,我们有必要简短地回顾一下关于物体运动的研究,在头脑中应该明确一点,真实地移动一个物体与描述物体位置的变化是存在差异的,尤其要知晓物体位置的变化与参照系是紧密相关的(参见第十三章和第十四章)。

我们需要在儿童完全熟悉的情境中探讨他们对物体位置变化的表征。我们不会给儿童呈现一个对他而言完全陌生并包含运动的具体问题,并要求他描述物体位置的变化。在这些情境中,物体的位置变化本身是儿童熟悉且能快速想象的(不同于第十四章中对村庄的想象)。因此,相比于出现在测量中那些小而精确的、需要测量的部分,我们将主要探讨较大层面上的位置变化问题。而且,我们也不再探讨测量问题,而是主要集中于以下两个方面:(1)心理表征和实际动作之间的冲突,(2)位置变化表征和参照系之间的必要联系。

通过研究4—10岁儿童描述熟悉路线的方式,比如说从家到学校的路线,或是从学校到各种景点的路线,我们将能够清楚地观察到儿童是如何通过使用路标学会描述位置的变化的,并最终将这些参照点相互联系整合进一个综合的参照系中。因此,主要的建筑物、广场、桥梁、河流或者溪流(在日内瓦,有罗纳河和阿尔沃河),他们的学校和家庭都是路标,并共同形成了一个参照系,而这个参照系反过来又能帮助儿童描述位置的变化。

第一节　方法和结果概要

我们研究中涉及的问题,4岁或5岁以下的儿童还不能回答。在瑞士,这一年龄段的儿童刚刚进入幼儿园,处于皮亚杰认知发展理论的阶段2。即使是4—7岁的儿童也很难坚持到实验结束,除非他们对提问的问题很感兴趣。研究是在学校的一个实验室进行,儿童被带到窗户边上,研究人员要求儿童指出窗外各种各样的建筑物和景点。这么做只是为了确定儿童对于当地建筑物的知识及其方向感如何。接下来,研究人员要求儿童背靠窗户坐在桌子旁边,给儿童一个装有湿沙的沙盘,沙面非常平整。研究人员还会给儿童呈现许多小的、木制的、各种大小的房子,代表学校及其附近的建筑物。小的木片代表绿地、娱乐场所、广场和桥梁,一条丝带代表阿尔沃河(研究所在的学校距离阿尔沃河非常近)。研究人员拿起最大的房子,把它放在沙盘的中间,说:“这个房子是

大的学校(区别于幼儿园)。这里还有很多的房子,有小的,也有大的。这些小的木片要做成桥,这条蓝色的丝带表示阿尔沃河。现在,我想知道学校附近其他的建筑物是什么,请你把它们都放在合适的位置上。”(如果儿童过于紧张,不能使用准备的模型,那么可以要求儿童先在沙盘上画出来。)在实验的第一部分结束时,研究人员会要求儿童在沙盘上或白纸上画出一个平面图,指出他如何从家走到学校或者更进一步,他如何到一个大家都熟知的地方,比如纽威广场(距离沙盘中所展示的地区非常近)。该任务没有特殊要求,但是儿童应该指出他画出的事物与其总体计划是否相匹配。接下来,儿童要在一张更大的白纸上画出沙子上的模型,画完后,研究者将学校建筑物反转180°,并询问儿童:“现在,如果我把学校像这样反转一下,我们是不是也得旋转所有其他的东西或者就让它们像现在这样,不用旋转?”如果儿童认为应该旋转,则要求儿童亲自演示。对于年长的儿童来说,这个实验可以以纸笔的形式进行。

可以看出,对于这一问题的探讨有相互联系的三个部分:(1)学校建筑物的计划图以及邻近建筑物的主要特征;(2)重构从学校到著名景点路标的路线;(3)当学校建筑物被反转180°后,其他建筑物的位置变化。其中第一部分在第十四章介绍,因此在这一章中我们将跳过这一部分。这一章中我们会关注儿童对位置变化的表征,这一表征通过儿童对从学校到指定目的地路线的重构或者将最初的路径反转180°得以体现。然而,我们都很清楚,这两种任务都要求儿童在头脑中建构出一个参照系,这个参照系其实是一个地形学图示或者对附近建筑物形成的一个平面图。

儿童对这一问题的反应呈现出三个不同的发展阶段。在第1阶段和第2阶段中,即儿童的平均年龄为7岁时,他们会给出三种相互关联的反应:(1)当要求儿童说出从学校到某景点的路线时,他们会首先想到自己的行动路线,好像这些路线在某种程度上就是绝对答案,并且会在这些路线中设置各种不同的路标,但却不能根据路标设计行动路线。(2)路标并不是以一种客观的空间整体进行组织的。任何两个路标之间的联系都可以被看成是独立于整体系统之外的存在。(3)儿童不能对路线进行180°旋转,也不能从相反的方向重新建构路线,因为这两者都需要儿童具备运算性思维能力。

第3A阶段的特点是儿童对空间中物体的协调能力非常有限。他们会使用并未形成整体参照系的子系统重构路线。他们对区域的计划图由几个部分构成都很清楚,但是彼此之间却不相容。在旋转平面图的过程中,他们能够反转部分物体之间的关系,但并非全部。最后,第3B阶段的儿童已经发展出完整的空间协调能力,他们能够表征路线,建构学校的地形学格式并对学校的平面图进行反转。

重新建构位置变化能力的发展轨迹与年幼儿童在知觉水平上处理这些位置之间关系的能力发展轨迹类似。在一项早期的研究中,我们已经证明这一能力是在感知运动阶段通过构建集合的方式获得的[①]。本书中所展示出来的儿童发展过程,虽然落后于发

---

① 《儿童“现实”的建构》,第二章。

展的节点有几年时间,但是仍然遵循相同的重要原则。对于这两者而言,在从自我中心坐标系向客体中心坐标系的过渡过程中均产生了一定程度的偏离,客体中心坐标系的形成意味着协调过程不再以儿童自身的动作为转移。然而,在发展的早期,儿童的动作是他们进行空间现实表征时唯一可以获得的参照系统,到了后期,儿童才能够从客体系统的情境范围内去看待这些动作本身。因此,儿童能够从在系统层面相互关联的客体参照系的角度描述他自身的动作。在表征水平上,只有当儿童能够从自我中心坐标系向客体中心坐标系进行转化后,他们才能够建构出位置变化的集合并使之形成一个协调的系统[①]。在0—18个月期间,儿童摆脱了自我中心式思维,另外一个与其同等重要的成就是当他们处理具体的客观事物时,能够建构起实际位置变化的集合。本研究中年龄最小的儿童不能将位置的变化描述成一个客观的集合,因为他们未能形成一个关于参照点的整合的坐标系(参见第十四和十五章)。他们不能对物体进行倒置的操作,也不能进行具有关联性和传递性的平面构图,这一点从他们尝试描述位置变化以及使用路标的回答中清楚可见。从儿童自身的角度出发,这些心理操作都是可以协调的,但是它们都依赖于儿童自身的动作。当儿童处理我们称之为"主体集合"(subjective group)的感知-运动空间问题时,由于是从客体的角度出发,因此不存在集合这一概念。随着年龄的增长,当儿童能够协调位置的变化和地标并能够进行倒置操作时,真正的集合概念才出现。

第二节　阶段1和2:不能确定地标坐标,不能描述位置变化

我们已经指出,上边的实验不能测查4岁以下的儿童。然而,通过观察18个月到4岁儿童散步时的自发性反应,我们可以看出儿童进入阶段2时最初的空间知觉反应。

杰克(1;7[②])　当距离山中的一座小屋大约100码时,他能够说出小屋的方向并指出祖父3天前带他走过的那条路。当他1岁11个月时,他能够指出自己家房子的方向,虽然此时他已在离家0.5英里之外的地方,并背对着家的方向。但是当他开始踏上回家的路时,他认为他家仍然在他的身后,直到最后发现自己错了。当他长到3岁3个月时,他会沿着道路的右侧前行以避免交通事故,但是当回来时他会沿着道路的左侧前进,误把它当成自己的右侧。

埃尔即使到了3岁11个月,当坐在行驶的小汽车里时,仍会认为远处的山是移

① 法语:groupe de de'placements。

② 名字后括号中的数字表示年龄,第一个数字表示年龄,第二个数字表示月龄,如(1;7)表示这个孩子是1岁零7个月。下同。

动的[1]。

这些儿童的方向感都很好，第一个儿童知道自己家的方向，也能够指出他陪祖父走过的几英里的路。另一方面，他们仍然会犹豫，当面对一个需要从“后面”转换到“前面”或者从“左”到“右”的问题时，常常会犯错，甚至那些表示距离的路标对于他们来说也不是一个静态的东西。

这种思维模式沿着两种不同的水平向前发展到阶段2，并延续到阶段3A。即儿童的表征能力进一步发展之后，他们才能够将这两者结合在一起。第一个水平指的是实际的空间方向或有效的动作。当儿童被带到实验房间的窗户边时，他们能够指出自己住在哪里，阿尔沃河在什么地方，能说出他们知道的各种各样的其他路标。如果我们跟他们散步回家，他们会努力表现出自己对整条路线非常了解，虽然他们只能解释所遇到的每个路标。然而，第二个水平正是我们当前所要研究的，即现实表征，它需要暂时与动作分离。当儿童仅仅能够想出一条路线和多个景点之间的空间关系时，这种表征就出现了。显而易见，从动作到表征，这一步骤是阶段2中比重很大的一部分。处于这一阶段的儿童，能够以一种实用的方式给自己定位，也就是用实际动作，这种定位意味着到达某一个地点之后，他们能够预期下一个即将出现的路标和当前地点之间的空间关系。儿童不是将自己所生活的环境作为一个有秩序的整体在头脑中进行建构，他们会在某个不太连贯的毗邻位置停下来。他们对路标的存储依赖于自身对真实旅行经验的搜集以及自己的兴趣，因为这些能够帮助儿童在头脑中确定出行方式以及途中所见过的路标。

接下来的例子说明了儿童存储路标的方式以及产生的一些混淆。

> 卢克(4;2)　被带到窗户边。他正确地指出了自己所在学校的方向(幼儿园的大楼)以及阿尔沃河的位置等等。“汽车展览馆在哪里？——*在那里*(他指着阿尔沃河的方向，答案是错的)。——*不对，在那里*(这次他指对了)。——你为什么要改变你的答案呢？——*因为我住在那里*。(他被带到实验桌子旁边)——你家住在哪里？——*你知道有轨电车吧，当它经过那个剧院*(他指的是普莱恩斯的旅行马戏团)*后就到了卡鲁日，卡鲁日就是我住的地方*。——你去过那个剧院吗？——*是的，我去过一次。看见一只老虎*。——剧院在哪里？——*你看，就在那里，在礼堂附近*。——在教学楼附近你会发现什么？——*树林、网球场、花园、操场、花园，大男孩儿的操场、小女孩儿的操场*。——沙坑在哪里？——*在我们玩儿的地方附近*。——指给我看一下好吗？(他开始指错了方向，后来背对窗户时又改正过来了)——“卡鲁日在哪里？”(他没有指出最短的那条路线，而是把胳膊伸出窗外描

① 参见《儿童“现实”的建构》和《儿童的游戏、梦与模仿》。

述了一条经过他家的圆形路线)——*你从这里一直往前走，然后转弯，在那儿*(他住的地方)，*那里就是卡鲁日。*"现在，研究者要求卢克在沙盘上摆出他刚才说到的这些地方，并告诉他在摆放时要注意彼此的相互关系。卢克并排放置了不同的东西，摆放很杂乱且彼此之间毫无联系，其主要特征如下：(1)出于完全主观性的联系(例如兴趣等)，一些物体之间的摆放关系是错的。因此，在他的摆放中，主教学楼距离幼儿园仅仅几英尺远，而他的家却在几百英尺以外，卢克让两个学校相距很远，却把幼儿园放在距离自己家相当近的地方。(2)虽然两个操场彼此相邻，但却被一个相互交叉联结呈菱形的篱笆隔开，卢克把小学生的操场放在学校的远端，而不是放在两幢教学楼之间。虽然每次他出去玩都能看见那些男孩并听见他们说话，但是当寻找操场的地理位置时，他却把操场放在了尽可能远的位置。(3)概念相似和距离较近的东西之间可能存在混淆(参见《儿童的空间概念》第十四章，第三节)。卢克把他知道的两座桥并排放置在阿尔沃河上。由于自我中心式思维习惯导致的错误想象，使得卢克把其他的一些东西都放错了地方。因此，汽车展览馆被放在距离他家和学校一半距离的地方，卢克把它放在自己家的右边，甚至感觉必须把学校移动到更远的地方，以此来强调两者之间的距离，因为他在去学校的路上会经过这家汽车展览馆，因此，他认为汽车厂在自己家附近。他没有意识到从学校回来的距离也是一样远。研究人员再次问卢克："普莱恩斯在哪里？——*在我回家的路上，但不是在家的右边*(卢克把普莱恩斯又挪到稍远的地方，但仍然没有放在距离家、学校和汽车厂正确距离的位置上)。"有的时候，卢克能够正确处理两个位置之间的空间关系，对于两个位置的空间感知是正确的，但是当处理三个位置之间的关系时，即使已经摆脱了自我中心式思维，由于缺少整合能力他仍然不能正确完成任务。

格尔(5;11)　将学校和幼儿园挨着摆放，并将两个相邻的操场放置在学校和幼儿园之间，这么摆放是正确的。然而，对于他完全不感兴趣的护理学校和其他多种建筑物，他也把它们摆放到了距离学校正确的位置上，有些地方让他着迷：他把足球场和"充满礼物的房子"(卖玩具的百货商店)放置在自己的学校附近——因为它们是他心中愿意去的地方。接下来，他正确地把家放到了用一条蓝色丝带表示的阿尔沃河附近。但是，在这么做的同时，他完全忘记了学校的正确位置，结果，把家和学校放置在了河的同一侧，而事实上应该放置在河的两侧。他继续把桥放在他家附近(庞特阿卡西亚斯)，但是这部分的构图与整个平面图是对立的，因为两者之间没有联系。这也就导致了不可避免的混淆："萨雷沃山在哪里？——*在那儿，因为它必须面对着卡鲁日。*"如果从学校的教学楼往外看去，这完全是正确的，但是格尔继续把正在讨论的萨雷沃山和桥梁放置在了平面图的错误的那边，因此，最后看来他的摆放非常杂乱。

> 缪(6;10) 把许多地方混乱地摆放在一起:教学楼和学校里边的走廊,学校的主操场,幼儿园的操场和入口,作为一个单独建筑的体育馆以及阿尔沃河岸边的一堆沙子。他继续把阿尔沃河放在体育馆附近,根本没有注意到已经摆放好的建筑,而卡鲁日和阿卡西亚斯则被错误地并排放置。总之,缪是出于自己的主观兴趣而把许多地方放到一起,对于那些知觉相似和空间相近的其他地点的摆放,他感到有些困惑。

值得注意的是,这些儿童偶尔也能成功地将两个物体隔离开来,但是当涉及三种或更多成分时,如果要求他们将其中的两两关系进行整合,无论何时他们都不会成功。造成这种现象的原因非常普遍,在我们早期的研究中也有所体现。

首先,真正的逻辑关系是一个物体能够与其他多个物体相结合,而处在“前关系”阶段的年幼儿童往往会把成对成分之间的关系割裂开来,这也是年幼儿童不能排列一系列事物,而只是简单地将物体成对组合的原因①。在空间关系中,儿童可能会把这种困难展示得更加准确。对处在这一水平的儿童来说,他们能够理解两种成分之间是紧密相关的。他们甚至能够重构单一维度上不同事物之间的顺序,虽然他们的这种重构是直觉水平的,因此,他们不能进行倒置操作(反转顺序,参见《儿童的空间概念》第三章)。然而,在两个或多个维度上的多样性顺序暗示着一个协调坐标系的存在,在早期的探讨中我们发现,年幼儿童不能在多个维度中进行协调。因此,处于阶段2的儿童会努力复制某个村庄的框架模型,就好像模型中包含的关系能够用一种纯线性的方式表现出来②。即使这些儿童能够成功地展示出对距离的感知,他们的思维仍然处于拓扑学水平:从参照系的角度而言,他们不能建构出具有整体协调性的欧几里得式的格式。

毋庸置疑,儿童的格式中包含许多并列的点,这些点来自于他们自身经历过的位置变化,这意味着他们的格示并不是完全基于静态的距离感知。不幸的是,儿童经常会扭曲距离,这是因为在他们日常的旅行中,自我中心思维产生的错觉仍很严重。儿童的旅行过程总是没有方向的,或者至少儿童不能将往返的距离等同,因此,也就不能对终点进行比较。卢克对汽车展览馆和他家房子的位置安排就是这样的一个例子。在另外一种经常见到的现象中,类似的机制也得以体现。由于儿童的主观兴趣而被捆绑在一起的物体,它们之间的距离总是被儿童忽略掉。因此,卢克会把学校和家放置得比较近(原因部分来自于自己对这条线路熟悉,部分则来自于自己的主观兴趣),将主教学楼放在距离较远的地方,仅仅是因为那不是他关心的事情;格尔将卖玩具的百货商店放在学校附近等。最后,知觉上的相似总是被儿童误认为在空间上也较为接近,正如几乎所有

---

① 参见 *Le developpement des quantites chez l' enfant*, pp. 223-33, 与 H. Wallen 的 *L' origine de la pensé echez l' enfant* 进行比较,Wallen教授在他的书中指出相互关联的成对物体之间存在普遍差异。

② 《儿童的空间概念》第十四章,被提及的实验中要求儿童复制一个模型,而在此处的实验中,儿童需要重构真实物体的位置。

的儿童都会把桥梁并排摆放,因为它们属于同一类事物。

因此,这一水平的特征包括:一些邻近的地方被成对地摆放在一起,儿童的摆放完全是拓扑学层面的,缺少一个协调的坐标系;一些不相关的事物也会被放在一起,因为儿童反复地途经这些地方;还有一些地点的摆放是儿童根据自身的动作,把它们当成是最后的评判标准。因此,位置和距离都被来自于儿童动作导致的自我中心式错觉的系统给扭曲了,而这种错觉并不像逻辑思维一样可以运算。诚然,某些场合中确实发现处在这一水平的儿童正在探索如何表征位置的集合,下面的例子就是证明。但是这些现象无论如何也无法影响前述的研究结果。

大家还记得,卢克(4;2)　把他家的房子放在幼儿园附近。研究者继续询问卢克这么摆放是否正确,卢克立刻试图用一种完全不同的方式回答这一问题,这也使得我们观察到处于这一水平的儿童其思维模式的明显特征。"你家住在哪里?——*那里*。——为什么?——*因为我家在幼儿园对面*。——你家真的在幼儿园对面吗?——*不*。——那你住在哪里呢?"为了回答这一问题,卢克把椅子转过来,看向窗外,他用一只手正确地指出了他家的方向,并用另一只手在沙盘上画出了一条弯曲的路线,同时嘴里一直在重复:"*拐弯,拐弯,拐弯,拐弯*。"然后,他回头看向那只指着正确方向的手,把房子模型放在了他所画路线的终点位置。

研究者要求摩尔(5;10)　指出他从学校到普拉西纳沃的路线。他马上就画出了一条带有直角的线,并在结束的时候稍稍弯曲,说:"*在那儿,我必须要转弯。那里就是普拉西纳沃*。"他只记得开始和结束的地点以及中间需要绕过一个转角,但不能回忆出任何一个路标,而且这条路线与他构思的学校和地区的平面图毫不相关。

奥(6;1)　似乎发展得更好一些,因为他能记住路线中几条路的名字:雨果森格街,"*那边的一条马路*",丹赛特街,皮克顿特博克街。但是他不能记住这些街道的顺序以及在哪些地方他需要转弯,因此,他画的路线是一条带有许多点的圆弧,这些点与他能够记住的名字随意搭配在一起。

另一方面,杜(6;4)　则画出了一条非常复杂的路线,而且其中一段看起来非常准确,他说:"我沿着这条路一直往前走,在那个地方我会转弯,然后继续向前直走,在那儿转弯,最后我就一直向前直走,再转一次弯就到了。"然而,他不能说出路线中任何一个部分的路标名称。确实,他认为客体参照系并不重要,以至于他会改变起始点的位置,把"普拉西纳沃"称为"学校",反之亦然。

范(6;7)　画出了一条通往普拉西纳沃的直线路线,开始回忆出或多或少正确的许多路标的名称,"我先朝伦德玻恩特走,然后沿着这条路朝着巴斯塔恩走,巴斯塔恩和普拉西纳沃离得很近。"但是当他画完后,研究者要求他指出伦德玻恩特的确切地点,范把它放在了学校附近,而不是在普拉西纳沃上方距离一半的地方。用

同样的方式，他把普莱恩放在了学校的下方，而不是放在从学校到伦德玻恩特的路上。当涉及汽车展览馆时，他的错误就更严重了。总之，路线本身连同与之相关的记忆中的路标是相互分离的，它们也确实是不同的路标。然而这些路标被并排放置，无法看出彼此之间的关系。

吉欧(7;1) 画出了一条两端各有一个直角的直线。一个直角代表他前进路上的学校，另一个直角代表拉西纳沃。在路线中间部分的两端，他分别放置了一个圆圈。一个圆圈代表普莱恩，另一个圆圈代表贯丁巴斯塔恩。但是吉欧反转了这两者的位置，而且他在学校和普莱恩之间放置了一条特定的道路，不过这条特定的路是他每天上学必经的路，事实上它应该在阿尔沃河的另一侧。

儿童的这些反应都很有趣，因为通过这些反应可以看出，帮助儿童形成路线图景的记忆是非常实用甚至是动态的。毋庸置疑，对于成人来说，如果要回忆一个城镇在什么地方或者描述登山的路线，肯定会依赖于自身参与过的旅行经验。假设我们询问一个路人或是旅行者这些问题，我们会非常明白姿势的使用和动作格式的回忆远比真实的表征对我们有用得多。最重要的是，如果我们进一步思考，就必须承认我们来和去的经验为我们提供了关于位置和风景的记忆框架。确实，这些例子提供了最有利的证据，支持视觉图像是对动作的内在模仿，被想象的物体和动作之间存在内在的联系。在这种联系中需要注意，当描绘一个地区时，我们倾向于将其进行某种程度的扭曲。因此，经常出现于头脑中的那些部分会比实际大，而其他一些部分则看起来比实际小很多，虽然它们也被个体熟知，但是个体较少主动去编码它们。这些事实能够让我们对处于这一水平的儿童对位置变化所形成的格式进行这样的类推，但是存在着重要的差异。为了确定方向和不同路标之间的相互关系，我们会努力将运动记忆与路标相联系，并形成一个单一的有秩序的系统。就我们成功的案例而言，我们能够连贯地描述任何形式的运动集合，因此能够对它们进行逻辑转化。这些儿童的反应很有趣，因为他们似乎对于自己描述中出现的运动或是一些主观成分相当满意，以至于有些儿童(例如卢克)并不觉得需要参照其他事物，而其他一些儿童则不能意识到在参照点之间建立稳定联系的必要性。

在记住自身动作的过程中，研究人员会引导儿童来谈论路标。但是这些路标只是被简单地添加到他们的记忆中，而记忆中的运动格式应该依赖于路标信息。令人惊讶的是，儿童记不住路标的正确位置，甚至也记不住这些路标出现的顺序。

大家还记得，儿童描述两点之间可供选择的路线时，与上述他们的反应处于相同水平。在一个早期的实验中，研究者给儿童展示两条路线，其中一条是两点之间的直线，另一条则被弯曲成不同的角度[①]。实验开始时，除了终点，儿童会忽略掉其他所有的事物，以至于如果两个终点处于相同的位置，那么儿童就会认为两条路线具有相同的长

① 皮亚杰，《儿童的运动和速度概念》。

度;只有经过非常缓慢的发展步骤后,他们才能到达一个基于路线本身进行判断的阶段。我们现在能够明白,当儿童描述一次到著名景点的旅行时,他们为什么会简化从特征上来说属于纯粹运动的记忆格式:这是因为对他们而言,位置的变化只是意味着终点位置的变化,通常是在一个既定的点结束;他们不能从一个关于点和间距有秩序的系统角度来看待位置的变化,他们自身的旅行经验就是这个系统中的一部分。处于这一水平的儿童并不认为位置的变化可以代表空间中的动作;他们似乎总是从起点出发,在终点结束,而这两者并不是通过一个有秩序的整体联系起来的。他们只对自身的位置转换感兴趣,而对发生转换的空间则不是很关心。因此,他们对旅行中不同阶段所经过的持久且非常重要的景点全部都以一种非客观的顺序组织起来。这种组织顺序非常主观,依赖于儿童自身的动作。

因此,在第2阶段,并不存在真正的位置变化集合。只有一个主观集合,该集合把没有参照点的儿童自身动作与空间中的客体顺序联系起来。在感知-运动智慧阶段,也存在一个类似的主观集合[①]。最有说服力的证据就是这些儿童缺少一个真正的、客观的集合,所以他们不能理解倒置问题。倒置操作需要在平面图反转180°的基础上对路标进行旋转。一种相似的联系也曾出现过,即在感知-运动阶段形成的位置变化集合(客体从一个地点移动到另一个地点的动作)[②]与将物体任意旋转的能力之间。对于仍然处在主观集合水平的婴儿来说,如果成人将瓶子反方向给他们(底部朝向婴儿),他们不能将瓶子反转180°;一旦他们开始能够以客观集合的方式处理运动物体时,几乎不费吹灰之力就可以反转这些物体。在表征水平上,情况也是如此。当不存在位置变化的集合时,儿童就会发现,想要系统地将学校倒置180°很困难(此时只包含学校及其邻近的事物)。

下面是两个处于阶段2发展最好的儿童的例子。

前边提到过的吉欧(7;1),他摆放模型时就好像自己面对着主要的入口。他把操场正确地放到了学校下边,幼儿园在右边,护理学校和网球场在学校左边,而阿尔沃河在操场的上边。他把卡鲁日和一个特定的喷泉放在了阿尔沃河错误的一边,但是一个背对着主要入口的小木屋的摆放位置是正确的。汽车展览馆和普莱恩的摆放方向是正确的。不过所有的物体只是被粗略地摆放。我们开始一项新的计划并把学校的教学楼放在另一条路上,要求吉欧想象自己正站在操场上,吉欧成功地指出操场在主教学楼的前面,甚至能够说出喷泉挨着操场,但是接下来他就迷路了。他把幼儿园放在了它原来位置的右边,仍然把阿尔沃河和码头放在了距离学校较远的一边,等等。"现在请注意,如果操场在这里,喷泉在那里,那么阿尔沃河放的地方是否正确?——哦,不,它应该在这里(放到正确的位置上)。——那么护

① 皮亚杰,《儿童"现实"的建构》,第二章,第二节。

② 同前,第二章,第三、四节。

理学校应该在哪里？——*在那儿，网球场那边*（他再次错了，把护理学校和网球场都放在了左边而不是右边）。”小木屋被放置在学校前边，等等。

研究者努力使实验任务简化，只使用一个装有湿沙的沙盘，从进入学校的前门向里望去，其中一些物体在最初的布局中已经摆放好。研究者把楼房转过来，并把一个小的、铅制的人像放在操场的边上，以此来代表吉欧自己：“现在，发生了什么事情？——*我站在操场上*。——很好！你现在已经理解了。那么你认为这些东西还是按照刚才这么摆放吗？——*不是*。——那好，你把它们放在它们应该在的地方。”然而，吉欧并没有改变模型的布局，他只是每次拿起一个物体并根据其自身的坐标系进行旋转，没有改变物体的位置，好像那个站在操场上代表他自己的人像现在观察到的所有物体都是已经旋转过的。只有阿尔沃河没有被旋转，“阿尔沃河应该怎么动一下？还是像现在这样不动？——*是的，阿尔沃河这样就好，因为人们不能旋转阿尔沃河*。”

吉雅（7;0） 建构了一个从入口看去更加粗略的平面图。他一开始就把路堤错误地放在了教学楼的前面，把操场放在了距离阿尔沃河较远的一边，但是他又重新摆放了这些物体，把操场放在学校后边，路堤放在操场后边，再然后是阿尔沃河。研究者没有增加任何新的物体，只是把教学楼进行了旋转，告诉他那个小人像现在正站在操场上。他正确地改变了学校、操场、码头和阿尔沃河的相对位置。然而，虽然他的最初表现不错，当研究者询问他幼儿园、商店和护理学校等的位置时，他一直把左边认为是右边，把前边认为是后边。

这一阶段中即使是发展最好的儿童仍然不能找到正确解决旋转模型问题的方案，虽然他们能够成功地重构学校及其附近的建筑物。所有这些不足也让人吃惊，因为处于相同水平的儿童在三山实验中不能反转自己的视角[①]。这些问题都是相同的，不同点在于儿童更加熟悉当前的问题内容，同时从位置变化的角度来进行视角的改变。

第三节　亚阶段3A：通过使用路标能够部分表征位置变化坐标

在第3A阶段中，儿童开始能够将位置变化的表征进行集合化处理，因此也开始能够协调路标信息。处于这一子阶段的儿童的反应非常有趣，因为他们还不能表征位置变化的集合，除非他们描述的旅行经历可以在一个坐标系中展示出来。正如下面例子中清楚展示的，丰富坐标系和对运动表征进行集合化，这两者是相互依赖的。然而，无

① 《儿童的空间概念》，第八章，第二至三节。

论是描述一条路线还是说明路标之间的拓扑学关系，处于这一水平的儿童还不能将一个坐标系协调为一个整体。下面的例子展示出儿童如何解决邻近物体之间的框架关系。

莱夫(7;10)　一开始就把两个学校教学楼和它们之间的操场，还有喷泉、秋千、沙坑、足球场、码头和阿尔沃河放到了正确的位置。开始摆放护理学校和狗窝时，莱夫记得它们两个是在一起的，不过即便如此他起初仍然把它们放在了右边而不是左边，后来他改正了过来，但是仍然把它们两个放在了距离其他物体非常远的地方。然后他看向窗户外边，增加了一条上山的路和一个咖啡馆等。结束时，在模型的最左侧又增加了一组新的事物。研究人员让他放置一个透过窗户可以看到的小木屋，但此时他发现自己不知道该怎么办。首先，他把小木屋放在了主教学楼入口处的对面，这是正确的；然后他又把它拿走，放在咖啡馆附近，这也是正确的。"小木屋在哪里？——在这儿(学校的前面)。不，在这里(咖啡馆旁边)。——但是放在哪里更加准确呢？"因此，莱夫的模型中包含两个相互分离但又相互依赖的子集合，虽然每个子集合本身都是正确的。这些具有共性的物体并没有帮助到莱夫，因为他把它们放在了两个不同的情境中。

特鲁(8;2)　形成了三个不同的子集，这些子集每一个都是连续的整体。首先，他画出了学校、操场和网球场等，所有这些构成了第一个系统；接下来他没有起身并朝窗户外边看去，说道："*那条河就在那里。*"既然从窗户望出去是在学校的前面，那么正在考虑中的那条路就应该放在教学楼的右侧某个角度上，但是特鲁只是简单地把它放在位于他所画平面图左侧的护理学校附近。这些使得我们观察到他的第二个集合，包含马路、小木屋和一条有岔路的路(他称之为双路)等。第三个系统，展示在他所画平面图的右侧，由幼儿园和阿尔沃河等组成。

舒(8;7)　也展示出两种不相关的子集。其中一个子集包含学校，周围是教学楼，它们到学校的距离与到阿尔沃河一样远。另一个子集包含普莱恩、卡鲁日和汽车展览馆等，这些建筑物与学校或是阿尔沃河均没有什么关系。

克莱(9;0)　向我们展示了一个非常有趣的从第3A阶段向第3B阶段转换的例子。他开始先画出了教学楼和阿尔沃河等，并画出了其中的一些细节。然后，他看向窗外，随后画出了用马斯伯来命名的街道，最后他画出了卡鲁日(马斯伯街道的延伸)等。然而，他并没有让这一系统与第一个系统相吻合，他忽略了第一个系统，这也使得他自己出现了明显的矛盾。例如，在他的平面图中，卡鲁日位于学校和阿尔沃河之间，然而事实是学校处于卡鲁日和阿尔沃河之间。克莱注意到了这一点，又画了一幅看起来一致并且相互包含的平面图。

这些例子连同许多我们没有提及的例子在本质上非常相似。当儿童能够真正看见

乡村，而不是被要求根据记忆画出乡村的平面图时，相同种类的集合化过程会出现于较低的发展水平（第2A阶段和第2B阶段）[1]。那么，为什么到了第3A阶段，虽然儿童此时能够协调两种不同的维度，并且开始展示出视角协调的相对敏感性，仍然会画出两种不相关的、局部的平面图[2]？这一问题的答案，部分是由于儿童首先能解决具体情境中的问题，然后才能根据记忆解决问题。但是这些例子也展示出另外一种与位置变化表征有关的特征。这些局部平面图中的每一个都是根据一个特定的有利的点或者是记忆中一次特定的旅行经历而画出来的。这些局部的平面图是不相关的，因为画图的儿童仍然不能将一个特殊的优势点或一次旅行与下一次的优势点或经历之间的差异联结起来。与处于早期发展阶段的儿童不同，他们开始关注一次单独旅程中不同路标之间的相互关系，或者那些在优势点之外突出的路标，但是每次旅行和特定的优势点仍然是独一无二的，因此，儿童还不能在一个整体性的领域中协调所有的这些特征。

当儿童从一个特征集合过渡到另一个特征集合时，他们会让依赖于特定优势点或旅行经历的集合的内部顺序显而易见。这就是为什么莱夫要看向窗外才能画出平面图，并仅仅基于见到的景色就立刻画出一个独立的平面图：上山的路（事实上这是一个非常完美的水平）和咖啡馆等。现在，他所画平面图的第一部分是基于当一个人面对学校时可能会看到的景色，因此这与第二部分完全相反，并与每天早上他去学校的路线相联系。特鲁的平面图展示出两种相同的视角，但是特鲁画出的第三组特征则是基于前一年中去幼儿园的路线。因此，他把通往幼儿园的路画成了类似于正弦曲线的波浪线，这也是基于运动图像记忆来画平面图的一个共性特征。舒向我们展示出两组特征，其中一组特征是基于他去学校的路程，另一组则是基于他从家到经常玩耍的普莱恩的路程。最后，克莱开始画出了一组与去学校的路程相关的特征和一组从学校回家的路程相关的特征，虽然它们的方位是相反的，但是这些集合相互交织并相互对立，因此当他想要画出一个单独的、连贯的平面图时，他不得不重新开始。

虽然这些儿童相比于第2阶段的展示出了更强的协调能力，但是他们的拓扑学格式仍然是没有秩序的，不能形成一个统一的整体。他们将路标固定在一些基于许多相互依赖的优势点而建立起来的子集合。上述介绍的这些例子说明了一些在某种程度上似是而非的结论，即这些儿童不能从一个统一系统的角度协调路标信息，因为他们对自身位置的变化还没有进行充分的集合化。真实的情况是，这两个集合化过程是相互依赖的，因为位置的变化只有在一个具有良好协调性的参照系中才能进行集合化。接下来的例子说明了反转依赖性。这些儿童能够正确使用路标信息来描述位置变化，但是不能形成一个连贯的、综合的集合，因为他们对参照系的协调不充分。

---

① 《儿童的空间概念》，第十四章，第四节。

② 参考《儿童的空间概念》中相关的部分.

研究者要求佩拉(9;3)　说出从学校到普拉西纳沃的路线:"这里是学校,我沿*着那边的一条路直走;在那儿我会转弯,然后继续直走。*——我怎么知道在哪里转弯?——*首先你会到达8号有轨电车的站点,然后你会到达下一个转角*(他指的是伦德玻恩特),*最后,你就会看见普拉西纳沃。*——伦德玻恩特在哪里?——*在这里*(他指着最后一个拐角处)。——卡鲁日在哪里呢?——*它在这儿*(他指着在位于庞特阿尔沃林荫大道的12号有轨电车站点与伦德玻恩特之间的一条公路的延伸方向)。*但是这里有两个卡鲁日,一个朝向伦德玻恩特,另一个朝向庞特卡鲁日*(这时他画出了第二组特征,显示出了卡鲁日、阿尔沃河和庞特卡鲁日南边的部分。但是这'第二个'卡鲁日几乎与第一个卡鲁日呈直角,因此,虽然每一个自身都具有很好的协调性,它们不能相容)。——这两个卡鲁日总是一起出现吗?——*是的,它们总是一起出现在12号有轨电车站点附近,是从阿尔沃林荫大道过来的。*"现在,恰好这个点非常接近佩尔的家。他将卡鲁日对半分开,让其中一个向前伸展并垂直于另一个,这使得佩尔给出了两组相互冲突的特征,因为在佩尔看来,这些区域与两条完全不同的路线相联系。

派特(9;4)　画出的平面图,从概要图的角度来说是正确的,他画出了所有他能说出名字的建筑物,学校、迪则朗路(与教学楼相交的呈直角)、卡鲁日、伦德玻恩特、巴斯塔恩和普拉西纳沃。然而,之后他画了一个大的钻石形状代表普莱恩普莱恩斯的确切位置,并且画出了几条额外的道路,这些道路与他开始所画的部分并没有关系,除了从普莱恩到巴斯塔恩的那条路。

赛恩(9;4)　所画的平面图与派特的类似,不过他在解释中说出了很多细节性信息以及多条路线的名字,这一点相当引人注意。虽然如此,最后他仍然是画出了三个不相关的子集。首先是从学校到普拉西纳沃的路线,普莱恩与许多附近的道路交织在一起,其次是巴斯塔恩和特雷耶,它们处在普莱恩区域的边缘,但是并没有与第一个子集合产生联系。

儿童拥有对细节的强大记忆力,但为什么儿童仍然会给出许多相互分离、互不相关的经历?萨恩给出了自己的答案,以前他住在普兰帕雷斯普莱恩的边缘位置,在他能知道现在所居住的地区之前,他就已经知道了那个区域道路的名称,所以他并没有协调这两个他常去的区域之间的关系。类似的,佩尔把卡鲁日分割开形成了两个部分,因为他住在12号有轨电车站点附近,他就以它为参照:这两部分平面图分别与他从家过来的两个方向相互联系。还有其他类似的例子。这些儿童不能从一个综合性格式的角度描述自身位置的变化,因为他们头脑中存储的路标是不相关的。同时,他们会在每个子集合非常有限的情境中去参考路标信息,而不是像第二阶段的儿童那样,只是满足于纯粹的动作描述。

这是一个有缺陷的循环。为了客观描述位置的变化,即建构一个不依赖于个体联系的集合,描述必须满足一个协调的参照系统的要求;但是为了获得这样的一

个综合参照系统，位置的变化必须以集合的形式进行组织。在第3A阶段，当描述相互分离的、附属于整体的部分时，一些相互依赖的运算系统开始显现。这些系统中的每一个都是一个连贯的位置变化的集合，暗示着存在一种协调的参照框架。然而，当要求儿童把一个区域作为一个整体画出来时，他们还做不到这一点，因为他们不能整合包含在其中的所有的位置变化，而且当研究者要求他们描述自己的旅行时，他们也做不到，因为他们不能将所有的路标整合进一个单独的网络系统中。

对模型建筑进行180°旋转的实验再次获得了部分成功。儿童能够理解把平面图作为一个整体进行旋转的必要性，也不再满足于以自身的参照系为轴来旋转模型。但是由于一些后期才会出现的原因，他们仍然不能够坚持到实验结束。

拉夫(8;4)　成功地旋转了操场、幼儿园、河堤和阿尔沃河的相对位置，但是他把小木屋及其附近的道路和普莱恩放在了平面图的右边而不是左边，而把运动场放在了平面图的左边而非右边。

维亚(8;10)　在移动学校教学楼、操场、河堤和阿尔沃河时，正确地旋转了沙盘模型。但是在改变由汽车展览馆及其附近建筑物组成的集合时，他只是把它们从沙盘的后面移动到了前面，并没有把它们从右边移动到左边；同样，护理学校和网球场也是如此。

赛恩(9;4)　正确地旋转了学校教学楼及其附近建筑物。但是在重新放置组成普莱恩的一系列物体时，汽车展览馆，从学校到汽车展览馆的道路以及路边的小木屋，他只是把这些从后面移动到了前面，而没有把它们从右边移动到左边。这一点更加值得注意，因为他旋转了主教学楼和幼儿园，将它们从左边转向右边。当他开始画普莱恩时，不由自主地说道："*它与幼儿园在同一边，但是我不能把它放在这里*(应该在的位置)，*因为它应该朝着那个方向*(从他坐的地方，通过窗户指向普莱恩)，*因此我要离开幼儿园，还必须要转弯。*"他继续画出了一条想象的路线，从左边的幼儿园弯弯曲曲延伸到右边的普莱恩。至于第三个子集，包括庞特阿加西亚斯和卡洛琳等等，萨恩变得越来越受到他自身真实位置的影响，并不再进行任何旋转。

佩拉(9;3)的表现与萨恩完全相同。一个集合中包含学校建筑物等，且进行了正确地旋转，另一个包含护理学校等，只是把它们从后面移动到了前面；第三个集合包含普莱恩等，简单地画出了他透过窗户看见的景色。

上述实验结果是所要讨论问题中的一小部分。我们关注的是这些儿童能够旋转有限集合的物体，但是当物体包含更多的子集合时，儿童就变得不知所措：他们或者会把假设的观察视角和真实位置相混淆，或者忘记从两个方向进行旋转。

总之，我们已经探讨了三种类型的行为。在所有的情况中，处于第3A阶段的儿童

开始显示出客体协调的迹象,但这种能力并不足以促使他们建构出一个包含所有部分的有系统的整体。例如,当要求他们对位置变化进行组合,整合不同的路标以及通过改变自身的视角旋转平面图时。这些结果与其他研究结论完全吻合[①]。

第四节　亚阶段3B:完全知道路标坐标,位置变化表征完整

根据我们以往的研究结果[②],我们有理由预测,处于第3B阶段的儿童能够以一种与两维坐标系相融合的方式建构格式,不过各种各样的间距并不总是彼此成比例。虽然在早期的研究中,研究者会要求儿童画出摆放在他们面前的模型的平面图,然而,现在他们不得不根据记忆进行建构,在儿童对这两种过程的探索中,我们可以观察到在亚阶段3B他们获得了完全的协调能力。

阿拉(8;3)　想出了24个不同的部分,并摆放正确。现在,研究者又拿出一个新的物体,要求他建构一个包含较少关系的子集合,他每一次成功完成任务都是因为能够立刻将子集与主平面图整合在一起。例如,当他移动汽车展览馆时,说:"这里是阿尔沃林荫大道,那里是普莱恩,所以,汽车展览馆必须在这里。"而对于卡鲁日,"这里是阿尔沃林荫大道和普雷斯拉波斯特,因此接下来卡鲁日必须出现。"

尼(9;6)　在他的平面图中成功地组合了20个不同的成分,而且更加值得注意的是,他能够完美地进行协调,尽管他画出的代表学校的矩形与纸的边缘不平行。他的构图以阿尔沃河为基线,阿尔沃河弯弯曲曲地从左边一直延伸到纸的顶端。这形成了他能够准确呈现整个平面图的一条基线。

施塔(9;10)　画出的平面图非常详细和准确,但是在重新画普莱恩普莱恩斯时,却遇到了特殊的困难。对于每一个他所想要展示的细节,他都必须从庞特阿加西亚斯重新开始,因此他必须回描整个旅程直到到达他试图定位的特定的地点(教堂和伦德玻恩特等)。

在描述他们旅行的过程中,儿童再次说出了一些连贯的整体故事。

波尔(9;11)　这样描述从学校到普雷斯纳沃的路线:"*这里是雨果森格大街,阿尔沃林荫大道,孔塞伊热内尔大街,接下来是普雷斯纳沃*。——你有没有漏掉什么东西?——*哦,是的,巴斯塔恩,在那儿。在那边是剧院和博物馆*。——普莱恩在哪里?——*在那儿,有一条路通向萨克雷。你朝着那个方向走,就能到达普雷斯纳沃*。"诸如此类。一步步地,他的平面图扩展到了阿尔沃河附近,并且他指出了河流前进的方向。因此,最初作为概要性平面图的路线最终变成了这个地区的总体

① 皮亚杰,《儿童的空间概念》第十三章、第十四章、第八章。

② 同上,第十四章。

性地图。

作为比较的最后基础，下面是三名儿童对学校平面图进行180度旋转后的反应。

阿拉(8;3) 在两个维度(左右和前后)上旋转教学楼时没有表现出任何困难。他继续把雨果森格大街放在学校的上方，并与学校的正面平行。在向右移动护理学校和网球场之前他犹豫了一下，“不，阿尔沃林荫大道在这边(把它移动到左边)，护理学校就应该在这边(右边)……”

尼(9;6) 在面对最初的平面图时用相同的系统性方法解决了这一问题。首先，他旋转了学校，然后他画出了通向学校的三条路。接下来他画出了操场、河堤和阿尔沃河。他解决了遇到的每个问题，一直坚持到把整个平面图中的物体都旋转完毕。

波尔(9;11) 从旋转教学楼开始，画出了小木屋、咖啡馆和花园等，所有这些建筑物都放置在主入口的对面。然后他依次把护理学校、网球场和码头上的一所房子从左边移动到右边。接下来，他横穿到平面图的左侧，画出了一片房子和营房。延伸到阿尔沃河和普莱恩后，回到学校的入口处，至此，他的平面图就完成了。

这些儿童的反应与处于较低水平儿童的反应存在显著的差异。最初，儿童能够从起点开始把区域图作为一个整体构思出一种拓扑学格式，即使在这一区域中某一物体与子集没有关系或是在他的平面图中增加一些部分，他都会毫不犹豫地把这些不同的部分融合在一起。儿童通过两种互补的方式获得这种协调性。有时，儿童会根据不同地点之间的关系将几个部分形成一个集合，例如阿拉；有时，儿童会像施塔一样选择一个或多个共同的起点并重新建构从起点放射出去的路线。最终达到的结果总是一个协调性的整体平面图，不过这种协调并非总是与纸张的边缘平行，因为儿童可能以画出的一条倾斜的代表阿尔沃河的直线为基线(例如尼)。

位置的变化同样也需要在一个参照系统中进行描述，处于亚阶段3A的儿童确实是这么做的；但是与亚阶段3A的儿童不同，亚阶段3B的儿童使用一个单独的综合性集合来代替许多相互依赖的子集合。综合的集合结构与局部协调之间的差异非常明显。首先，儿童能够将任何一个部分与所有剩余的部分相联系，因为相互关联的本质使得他们能够通过不同的路线到达同一个地点。在位置变化领域，关联性是比较迂回的，相比于在动作水平上理解这些关联性，想要在表征水平上掌握它要更困难。因此，波尔画出了两条相互分离的路线，两者在普雷斯纳沃汇合，但是它们之间非常协调。其次，儿童可以逆推对位置变化的描述，这再次说明关联性极其重要；换句话说，儿童发现想象一条反转方向的路线与最初建构这条路线一样容易。旋转实验完全支持了这一点，在实验中，儿童能够领会改变观察者角度的隐含意义，包括左右反转和前后反转。

第五节　结论：坐标系和位置变化集合，对空间关系的自我中心态度

前面起始的研究包含了对参照系的详细解释和位置变化集合的逐步发展过程两个部分。在以往的探讨中，我们对待这两个部分有所区别[①]。当前实验中有两个结论对于探讨欧几里得度量在儿童身上的发展过程非常重要。

首先，儿童不断增长的将位置变化描述成一个综合集合的能力与他们逐步建构参照系或是坐标系的能力紧密相关。在一项早期的探讨单一维度运动的研究中，例如直线运动，结果发现，儿童对“位置顺序”[②]的运算与其对“位置变化”[③]的定性运算是完全相同的，因为后者在本质上只是顺序的变化。然而，我们想强调的是，作为等级顺序改变的位置变化暗示着一种参照系统的存在，不仅对应着位置上的物体，而且也对应着一个由地点组成的“系统”[④]。这些地点被认为是永久性的。我们从客体的角度定义这些地点，而它们本身是静止的，并没有包含在物体的位置变化中。在此想要陈述的事实仅仅是这一结论的扩展，但是因为不再需要解决线性顺序的问题，而是面对两个或多个维度的系统，我们发现没有协调的坐标系，客体参照系无法形成。

我们也发现，每个水平中儿童建构拓扑学格式的能力与他们努力描述特定路线的能力之间存在一种紧密的心理学层面的关系。这两个过程中包含的运算是相同的。参照系统是定性的，因为儿童在画平面图时并不需要测量距离，也不需要准确的比例。通过逻辑乘法的加工，他们能够形成自己的格式，格式中包含的基本关系是客体的等级顺序，它沿着两条协调的轴向前发展[⑤]。从一对一相关联的角度通过逻辑乘法，儿童能将非对称关系进行组合。但是这种能力受制于地点或者被认为是静止的客体，因此需要为运动提供参照性框架。儿童也能在质的层面理解位置变化，因为他们不能测量走过路线的距离。这其中涉及的运算系统仍然是包含两个维度的逻辑乘法中的一种，但基本的关系是等级顺序的变化，这种变化可以是运动的物体，也可以是与协调的参照点有关系的人，而不是静止的、参照点本身的等级顺序的变化。虽然如此，我们仍然能够合理地推测，这种加工过程在数学层面上是一个“集合化”的过程。因为，很显然，处于亚阶段3B的儿童能够测量不同参照物体之间的间距以及位置变化过程中所涉及的距离，即使他们并没有在一个特定的度量系统中参照外在的物体。然而，集合化过程比测量

---

① 对于参照系的详细化，参见《儿童的空间概念》第十三章，第十四章，对于位置变化的集合，参见《儿童的运动和速度概念》第一至五章，尤其是三、四章。

② 法语：placement。

③ 法语：de' placement。

④ 法语：emplacement。

⑤《儿童的空间概念》第十五章，第五节，第六点。

过程更加基础，正是通过集合化过程，儿童才能够建立起参照系统以及旅行中包含的位置变化。集合化过程与测量过程之间应该存在紧密的一致性，这一点几乎不会让人吃惊，因为其运算过程是相同的，无论它们是参照固定的点还是位置的变化。而且，数学家能够理解它们之间的关系，因为位置变化中所包含的六个系数直接与坐标系的三个维度相关。数学家只是简单地把非定量的事物转化成定量的事物，而在这一转化过程中已经暗含了量化的可能性。

理解位置变化集合与坐标系之间的紧密演变性联系对于当前的研究非常重要。因为对于一个涵义明确的位置变化集合而言是不需要测量的。如果认为测量的基础是一些细小的动作，不再需要精确的集合化过程，那么这样理解是错的，当我们探讨年幼儿童完成测量任务的方式时，就会明白为什么是错的。例如，年幼的儿童不会使用带有单位的量尺，因为不能从一个他们最后到达的确切的点开始测量。如果不包含动作集合化的测量不存在，就说明测量过程暗示着一个坐标系的存在。我们需要全面理解这种暗示性信息。例如，在下一章中我们将会观察到，如果两座塔的塔顶处于相同的水平面上，那么儿童会认为这两座塔高度相同，而忽略掉两座塔基座的高度。除非要被测量的距离和测量规则所包含的运动在某种程度上与坐标系的要求保持一致，否则测量将是无效的，即使测量只包含单一维度，情况也是如此。

这一起始性的研究也引出了另一个值得强调的结论。在成长过程中，儿童对位置的变化可以形成集合并暗示着一种参照系统的存在等概念的理解逐步深入，而且这些概念是可逆的。因为儿童最初是用一种原始性的自我中心态度来看待空间关系的。这确实是我们在视角协调和映射关系研究中所观察到的结果（第八章）。运算化集合是位置变化的协调性格式和坐标系这两者的根基，同时这两者也构成了测量的起始点，然而运算本身并不是一个进行简单加法后的结果。它们不是对各种本身都有效且能进行加减的关系进行求和运算，它们是对整体进行构造的结果，这就使得儿童能够完全反转他/她构造的关系类型。因此，为了理解儿童空间概念的起源，尤其是如何在空间中进行测量，我们需要再次探讨儿童的自我中心态度是如何影响其集合化过程的。

在前面的例子中，儿童的回答已经很好地说明了这一点，无论是描述位置的变化还是画出城镇的平面图，从他们逐步获得知识的累积过程中都可以看到这种影响的发展变化。一个4岁的小男孩儿被他的妈妈带到学校，他只能注意到学校、自己的家、“充满惊喜的房子”（拐角处的百货商店）以及剧院（普兰帕雷斯的普莱恩旅行马戏团）。他能画出这一区域的平面图并说出研究者要求他指出的几个参照点，能够根据平面图解释他的旅行路线。一个7岁的儿童可能知道几条路的名字，有些路是自己一个人走的，它通往学校，还有些路是与家人经常走（主要是散步）。因此他能够描述一些不连续的路线，画出展示许多不同区域的平面图。到了9岁或10岁，儿童像成人一样自由，可以在城镇内随意漫步，因此他可以圆满地回答所有的问题。

然而，想要促使这种发展变化出现，仍然需要许多事实证据的支持。一个4岁的儿

童看见一个物体沿着一条直线运动,另一个物体沿着一条有角度的曲线运动,他会完全基于这两个物体最后到达的地点来判断这两个物体所经过的距离[①]。当面对一条直线路径时,他们无法明白从两个方向测量两点之间的距离会获得相同的结果[②]。如果将注意限定在当前的研究中,我们可能会问,为什么4—7岁的儿童不能对平面图进行180°旋转,虽然他们已经非常熟悉学校的样子,无论是从操场来观察学校还是从大街上观察学校。我们可能也会问,到了9岁时,佩尔认为有两条"卡鲁日大街",仅仅是因为他住在这两者距离的中间位置。我们可能会问,如果一个山民从来没有离开过自己居住的山谷,他会发现估计距离比较困难。我们可能会问,从亚里士多德到哥白尼,再到牛顿,从牛顿再到爱因斯坦,空间度量的概念为什么要经历这种基础性的转换过程。

总之,知识的增加不是单纯的积累过程,在4岁到10岁之间,儿童获得了大量的关于其所生活区域的信息,据此形成格式并进行协调。格式的形成是一个极其复杂的加工发展过程。在儿童不断实施自身动作的发展过程中,他们逐步对从中学到的空间关系进行去中心化过程,并将这些关系转换成一种可以与其他关系进行合并的形式,不需要儿童自我作为中间的媒介,因此,他们自身的动作可以作为一种成分整合进一个独立的系统中。从自我中心的角度出发,即认为动作和位置的变化仅仅是朝向终点方向的运动,因此,根据经验来说它是不可逆的(例如从家到学校的路程,从学校到家的路程,这两个终点之间不能进行基础性的比较)。发展的第一步需要儿童理解起始点之间的关系,这些关系打破了儿童原始性的运动直觉,也是客体参照的开始。很长时间以来,运动仅仅被认为是一种朝向特定方向的运动倾向,参照的物体仅仅被认为是一种附属物,不能起到任何客观的协调作用,这只是因为旅程本身还没有去中心化(第2阶段)。虽然如此,起点和终点之间的联系向我们展示出协调性的第一个发展阶段,并且为儿童再次思考旅行本身铺平了道路。旅程被看作是终点之间的对称性间距,这些终点通过顺序关系和位置的变化相互联系,而这些是不对称的。后来,儿童逐渐能够领会一些不以自身动作为中心的物体之间的关系,这使得他们能够逐步对位置的变化进行反转,最后,能够清楚地区分固定参照点和移动的人和物之间的差异。儿童在第3阶段的初始阶段达到这一水平,此时他们认为旅行是两点之间的距离。现在,以自我为中心的关系开始让位于以客体为中心的关系,儿童最终会将自己看成一个在固定参照物框架中、正在他人中间移动的物体。因此,我们开始观察到儿童能够客观对待欧几里得空间[③]。

儿童重构位置变化发展的能力,在几年后开始发展起来。虽然如此,这种能力仍然与早期感知-运动水平的发展过程是相同的,在感知-运动阶段,儿童开始能够在动作领域内处理位置的变化。在起始阶段,儿童认为位置变化与自身动作所导致的及时性后果相关;在末尾阶段,儿童则将自身动作看成是在包含固定物体的框架内可能发生的位

---

① 《儿童的运动和速度概念》第四章。

② 同上。

③ 《儿童的空间概念》第十五章,第五节。

置变化网络的一部分。末尾阶段的表现与起始阶段完全相反。在第一阶段进行位置变化的表征时,我们发现儿童在表征关于空间时存在自我中心性思维,这与儿童在第一阶段婴儿期时处理变化的表现相同。但是这远不是一个确切的,而是一个关于即将到来的客观视角的不完整的复现。诚然,在其他范围的人类知识中,智慧开始于一种无意识的自我中心视角,是一系列没有根据的中心化思维的聚集,会阻碍集合化过程的发展,因为它会导致不可逆转的同化过程。克服自我中心观点,从定义上我们可以说是第一个必要的对关系进行逻辑整合的过程(反转组合)。去中心化加工最后会到达一种逻辑集合和数学集合的平衡状态。在空间概念范围内,主要的逻辑结构分类包含如下特定的特征:以可逆性出现的基本的平衡准则;无论动作的方向如何都能够确定一条特定的路径;逻辑特点变成空间特点,也就是说,那些使得我们对于任何一个给定的起始点都能够给出一个稳定和固定位置的直接和反转运算的产物;关联性使得迂回路线成为可能;传递性使得我们能够将不确定集合中的多种运算结合在一起。

位置变化集合的智慧表征与参照系或坐标系同时出现,这其中没有任何的巧合性因素:因为这两者都依赖于集合的平衡过程。

这就是平衡的形式,也是去中心化的最后阶段,自此,中心化开始让位于集合化过程。正是这种平衡,构成了明显偶然的时间性巧合的位置变化集合的基础,它们发生于智慧表征中,参照系或是坐标系中,也就是这些变化所参照的事物。测量的发展开始于这种去中心化的加工过程,在当前的研究中可能展示得更加明显。只要儿童的空间概念是自我中心化的,它就仍然是儿童自身的指导准则,因为他无法形成协调的参照系,也无法对位置的变化进行集合化。结果,客体直接被根植于知觉情境中的自我中心概念所同化,因此,测量是不可能发生的;确实,它是难以构建出来的。测量开始于一系列逐步符合协调和集合法则的系统化比较过程。

徐晓惠译,朱莉琪审校

第二章 自发测量[①]

在第一章中假定,儿童没有测量的概念只是因为儿童没有对位置的变化进行正确的表征,除非位置所产生的空间可以由参照系统或者坐标体系进行组织。这是因为,本质上测量是一种运动的形式,包含了确定一种测量规则,能够测量任何被测量的物体,以及将物体转化为很多细小的单位之后仍能够得到整体。这种假设可能看起来有些夸张,拿一个例子来说,有一把一英尺长的尺子,上面刻着英尺和英寸的刻度,直立靠在一面墙上,我们不会去想这个尺子是怎么来的,我们的思维具有基本的测量操作。例如,移动一个刻度恒定不变的度量尺,这就需要假定木棒没有改变它的长度。但是我们都知道一英尺长的尺子是以前实施运算的最终产品,这就意味着研究儿童如何使用现成的英制尺没有什么意义,而我们探究他们制作自己的英尺或者度量单位的方式将具有很大的意义,尽管这些方式在一定程度上是粗糙的,且仅仅做一时测量之用。

对这些初级测量单位的研究表明,在一系列的连续直线中,测量单位的连续性由那些能够以必要的方式转换单位的人所创造,就像英寸不需要用来测量墙的长度,除非能够准确画出测量高度时的位置变化。当一个单位物体从一个位置移动到另一个位置的时候具有长度守恒,读者应该发现较小的儿童不能明显地注意到守恒,事实上,这也说明了一种初步的建构(见第四章)。另外,长度的守恒是欧几里得测量的一个基本条件。另外,除非个体能够组织位置的变化,将它们与一个坐标空间系统相联系,否则个体不会意识到沿着一条垂直线上的一系列单位的重要性,个体也不会想到当一个单位物体移动时必须有长度的守恒。至少有一点是明显的,这种测量概念的演化包含多种多样的迁移,同时也值得仔细研究。

基于这个原因,本章首先是一个引子,将致力于自发测量的研究。考虑到现有的测量已经非常完美,度量的过程会有许多内隐的因素在里面,我们的任务必须考察在形成阶段的测量行为,因为只有以这样的方式,我们才能对成为测量的心理建构部分的运算进行准确的评估。接下来的一些章节将给出对这些运算的详细的研究。需要记住的是我们的研究首先是心理学中的研究,而不是逻辑学的,即使在后面的研究中可能会偶尔使用一些合适的公式用来阐述在心理发展过程中掌握的一些运算的结构。尽管在对测量所预示的现象进行逻辑分析之前,我们能够很容易达到测量的条件,但是不知道这些

---

① 与Mme Beatrice Begert-Demetriades合作完成。

运算性的条件是否对应于之前在实践中实施的运算，或者是不知道哪个测量的运算条件是最重要的，除非在儿童发展的进程中考察测量的起源。

对自发性测量的研究产生了一个问题，一个我们在对待一组位置变化的表征时没有遇到过的问题。位置变化的表征主要是迁移行动中的内在运动元素，使得它符合一个坐标系统，而测量的建构基本上从知觉比较中得来。这并不是否定运动的坐标也包含知觉，也不是否定在测量运算中存在一个运动元素，事实上在知觉比较中产生了自发性的测量。但是必须要强调，在相当长的一段时间里，儿童满足于视觉比较，只是在后来想到了将物体彼此放在旁边来检验他们的评估，然后能够提供一个关于公共测量的测量规则的概念才慢慢出现。不管测量是直接从视觉比较上得来的，还是视觉比较的不完整性导致了测量，我们都面临着一个知觉心理学上的问题，知觉测量是如何与运算测量相联系的？

当看两个物体，比如两根直的木棒，为了比较它们的长度A和B，确定哪个更长，我们会采用一种视角测量，德国人叫目测（augenmass）。这种视觉测量包含两种基本的元素：首先是一个物体朝向另一个物体的虚拟运动，将两个物体稍稍放在一起，伴随着我们视觉焦点的真正的迁移，这种虚拟的结合我们叫作迁移（transfer）[①]；第二个视觉测量的元素，当物体对比起来不相等的时候出现，是对更大的物体B进行两部分的分解，以至于一部分与A相等，另一部分是留下来的A'，可能接下来在A和A'之间有一个比较（同样采用迁移的方式）。比如这就能得出结论：假如$A=A'$然后$B=2A$。所以，即使在感知评估上我们也发现了再分和位置的变化，这实际上就相当于测量。然而，一般来说，知觉测量是不准确的，仅仅是接近，不准确属于心理错觉或者是系统误差。现在一个成年人，尽管他可能对视觉错觉的准确本质不熟悉，但是也能非常好地意识到知觉评估经常具有误导性；以至于他们对于自己的判断有一些保留，特别是当物体比较起来差别很大或者在大小上差异很大，他们都可能认为是相同的。那么我们就要问，儿童是否也从最开始就意识到这些限制呢？假如没有，他们怎么会一点一点儿地学会了不相信他们的视觉评估呢？特别是，我们可能调查哪种知觉迁移对他们是可以接受的，他们如何在可允许的迁移以及其他的几乎确定会导致错误的迁移之间进行区分呢？同时这里要指出的是，测量、位置变化的聚集以及坐标系统之间的关系是明显的，即使在知觉比较领域中也是一样的。因为这是清楚的，儿童只要没有利用坐标轴组建他的空间的概念，就不可能以任何的方式限制视觉比较（这就意味着，偶尔在某些方面，视觉比较在年幼儿童中比在年长儿童中甚至在成年人中更加准确）[②]，而当学习了在三维空间中定义空间坐标后，他需要新的测量方式，这种方式大部分代替了视觉评估的位置。

---

① 法语：运输 transport. 参见 Piaget et Lambercier, "La comparaison visuelle des hauteurs à distance variable dans le plan fronto-parallèle." Arch. *PSYc/lol.*, vol. XXIX, p. 173.

② 参见 H. Würsten, "L'évolution des comparaisons de longueurs de l'enfantàl'adulte," *Arch. Psychol.*, vol. XXXII, p. 1.

我们可能会合理地猜想知觉"迁移(transfer)"是一英尺长尺子运算运动的起点或者是其他比较距离的时候标准测量的运算运动的起点，包括与虚拟迁移相比公共测度的真实运动。假如我们考虑儿童的另一种行为，那么以上的假设就更加合理了。这种行为是，当他们第一次摆脱在距离上的知觉比较的依赖行为时：有时在能够想象第三个物体的运动充当中间媒介的时候，想将要比较的物体放在一起。另外，假如这个假设被证明是正确的，我们将期望，一旦运算完成了，这将会对知觉活动产生一个回溯影响，就像在平行线领域和角间距领域(angular separation)(《儿童的空间概念》第十二章，第一节)中的概念影响知觉一样。而事实上我们应该看到，一旦个体掌握了使用移动式的一英尺长的尺子的时候，这可不是很容易达到的，真正的运动会反过来影响知觉迁移。这意味着从那时起，儿童对于知觉迁移的本质具有有意识的见解，因此也可以更加有效地使用它。一个与知觉再分类似的问题是，一条直线中点的知觉评估：假如一条直线的二等分线是通过中点的知觉评估得来的，我们发现测量对它的知觉上的表现具有回溯性的影响。

像这样一些从自发性测量研究中产生的一些问题，表明测量、位置变化集合以及坐标系之间的联系的重要性。我们不可避免地产生了这样的假设，这种联系根植于整个的演化过程，是从知觉转变作为唯一的比较方式(将物体聚合在一起，采用另一个物体作为一个共同测量度量，最终建构单位)到通过逐步地运动测量任何的距离(例如单位循环)的演变。一开始，对较远物体的比较是知觉的和直接的，因为位置变化的表征仍然是未聚合的，对空间的表征也没有通过坐标系统形成。当这个过程完成了，就意味着位置变化形成组，空间形成结构，我们发现测量就顺理成章了。这意味着单位的概念能够在三维空间中被无限制地重复，同时这也是逐渐地从对再分本身以及使用可移动物体作为普遍测量的掌握过程中发展过来的。

第一节　方法和结果概要

展示给儿童看由12个积木(立方体及六面体)组成的塔。塔高80厘米，放在一张桌子上。要求儿童在另一张桌子上建另一个类似的塔。指导语避免任何测量的提示，主试采用语句如下："你要建一座高度和我的一样的塔。"或者就简单地说"和我的一样"。为了不让儿童每一步都采用类似的积木，这可能导致只是一一对应的做法，我们给儿童的积木更小，但是这些积木足够他搭一座同样大小的塔。告诉儿童在另一张桌子上搭积木，但是离之前的桌子2米远，比之前的桌子低90厘米。这是为了防止儿童满足于视觉置换。在模型和儿童搭积木的桌子之间竖立一块屏障是明智的做法，但是他能够随时想看模型就看。屏障帮助主试记录物体真实的迁移，以及公共测度的使用，而这也没有妨碍视觉比较，这些年幼儿童知道没有其他方法。无需多说，儿童具有比它需要的更

多的积木，也给他一定量的纸条或者板条。但是，绝不会从一开始就告诉他怎么用这些材料，只有当他的自发性努力消耗殆尽时，才告诉他使用这些纸条或者板条。

被试的应答表现出三个主要的发展阶段，每一个阶段又可以分为两个亚阶段。第一阶段，包括4岁或者4岁6个月的阶段，知觉比较(*perceptual comparison*)是模型和复制之间比较的基础。这个时候没有公共测度，在高度的比较上，没有任何东西移动除了视线。所以视觉迁移是两个物体之间仅有的比较基础，儿童事实上没有想过移动两个物体当中的任何一个。在这个阶段，我们可以将其分为两个阶段：阶段1A，复制是概括性的和融合的；亚阶段1B，有证据的分析性估计。

在阶段2，从4岁6个月或者5岁直到7岁，物体在测量的过程中移动。例如，存在位置的改变。有时，问题中的物体是其中一个被比较的物体，有时它是第三个，预示着公共测度的出现，但是还没有运算性传递。在亚阶段2A，阶段1的视觉迁移特征受到我们认为的手动迁移的补偿，通过这种方式，我们认为被比较的物体集合地更加紧密，以至于尽管比较依然是视觉的，但这种比较不再是远距离比较，而一个由临近的物体组成的整体的评价。亚阶段2B标志着一种有趣的发展，它减少了知觉在其中的最高地位。儿童现在使用一个中介术语，但是依然不是一个独立的公共测度规则，因为不是采用第三方的材料来使得他们能够复制模型，而是采用自己的身体。有时是他们手掌的长度，或者是手臂的长度，有时使用那些看起来不太可能采用的身体参照(比如肩膀等)，用来从一个物体向另一个物体进行距离迁移。很明显这些方法是手动迁移(阶段2A)的遗留，就像手动迁移是视觉迁移(阶段1A和1B)的遗留一样。早期儿童移动物体本身，现在他将其迁移为理解身体的姿势，包括他的手或者是手臂，因为他希望这样的姿势能够测量一个物体的长度。这个行为的模式，阶段2B的特征，我们将其叫做身体迁移或者是物体模仿。模仿是象征和图像的先兆。一个公共测量的使用因此必须具有它在视觉和手动迁移上的源头，在最初的成分中，知觉和运动都产生了表征图像，表征图像授予一个符号价值，首先是儿童自己的身体，然后是任何中立的物体，以至于这些都代替了原始的迁移。

因此阶段2的最后的特点是在阶段2B和阶段3A之间的行为。这里我们发现，儿童不是用他们自己的身体，而是用一个符号物体(symbolic object)来模仿尺寸，我们也看到他们从对模型的复制中移动这些物体来比较他们的长度。尽管这很清楚在测量的发展中是一个决定性的转折点，但是说它就是正确的公共测量是错误的，因为使用这些符号物体作为第三方物体具有很严重的限制。它们实际上就是符号，因为它们或者从复制品中模仿而来或者从模型中模仿而来。实际上，有时我们发现儿童会使用第三个物体来衡量第一个塔和第二个的长度。经常会有一些其他的物体与这两个塔的高度都相同，这种模仿非常常见。如果第三个物体或者更大或者更小就会被认为没有用，因为它不能让儿童进行区分，而且他们很少知道如何使用一个小的物体，通过一步一步接近需要的长度来测量。

接下来重要的一步发生在当直觉从最初的知觉和后来的图像变成了真实的运算时。一项运算的中间环节是一般的逻辑准则的表达式：$A=B$，$B=C$，所以$A=C$。这就区分了阶段3的特征。我们刚刚描述的中间行为是这一步的先兆。实际上，迁移现在是运算性的，因为它是逻辑的传递。然而，迁移只是两个测量方面中的一种，它对位置的变化产生影响，因为它导致了长度守恒的识别。另一方面就是再分，只是当再分也掌握了之后，儿童才能形成单位值，同时在需要的时候重复。现在公共测度的再分和位置改变的融合在阶段3发生了，同时也有两个亚阶段。

处于亚阶段3A的儿童采用一个中间物体，这个物体比后面的物体大，因为后面的物体不只需要一次。考虑到"更大"的规则，他们区分出需要的长度，迁移的时候记住它。但是在亚阶段3B时，儿童能够采用一个与更大的一样好的更小的中间物体。他们也对需要的长度做一个标记，但是当尺子太短的时候，他们也会进一步延长它(除非他们对差异的视觉评估感到满意)。这预示着最终他们学习使用了任何物体，无论什么都可以作为一个公共测度尺子，甚至是一个比他们要测量的东西小几倍的物体。这样的物体只要有需要就会用到，这与分派一个单位值到给定的长度然后重复它是等价的。测量的获得因此是细分及位置变化的合成物。

应该注意到，这些阶段及亚阶段不仅仅是达成水平的时间顺序的排列，它们中的每一步标记着一个与之前的步骤的重新组合，儿童在任何给定的亚阶段里的行为都不能包含那些属于下一个亚阶段的行为。

第二节　阶段1：直接的视觉比较，迁移是纯粹视觉性的

到达第一阶段的标准是只采用视觉比较。有时会产生一些微妙的问题。任何个体，不管年龄多大，当在准备测量之前比较高度时，都会很容易地进行一个视觉评估。他是否继续测量将依赖于他对自己知觉评估的自信程度；假如知觉评估是基于一些很明确的参照点，他可能不会再进行测量了。因此我们不能说在阶段1的个体很简单，因为他开始于一个视觉评估，或者甚至是因为他不能再继续测量。我们能够说这仅仅只是，a)他夸大了他的视觉评估的可信度，以及b)他不同意任何其他更加准确的程序，可能是因为他不会运算，所以会运用公共测度甚至采用身体迁移，或者是因为他不知道需要进一步测量，这可能需要运用手动迁移。

但是，需要加入两个更深层次的观点，从而弄清楚这个双重标准的意思。首先，经历过阶段1之后的一段时间，许多儿童会对他们的视觉评估过度自信，尽管在同一时间里，他们非常愿意采用手动或者身体迁移；他们简单地认为视觉评估会更加准确，并且用它来检测另一个实际上更加精确的程序的准确性。然而，由于他们想尝试一下附加的方法，他们不再停留在阶段1。第二，阶段1的视觉迁移必须起于一个比较模式，这个

模式是整体的、融合的，以至于复制模型这个任务呈现出最大限度的困难性。因此阶段1B的细节性的视觉比较是本身巨大的变化之前阶段1A的汇总，在2岁和3岁的时期具有，有的时候甚至出现在4岁，这标志着分析比较的开始。因此，我们几乎不会惊讶儿童首先还是会倾向于更加信任自己超过公正本身，因为他们的思维依然受到对知觉的自我中心化的态度的影响。尽管如此，我们需要分开这些多种多样的对这个趋势有影响的因素：最重要的是我们需要理解为什么这个趋势如此灵活地反驳了那些在每天生活经验中都会出现的证据。当儿童发现在复制模型塔的时候具有很大的困难，甚至当视觉比较依然未分化的时候，我们开始给出一些我们在儿童水平1A时发现的比较性的阐述。

李(3;10) 被告知复制一个简单版的塔："你要搭一个差不多相同高度的塔。——*好的。*"她将两块积木并排放在一起形成一个基础，然后加上一些更小的积木，说："*就是它……大……大。*——它真的和另一个一样高吗？——*嗯，我刚刚放了这个小的在……它正在变大，它好可爱！*——是啊，但是你的和我的塔是一样高吗？——*是啊，你刚才已经看到了。*"这个时候整个结构倒了。她重新开始，在某个时刻用了一个与她在模型中看到的很像的一块积木。"*给你，它是一样的，这是相同的小的积木。*"

克拉(4;1) 得到一样的指导语。他花了很长的时间看这个模型，然后在不看模型的情况下搭建自己的塔。当他完成的时候，他重新看了一遍模型，推倒了重新搭起来。同样的事情发生了三遍。"你搭的积木和我的一样高吗？——*是啊。*"给他一根小的木棍："你用这个一起看，你能量量吗？——*我不能用那个木棍，它是直的。*"第二个木棒更小，他将它放在他的塔顶端做一个装饰，说："*一样高。*"

接下来的描述属于阶段1B。对模型的复制开始指向一些尝试，不仅仅是未分化的相似性。具有一些细节的分析，特别是高度等。尽管如此，迁移绝对是可视化的。

尼克(4;2) 注视模型很长时间。他进行了一个调整的模型的配置形成基础。他加上了更多的积木。他回头看着模型塔，发现四个相似的积木紧挨着围绕在塔的周围。他移走短了半厘米的木块积木。"它们是同样的高度吗？——*是的。*——你怎么知道？——*我能看到他们是。*——你拿走这块大的积木，看看他们是否一样高。——*是的。*"他拿出木棒，将一端放在他的塔的顶部，将另一端放在另一个塔的顶部。尽管木棒不是水平的，但是他没有意识到这个，说："*看，它们是同样的高度。*"

这种使用木棒作为视觉迁移的辅助手段预示了一种行为，稍后我们将在连接顶部

时看到。

盖尔(4;6)　将他的塔仔细地放在一起，瞥了模型几次，“他们一样高吗？——*不，这个更高(模型)*。——假如我们将它和另一个挨着呢？——*它们是一样的*。——但是你能告诉我假如没有将它们放一块儿呢？——*也是*。——这里有一些东西可以用来量一量(一把尺子)。——*但是它不足够长，我不能量*。(事实上这把尺子和模型是一样长。)——你能用你的手吗？——*我知道为什么那个更高。它在更高的桌子上*。”他仍然没有量。“你能把它画出来吗？”他确实那样做了。“它是一样高吗？——*不，那个更高(模型)*。——要是要一样高它应该有多高？——*像这样高*(任意地比画)。——你怎么知道？——*因为我有好眼睛啊*。”

弗兰(5岁)　看着模型很长时间，他一边放置积木一边检查，最终正确地完成了。“它们是相同的高度吗？——*是的*。——为什么？——*我自己能知道他们多高*。——那这个大的木块呢？它帮你判断了吗？”他将木棒靠近他的塔，再靠近模型，但是没有注意到他们的相对高度。“*你的更低。木棒能知道你的是在凳子上的*。——但是塔本身呢？它是同样的高度吗？——*不，它更低*。”

马尔(5;1)　看向模型，自己搭相同高度积木的时候放置的积木跟模型不同。时不时地检查一下他的进度。“它是同样高吗？——*是的*。——为什么？——*因为我能知道*。——用这个木棒，你会更好理解。——*那么我要用它做什么？不，它们不相同因为这个*(指向一块在模型中没有对应的积木)。”

吉雅(5;3)　像马尔一样搭他的积木。“它是同样的高度吗？——*是的*。——你怎么知道？——*看这些积木*。——假如我告诉你这些不是同样高呢？——*我能知道他们是同样的*。”他调整了一块积木没有改变塔的高度。“你能想出一种方式来看看它们是不是同样的高度？——*不，我告诉你这是正确的!*(以一种很肯定的语调。)”

伊夫(5;5)　首先看着塔接着看着模型，然后开始自己搭建。“*不可能搭好。这个更高，桌子以及椅子更低*。——但是塔本身，只有塔，它们是一样高吗？——*是的，你对了，但是积木，我的积木，它们更高，椅子更低*。”我们知道他没有完成在基础和顶部之间的连接。

布朗(5;8)　搭建得非常快。他开始犯了一个错误，但是后来通过回去看模型改正过来了。“相同的高度吗？——*是的*。——你怎么知道？——*看*。——然后这个木棒呢，它有帮助吗？——*没有。你没有放一根在你的塔上，但是那座塔更小，因为它更低*(在一把椅子上)。”

阿古(5;10)　小心翼翼地放置他的积木，与那些用在模型中的积木进行对比。“为什么你会那样做？——*因为我知道它们不是同样的高度*。”他用同样的方式放置两座塔。“它们高度一致吗？——*不，因为它们不是同样的积木*。”他变化了这些积木。“现在呢？——*是的*。——你确定吗？你可以去量一量。”他走向模型那

边，在没有移动的情况下注视着它。"它们是相同的高度吗？——……——你能量量吗？——不。——假如我们把这个拿过去，它们看起来是一样吗。——它是相同的高度。——那么假如我们把它拿回来，那么它将会如何？——更小。——为什么？——因为桌子更小。——但是这个塔会更小吗？"他犹豫了一下："不，塔是一样大。"

复制模型的任务，考虑到它的结构模式以及它的整体高度，在两个水平中的一个产生了反映。在阶段1A，像李和克拉满足于大致相似。他们没有在细节上分析模型，使用的积木没有对应于模型中所使的。因为他们感知到的相似性是未分化的，他们的结构的高度只是粗略地类似于模型的高度。他们没有在细节上比较两座塔，更多地通过对模型的回忆指导他们的行为。这就是，通过一个内在模型，而不是真正的视觉迁移。这种行为模式之后紧跟着水平1B，这些基础等待着最后的测量的出现。现在儿童趋向于分析模型，一边建一边看。所以他们频繁地复制它的真正的维度，特别是它的长度，而不是限制于一般的形状。这种分析的过程以及对应元素的建造是视觉比较分化的基础。也是在这种情况下，后者开始发展。

一个与马克·郎伯西尔（Marc Lambercier）合作的资深作者所做的关于儿童和成年人的高度知觉比较的研究发现：1）4—5岁的儿童，很难达到实证的精确性，因为他们的回答趋向于是想象出来的，准确地说是因为他们不能分析感知到的东西。2）5—7岁的儿童，实际上成人也一样，根据要比较物体的角距不同，反应也不一样。当仔细比较他们的表现，作者简单地建立了一个完整的解释（虽然存在一些眼动数据表明有限的迁移）。但是当将他们分开来看，儿童试着将远处的物体放在一起，来"迁移"它们的高度。这第二种迁移受到知觉规则的控制，也是相当准确的。因此在比较只包括两个物体的时候，能够在统计上建立两个元素中哪一个更加有可能被迁移的可能性。①

水平1B的儿童一个基本的比较是真实发生在时间和空间中的视觉迁移的产物。真实的迁移不会发生，只要物体置于一个完整的结构当中，例如一个由连接顶端、底部以及两个塔的边缘的线组成的部分虚构图形。这样的轮廓只是纯粹的知觉关系分化的结果。迁移是一个主动过程，因此与被动的结构感知有很大的区别。它开始了真实分析的第一步，也受到知觉规则的控制，是一个有意运动行为。当儿童只是将视线简单地从一个物体到另一个物体游离的时候不能叫迁移，而只有当他有意地从一个物体看向另一个物体，不断地比较它们才叫作迁移，也就是说当看向另一个物体时，儿童或多或少地有意识地记住一个物体一些信息。被记住的东西可能偶然就会成为原始图像的一部分，但是也是非常少见的。更多的时候它只是简单的一个运动回忆，例如，一个表达形状和大小的运动框架。之前的内容我们提到迁移是一种知觉活动，知觉活动又包含

---

① Piaget et Lambercier, " La comparaison visuelle des hauteurs à distances variables dans le plan fronto-parall, " *Arch. de Psychol.*, vol. XXIX, p. 173.

了许多的分支(《儿童的空间概念》,第一章,第一部分)。这些包括主动“置换”(当迁移的东西是复杂的关系时),暂时的迁移以及暂时的置换(“定势”)以及预期的多种形式。一言以蔽之,所有那些进入到复杂图形的知觉的组合活动。所以这一部分感觉-运动在行为上的技能总的来说是贯穿于整个生命中的知觉活动,虽然是存在于知觉和运动行为的更加限制性的范围之内。

通过这些研究我们发现,视觉迁移处于后来包括手动迁移等的测量发展的起始点,也是一种独立存在的,甚至包含成人水平的每个水平上都保留的知觉现象。然而,当它保持了它的独立性特征以及其他的比较模式,同时变成了其中主要部分的时候,视觉迁移并没有保持它的不变性。它不断精细,通过知识进步不断丰富,同时这种有追溯效力的影响甚至在知觉的领域不断显现。这就是为什么儿童及时地意识到了视觉迁移以及它的机制,也因此能够更加准确地调节它,因为他知道它的局限以及它是想象出来的。视觉迁移成了日益增长的复杂的知觉置换系统的一个重要部分,也更多地在运算推理的追溯调节影响下而不断发展。这些置换或者知觉的结果最终包含在了一个真实的坐标系统的框架下。

一言以蔽之,我们应该发现视觉迁移产生了表征比较,因此是所有测量的根基,同时它也在自身特定的领域经历着更深的发展,因为更高的结构的形式对它产生了一个回溯性的影响。

水平1B,是被孤立的状态。换句话说,还没有产生手动或者身体迁移,因为紧跟后面的是那些还没有回溯性地影响视觉迁移的过程,因此它的机制还没有精细化。所以属于亚阶段1B的视觉迁移是一个原始的和基本的比较模式,甚至被纯粹地判断为知觉活动,它与更高阶段发现的视觉迁移之间依然存在基本的关系。

所以视觉迁移在阶段1的显著特点是它是无意识的,甚至处于水平1B的儿童相信他们只是明白(尼克和马尔:“我能明白。”弗兰:“我自己知道。”)或者他们只是“看到”(吉雅和布朗)或者仅仅是说他们有一双好眼睛(盖尔)。他们没有意识到当两件事情不能同时被看到时,他们的比较包括一个真实的行为,也因此开启了试误阶段。他们完全集中于物体,不是将它们集中在一起。儿童是被动的以及接受的,因此他们没有意识到迁移。

因为要比较高度的物体位于不同水平上,视觉迁移必须包含置换的元素。只是迁移塔尖到达的点是不够的,必须迁移的是一种关系。所以加入A是模型的底部,B是它的顶部,而A'和B'是复制品的底部和顶部,AB的关系必须被迁移成$A'B'$,因为A和A'是在不同的水平面上。在亚阶段1B我们发现,要么儿童没有意识到在底面上的差异,他们只是简单地比较最高点的高度,要么就是当他们注意到差异的问题时,不知道怎么去处理它。所以当尼克将木棒的一端放在模型的顶端,将另一端放在复制品的顶端,他知道从水平方向上进行标记;但是他没有意识到问题,没有做出任何努力来保持平行,同时使两个底部A和A'在同一条线上。盖尔和阿古认为其中一座塔更高“因为它在一个

更高的桌子上"或者是"因为桌子更小"。他们承认假如两座塔被紧挨着放在一起，它们可能是一样高的，这是正确的。但是他们不能用更高和更低这样的单词来参考绝对的高度，而他们唯一注意到的应该是相对高度。所以关系的迁移只是在知觉水平上存在，而在概念水平上，这只是一个简单的绝对高度的比较。阿古最终战胜了困难，这也标志着更高水平的出现，但是伊夫阻止了我们的解释："是的，你是正确的，但是这些积木，我的积木，他们更高。"弗兰通过使用木棒，发现底部在不同的水平上，但是用木棒只丈量了模型这一边，这也表明他不知道如何测量。尽管如此，就像布朗所做的，他坚持认为他的塔更低。他们当中没有一个完全掌握顶部和底部之间关系的问题。盖尔离最终的答案很接近，而阿古最终理解了。

我们推断这些儿童相信物体的高度随着它所站立的平面的高度变化而不断变化。这种观点可能在有限的实验特征下很难调整。但是在第四章，我们将再次探究本质上相同的类似的问题。我们将表明如何能够采用两根木棒，然后将他们并排放置来证明其在长度上是相等的，然后移动其中一根木棒零点几英寸，在这个水平的儿童相信木棒中的其中一根会更长，因为它投射得更远。阶段1的儿童缺少假定，在所有的测量中，什么是基础。例如，当物体移动时，什么是守恒，运动是垂直的还是水平的。接下来的三章将给出长度守恒的更详细的研究。在本章中，我们明白被试不能建立顶部和底部之间的联系，因为他们的底部在不同的平面上。这个事实表明这些儿童所缺少的关于测量的最基本的东西是什么，缺少一个坐标系统能够允许位置的变化，从而在测量中形成群组的一部分。

由于两个塔的顶部和底部在不同的水平面上，这只有通过一个坐标系统、几个平面才能够在一个相同概念上进行理解。在上一章表明，位置变化群组的表征和演变一个坐标系统的能力是相同过程的互补的两个方面。因为缺少面对这样问题时的处理能力，他们知道塔放置在不同的平面上，所以不能对其进行比较。另外，就像第三章和第四章中所讲的那样，显而易见，长度或者距离本身的守恒需要一个坐标系统，因为守恒包括位置变化的群组。这就解释了为什么甚至当两座塔并排放置以至于他们能够看到是一样高的时候，只要塔放回原处，他们也不能确定是否两座塔一样高。

这些结果特别有用，因为它们表现出儿童如何能够依然进行有效的比较，哪怕他们完全依赖于视觉迁移。只要被允许保留在知觉水平上，他们都会在进行比较准确的朴素比较上有一些困难。只是当被问到是否确认自己的判断时，他们才意识到塔放在了不同平面上的事实。所以这只是在概念水平上，他们经历了失败。实际上，年幼儿童缺少使用坐标系统的经验，知觉比较比年长儿童更加容易，同时经常会更加准确。这些结论已被其他证据所证实。我们发现较小的儿童看到倒置的图片，他们经常做镜像描绘。在实验室中，我们发现他们比成年人在比较非平行线上(斜率不同)做得更好。[①]另

---

① 参见 H. Würsten, op. cit.

一方面他们在评估斜率的度数的时候会表现更差,这是因为他们的空间知觉是没有组织的。这就解释了为什么在水平 1B 上,儿童更加倾向于完全依赖于视觉迁移而不是建立对应的两个物体各个部分的对应关系。在概念水平上进行比较的时候,他们受到平面差异的阻碍,也同样受到他们不能理解长度就是两个端点之间的一种关系的影响。

一个坐标体系的逐渐增长具有弱化物体之间长度的知觉比较的功能,这些物体要么是不平行的,要么在不同的高度上。在另一方面,运算性比较方面的增长具有一个回溯效应,甚至在知觉方面,也使得它差异更大。

在阶段 1,视觉迁移的运算是无意识的。坐标关系的置换是不可能的,因此解释的错误也是显而易见的。在这个阶段的比较是一种同化,没有通过测量规则或者是空间的结构中介。儿童实际上没有意识到空间。因此儿童对于他的视觉评估盲目地相信,也不期望知道更多的测量的准确方式。没有一个儿童试图将塔移得更近一些或者通过手或手臂进行测量。同时也很少有儿童寻找其他的东西来测量。仅有的看的动作是他们都需要的,实际上,我们发现他们的视觉迁移经常惊人地准确。他们也非常自信,因为完全没有意识到在两个物体之间空出来的空间。仅仅是通过看的动作,儿童只是完成在物体之间的联结,以至于一个物体直接与另一个物体进行比较。他因此免除了客观测量规则的使用,也免除了对空间的组织。

第三节　阶段 2:首先出现了位置的迁移,亚阶段 2A:手动迁移作为视觉迁移的辅助

测量中包括的运动必须是整合在一个坐标系中的。这就是我们从阶段 1 对回应的分析中所得出的结论。没有这样的坐标系统,比较纯粹是知觉的。位置变化的集中提供了参照点之间的联系,同时因此让个体能够建构一个坐标系(第一章)。因此在测量中,比较通过位置的变化进行协调。

测量中用到的位置的变化难度水平不断增加。最难的、最高级的就是一个单位测量系统的使用;最容易的是将两个物体并排放置,确定是在同样的水平面上。这样的手动迁移简单地使得视觉迁移更加容易。接下来的例子表示一个连接手动迁移与知觉比较之间的行为中介模式。儿童使用一个有平直边缘的物体将两个塔放在一起。直边放在视线看得到的一边。尼克,在阶段 1 使用木棒从一座塔上对准到另一座塔上。接下来的儿童实际上将把他们用来测量的木棒架在两座塔之间。

山姆(5;6)　移走中间的屏障从而能使自己更好地进行比较。他首先说他的太高了,然后他说他们是一样的。给他一根木棒帮助他。他使用木棒将两座塔之间连接,然后说:“*啊,是的,它们是一样的!*”一根木棒搭在上面,但是没有考虑到底

部的差异。

阿特(5;10) 做同样的事情,但是得出了相反的结论:“不,它们不是一样的。——你怎么会这么说?——我不知道,但是它们不是一样的。”

贝(6;0) 开始一个视觉评估。移走屏障:“你将如何测量它们?——可以将木棒从这端跨到那端或者是可以使用一个人的手来联结两座塔的顶部。”他将木棒横跨塔,说它们是一样的,尽管木棒的斜率与底座的差异没有关系。其中一个塔被移到了一把椅子上。他将木棒放回两个顶端之间,然后发现,现在木棒更加倾斜了:“不,它更大。”

皮尔(5;10)说高度是一样:“为什么?我看到的—你会在看的过程中犯错误吗?——不。——你能想到另外的方式吗?——好(他将一只手横跨两座塔的塔尖,但是没有比较他的手的水平之间的差异以及两个底部的差异)。——还有另外的形式吗?”他现在说塔能够被放在同样的桌子上。

汤姆(7;1,发展迟缓) “它们不是相同的高度因为桌子更高。你能用眼睛看到。——你不会犯错误吗?——你可以将新的靠在旧的塔上面。——假如没有移动它会怎样?——你可以用一个木棒,然后将它横跨在顶端。”

这种行为的中介模式强调了只能在阶段2解决的问题的本质。儿童需要比较*AB*的高度和*A′B′*的高度,而*A*和*A′*在不同的水平上。在阶段1,比较只是未分化的视觉迁移。儿童不能表达出关于智慧关系的知觉等价性,因为他缺少一个坐标系统。这里我们发现儿童相信他们已经解决了问题,通过将一根直的木棒放在顶端*B*和*B′*之间。这是一个进步吗?

假如在底部的线*AA′*是水平的,这将是进步。假如他们建立了条线*AA′*以及*BB′*,同时能够知道这两条线是平行的,那也将是进步。最后,他们能够将他们的线*BB′*看作为一个坐标系,在这个坐标系中*AB*和*A′B′*都是垂直的,同时他们与*BB′*形成的角度与他们与AA′形成的角度是一样的。

然而,他们的行为要是这样考虑就太过简单。他们看着线*BB′*,忽略了基线*AA′*,这是他们判断*AB=A′B′*或者是*AB≠A′B′*的标准吗?*BB′*是被看作一条水平线或者是一个斜线吗?它会被看作是与塔之间的线*AB*与*A′B′*垂直的吗?这样的问题在这些儿童身上都没有发生。在阶段2中,儿童还没有掌握垂线和直线的概念(《儿童的空间概念》第十三章)。他不能说出是否斜线是平行的,除非他们感知到两条斜线靠得很近(同上,第十一章)。另外他缺少一个坐标系统(第一章以及《儿童的空间概念》第十四章),并且也不能判断一条斜线和另一条斜线的关系。我们必须假定*BB′*是一个尝试达到比视觉迁移更加准确的判断。但是它也是一个聪明的、对他们没有帮助的联结。实际上,单独视觉迁移非常有效,因为概念分析打破了知觉的整体,而让步于之前被孤立的关系。当儿童只通过参考完成的点来评价运动路径的长度或者是他们比较线的长度却只参考线的一端,或者是他们选择一条线的中点而没有参考他们的起始点时(本书的第四章和第五

章),我们就会发现相似的孤立的关系。

这里我们给出了当测量的概念基础缺失时,一种测量的意图的有信服力的说明。儿童缺少一种能力将重新建构的变化的位置作为一个整体,缺少坐标系,甚至缺少形成那些系统的基础的最基本的关系的概念:平行、垂直、水平的、或多或少地倾向于水平的或者是垂直的。尽管如此,比起纯粹的视觉迁移,在顶部搭建桥梁是更进一步的,因为这是运用分析的第一步。儿童迟早会意识到这一步本身是没有什么价值的,然后开始考虑底部。他不能同时将底部和顶部都联结起来。实际上,他也没有这样去做,因为不是完全明白平行、斜率以及角度的意义,也因为缺乏一个坐标系统。因此探索出了将两座塔放得更近的方法,由此出现了手动迁移,就像皮尔和汤姆的例子中一样。

下面是一些儿童的例子,他们思考手动迁移但是理解力还没有扩展到更加高级的过程。

阿多(5;2)　开始采用视觉迁移,但是甚至是当他搭建自己的塔的时候,他也会将一块积木挨着另一块积木(都是属于他自己的积木,不是模型中的),从而能够确定他们是同样尺寸的大小。他完成了他的塔然后径直走过去看模型:"它们是同样的高度吗?——*是的*。——你确定?——*是的,我确定因为我看到了*。——当你看的时候你没有犯过错误?——*没有*……(他犹豫了)——你能测量吗?——*不,我不知道怎么测量*。——你还能做什么?——*我们可以将它拿下来,然后放在这里*(模型的旁边)。——你能用你的手测量吗?——*不,我不知道怎么做*……"

丹(5;2)　也认为它们是相同的:"*因为我能看见*。——你能测量吗?——*不,不首先把它拿下来,我没法儿测*。"

克兰(5;3)　一直看着模型。"*它们是相同的高度*。——你怎么知道的?——*你能看到它们有多高*。——你确定?——*你可以将它拿过去然后靠在一起*(这样做了。他将一只手放在每个塔上的顶端试图水平方面连接它们),*我的更小*。"

莫尔(5;6)　不断地拿着积木到模型那边比较,确定他们的大小,但是他没有将其靠近对应的模型中的积木;所以这种元素的手动迁移只是一个视觉比较的辅助而已。完成之后,给他一根木棒来测量。他将木棒放在地板上而不是桌子上,然后将它放在靠近自己塔的地方,将他的手指放在木棒上来表现出塔尖所到达的点。这种测量没有再用在模型上面。现在他将木棒放在长凳上,将它靠近模型然后说:"*我的更大,它是在桌子上的*。"这种行为预示着一种公共测度。同时它表现出了为什么在这个阶段,这样的一个公共测度是不可能的:起始点和终点不相关;换句话说,位置的变化还没有成组。

南(6;0)　和莫尔做的完全一样,但是他只是简单地说:"*它们相似*。"需要注意的是,南和莫尔都没有整体移动塔,尽管他们在处理单独的积木时采用了手动迁移的方式。

克丽(6;1)　也拿着积木走向模型,但是他不满足于完成的塔的视觉比较:"它

们是一样的。——你怎么知道？——你能看到啊。——你确定？——不，除非你把它拿过来，否则你不能正确地看到。"

乔司(6;11) *"它们高度相同。——你确定只是看看吗？——是的，你不会错的。——你能用你的手测量吗？——你不必一定要放在那儿(都在同样的桌子上)。——你能测量吗？——好的，但是我只知道怎么测量我自己：你把一把尺子放在这儿(指向他的头)，你让它一直下来然后你就会看到。——你能用这个木棒来测量吗？——不。"*

斯卡(7;0) 与模型中的每个积木都进行比较。当他完成之后，他满足于一个视觉评估。"还有其他的方式比较它们吗？——*你可以将它拿下来然后把它放在这儿(放在同样的桌子上)。*——那么没有这些呢？——*你可以将这把长凳靠得更近，或者你可以将它带到那边去。"*

手动迁移直接从视觉迁移中衍生出来，因为儿童将物体放在一起是为了视觉比较。但是事实上他以一种一般的方式来减弱对无助的视觉比较的信任，并且更特别的是，它表明是意识到了在不同水平上视觉比较的不适当性。这样的在高度或者深度上的差异是普遍的，同时可以猜测，因为儿童在知觉比较过程中感到困难，所以他们逐渐意识到视觉迁移存在的不适当性。

然而，儿童能够意识到基础水平差异的事实，以及他们能够发现知觉比较在很多情况下的困难性的事实，都仅仅是因为空间欧几里得结构化的开始。这样的结构化导致他们考虑底部的同时也考虑塔的顶端。同时它阻隔了直接和立即比较的方式，那种方式忽略了整体空间，是阶段1的特征。

此时，空间的结构化也只是刚刚开始。真正的结构化要等到他们达到思考与整体坐标系有关的水平3B的时候。然而，只有意识到在同样的水平面上塔才能被比较时，这时他们才有了水平和平行的概念。他们对水平的理解可能是指自己的房间地板，对平行的概念可能只局限于当线是水平的或者是靠在一起的线的特殊情况[①]。所以，不像在这部分之前提到的，克兰和乔司认为除非两座塔都在同样的桌子上，否则不能将它们的顶端联系起来。

欧几里得结构化的开端解释了比较中位置变化的出现。克里告诉我：*"除非你拿动它，否则就不能正确地理解。"*为了比较两个物体的高度，我们必须将它们一起放在一个单独的框架下。(这里，物体必须在同样的水平面上)。唯一移动的物体是被比较的物体的事实表明，在这个水平上，儿童缺乏能力思考与聚合的位置变化以及坐标系统有关的事情。假如能够这样做，他们可以利用一个共同物体位置上的变化来联系两座塔之间的间距。莫尔和南，他们采用这样的一个共同物体(用来测量的木棒)，以一种方式清晰

① 水平2A也是儿童获得了垂直的概念。他们画了一个量杯，部分填满了水表明水面与量杯的底部是平行的，甚至当量杯倾斜的时候(《儿童的空间概念》第十三章)。

地表明位置的变化是非常不协调的。莫尔不知道怎样在起始点(测量复制品的时候,他将木棒放在地上,但是当测量模型的时候放在长凳上)或者是终点(忘记了他的手指在测量模型的时候放置的位置)之间建立对应关系。一个测量尺子应该紧挨着被测量物体,同时表现出一致性。像莫尔那样位置的变化对于形成这些的组合而言太不准确。

第四节 阶段2:位置变化基本的使用,亚阶段2B:身体迁移模仿被测量的物体

在亚阶段2B,我们看到了公共测度的首次出现,而这在视觉和手动迁移时是没有的。在这些水平时,就像我们之前看到的,位置的变化至今仍是未发展的。因为他们没有掌握坐标系,因此儿童不能调整太多在比较中包含的数据,使得其不管在什么位置的时候都具有准确的空间关系。开始时,共同参照是儿童自己的身体。这个局限与第一章第二节中研究的行为所对应,研究位置变化的最初表征也发生在第二阶段,限制了儿童对于自己运动顺序的回忆。

儿童的自我主义本质上是儿童主观框架的同化,也是在后来去中心化之前,去中心化是授予物体自己的客观属性。这解释了为什么儿童首先选择他们自己的身体作为一个中间的测量来比较模型和复制品之间的差异,而不是手里所拿的任何东西。他们通过手指、手臂或者他们的身躯来测量一个物体,同时将那些身体的测量转化到另一个物体上。接下来是一些例子。

艾利(4;6,非常优秀) 处于水平2A和2B之间。他采用频繁的手动迁移,将他的积木与模型中的积木进行比较。他的塔最终72厘米,模型是74厘米。“这些塔高度一样吗? ——*我的更小,因为桌子更低*。——假如我们将你的挪到模型那边,它还是会更小吗? ——*不*。——你能测量它们的高度吗(给他一些材料)? ——*可以*。——(艾利爬上一把椅子,将一只手放在模型的底部,然后抬起另一只手放在顶部的方向。他放下他的手扶着椅子爬下来。然后他跑向他自己的塔,一只手向着底端,另一只手向着顶端。所以他没有办法让他测量的高度守恒。)*我的更小*。——你能测量它们的宽度吗? ——*不*。”这种方式与其说是一种真正的测量行为,不如说是一种表示高度的手势。

瑞斯(5;7,优秀) 也采用了手动迁移的方式来建他的塔,偶然中,他将自己的手放在两个积木上来比较他们。当他完成了,问他是否塔是相同的高度:“*我不知道*。——去看看。——*那里,那个*(模型底部的积木)*明显大*(他将他的手跨过立方体的边缘感受他的宽度和高度,然后跑到另一边,对自己建造的塔也这样做)。*它更短。我必须填满这个洞*(他加了更多的积木。——*那现在呢? —它更高。不,它是相同的高度*。——你能测量它们吗? ——*不,因为我的手不得不放下来*(他从他

的塔的顶端水平移动手到模型的顶端，然后表示了顶部之间的线是向下的斜率）。*不，我不能测量它们，因为椅子更低。你知道我的意思吗？*——你还能做其他什么事情吗？——*不。*"要求他画出与模型相同的尺寸。为了测量它，他说："*我能够将这条线挨着塔（手动迁移）。*"但是他继续用这个手指来比较细节。结果他还不满足："*但是我测量了。*——是吗？——*是的，但是我手指弯曲了*（在位置变化的过程中失去了与大小之间的联系）。"

布鲁(5;11) 也使用了手动和身体迁移，迁移积木，用手指测量。他将完成的塔靠近模型，用它的手指比较模型的对应的部分。"假如你将它放在更高的桌子上会不会改变塔的高度？——*哦，不会，它依然是相同的高度。*"

库尔(6;5) 将积木带过去与模型中对应的积木进行比较。当他完成了他的塔之后，他问是否他能够在模型旁边再建一次："*我不知道是否它们是相同的高度因为这个桌子更高，但是假如我在那边再建一次的话我能确定。*"他用两个手指来测量模型中的每个部分，迁移这个测量到复制品中："*它们是一样的。*——那么整体的高度呢？——*我不知道，因为我不得不把我的手放下来*（就像瑞斯一样）。*我必须一直这样下去*（一次比较一部分）。"

多姆(6;5) 将积木带到模型那儿进行比较。当他已经完成了，他将一只手放在模型的顶部，另一只手放在底部。他保持这个距离，然后迁移到他所建的塔上。依然不满意，他跑回到模型那儿，然后爬上一把椅子："*我没有足够高，必须要有相同的高度才能看正确。*"他采用自己的身体作为一个码尺，将一根手指放在底部的水平面上，然后他用一把尺子连接他的顶部。接着跨向另一座塔，然后重复这个运算："你能用另一种方式做吗？——*我能用我的手臂*（依次将手臂来丈量两座塔）。——那么这个积木呢？"他手挨着一个塔的底部的积木，将另一只手悬在半空，然后他转化这个高度到另一座塔上。

接下来的几个例子依然表现出身体转化的优势，但是最后做出的动作也说明了一个独立公共测度的概念的出现，但还不是很恰当，也没有进行运算化。它们代表了一个将在第五节中研究的中间水平。

迪斯(6;6) 将每一个积木都靠近模型，然后用两只手指测量他们的高度。接下来贯穿这样的程序："你如何能知道这是否正确？——*我可以将它们放在一起。*——假如你没有那么做呢？——*我可以使用一个木棒。假如它是直的*（例如，当横跨顶端后是平行的）*就意味着他们是相同的高度。*"他发现木棒是倾斜的，但是使用一个纸条来连接底部，同时确定木棒和纸条是平行的："*当他们倾斜的方向一致*（当斜线平行）*两座塔就是相同的高度。*——还有其他的方式吗？——*有，你可以在这张纸上做一个标记*（垂直放置的）。"他尝试这个最后的方法但是失败了，因为他没有从底部开始测量。值得注意的是，在第一次使用手动迁移之后，身体迁移（他的手指）以及顶部和底部的平行直线，表明他达到了一个独立的公共测度的

概念。

楼(6;6)　"*它们是一样的*。——你怎么知道？——*我看到的*。——你怎么这么确定？——*我能够拿掉这个屏幕以至于我能够更好地观察*。——其他的呢？——(他将一只手放在塔的顶端，另一只手放在底部然后走开；但是发现测量塔的手已经移动了。)——这种方式你会犯错误吗？——*不*。——这个怎么样(一个很短的木棒)？——(他将它放在自己的塔旁边，然后试着水平地移动它，同时保持它在直立的位置，而不管底部水平的差异。)"

贝(7;2)　用他的手指测量底部的积木，然后他拿了几个横放在模型的积木旁边。完成他的塔之后，他用手探到顶部然后试着水平移动它到模型："*它不是同样的高度因为那个(它所放置的桌子)更低*。——你确定，你所使用的这种方式吗？——*是的，因为我记住了大小*。——哪里？——*在我的脑子里*。"接下来他将一只手放在顶部另一只手放在底部，然后迁移这个高度到另一座塔上，保持它的手在同样的位置。在快到一半的地方他哭了："*不，这不好*。"他这个时候用两个木棒造了一把尺子，并且高水平地成功迁移了高度。还有当问到比较宽度时，他垂直地拿着木棒测量模型的每一边，然后横着移动它们，他能够使它们保持同样的距离。

这些例子显示了从手动的向共同测量工具的迁移是通过被试最初观察到使用自己的身体后发生的。当多数被试使用伸出的手指和手臂时，多姆则使用他整个的身体，在他的腿上标记一个点，以对应塔的底端，他的头则对应它的顶端。

但是，在充分意义上被试自己的身体还不是一个独立的中间项(middle term)。身体迁移起始于手动甚至视觉迁移的扩展。每当客体*A*和客体*B*相对比和一个东西被测量的时候，都存在一个中间因素，尽管称呼它为中间项可能是不正确的。它的功能是作为*A*和*B*之间的连接，将它们保存至对比的过程之中。这一中间因素首先与被试自己的活动是紧密联系的。在视觉迁移中，中间因素是眼的运动，到目前为止是成功的，因为它将*A*和*B*连接起来。但是，它在保证它们各自大小的守恒方面又是不充分的。手动迁移最初是很困难的。在这里中间因素是手的运动，它用来将客体相整合。如果它们是固定的，手动迁移便能成功地将长度保持下来，除非它们彼此对立刚好平坦地放置，否则它与视觉迁移的作用没有差别。在水平2B，这一中间因素尽管和被试自己的身体是紧密联系的，但是它开始变得有差别了，并且我们看到它以姿势的形式出现，用于模仿客体，将其大小加以迁移。在阶段1和2A这一中间因素尽管也是存在的，但它是无差别的。它在阶段2B的差别是独立中间项的先兆。

首先，我们必须考虑这一差别是如何产生的。第二，在多大程度上它能帮助大小守恒。第三，它是如何影响在阶段2B尚未被遗弃的迁移的早期形式的。

由于身体迁移是一个相对容易的阶段，手动和视觉迁移中姿势的使用标志着这种差异的过渡。甚至在阶段1，在做出视觉估计的时候，儿童也可能以模仿的方式使用他

们的手和手指。H. Delacroix将这视为所谓的自动模仿的开始[①]。许多的被试在试图通过眼睛来估计塔的高度的同时将手伸出来。H. Wursten报告了一例儿童估计直线长度的实验，他注意到5到6岁的儿童是经常将手指伸展到桌子下面的，好像这能帮助他们进行视觉迁移一样。当信号从特征上来讲仍是模仿性的时候，眼睛运动和模拟运动之间的紧密联结会在图案之中显示出来，并且在整个符号思维的发展阶段起着重要作用[②]。亚阶段2B时期的身体迁移本身是来源于手动迁移的自然发展。在抓取塔的时候所用到的运动迁移是以客体为中心的模拟运动，或者只是指示高度或深度的界限。在该水平最年幼的被试（艾利，4岁6个月）中，这种关系仍然是明显的。艾利仅仅是爬到椅子上，用两只手比一下塔的长度，之后对模型重复同样的行为。当他从一座塔跑到另一座塔的时候，他并不尽力保持两只手之间的距离不变。在该案例中的这种运动，从功能上来讲，类似于辅助视觉迁移的描述性姿势，类似于符号化的轮廓，类似于身体性的第三方中介，虽在特征上是模仿性的，却也是在两个待测量的物体之间传递。下面例子中的运动就不是那么模棱两可了：瑞斯将他的手紧贴着想要测量的积木。布鲁和库尔，仅仅是伸展他们的手指，代指多出来的差异。在多姆的案例中，他用整个身体测量塔的高度，他的测量行为是如此不同，乃至我们看到他在自己的头上和腿上标记界点。迪斯、楼和贝的模拟姿势进一步分化，以至于他们能够转化象征性的物体，木棍或是纸条。这里，我们看到了共同测量工具的出现，它不再跟被试自己的身体存在关联。

尽管有些差异不是那么明显，但是在这一转化过程中的长度守恒却好于视觉迁移。像艾利这样的被试还没有意识到守恒存在于各种各样的问题之中。他们似乎认为指示着间距的姿势能够随心所欲地被重复，并且在相同的维度之中显示出来。瑞斯则要慎重得多。他对自己的宽度迁移并不满意，因为他可能会在半路将手合上。他和库尔都拒绝通过将手从一座的顶上移到另一座的顶上来比较塔的高度，因为移动不会是水平的。贝看到了基础水平的差异，但是认为他可以不经过模拟性的手的运动，在头脑中将高度迁移。当试图将两只手保持恒定的间距迁移距离的时候，他承认自己失败了："哦，那样不行！"因此，处于水平2B的被试基本上都对身体迁移作为保持距离的一种方法持批判态度，这也正是为什么他们试图迁移细节而不是整体维度的原因。

理解为什么他们会持批判态度是重要的，因为这种态度跟该水平空间理解的发展存在关联。在转化模拟运动的时候，儿童比在视觉迁移中更能意识到水平和垂直轴。仅仅是竖直站立或者平躺不会带来这样的进步，因为儿童并不试图建立身体和周围物体或者周围物体本身之间的空间关系（《儿童的空间概念》第十三章）。他是受身体迁移的驱动才去建构这些空间关系的。当他试图通过模拟姿势迁移空间维度的时候，他被迫注意到要保持自己垂直，保持他的手水平，以及必须将塔、桌子和地板作为参照标准。因此，除了像艾利和楼这样的仍处于过渡阶段的几个例子，处于该水平的被试比之前的水平更能意识到水平轴和基础水平的差异。

① Op. cit., pp. 80 ff.

② 参见皮亚杰，《儿童期的游戏、梦和模仿》。

对水平轴和垂直轴的实用性的理解，对平行主义的直观理解，对斜度和角度更加精确地进行估计，以及保持位置变化的量的努力，这些构成了表征水平坐标系统和位置变化分组的必要基础，并且它们都在亚阶段2B详细地表现了出来。我们已经看到了儿童关于保持水平的观点。对平行主义的清晰理解可以在迪斯的反应中找到。当将塔顶和塔底联系起来时，他说道："当它们以同样的方式倾斜时，(当斜线是平行的)两座塔的高度是相等的。"就在不久之前，他用一根棍子将两座塔的顶端桥接起来，说道："如果它是直的(水平的)，那就意味着它们的高度是相等的。"因此，迪斯显示出了他对水平性和平均主义的理解，并且他还能对坡度的倾斜程度进行切实可行的估计。

在这个阶段，理解在特征上仍然是直觉性的。它们只有到了阶段3(《儿童的空间概念》，第十一至十三章)才会变得连贯和具有运算性。在水平2B，它们还没有连接到一起形成一个整体，就像如果被试要对位置变化进行分组和形成坐标系统必须做的那样。当测量的中介仍然是身体迁移的时候，位置的变化必然总是近似的。但是，是像迪斯、楼和贝这样年长的被试，即便他们发现了独立的第三方中介，也远不能以变化位置的方式建立精确的全等关系。他们不能使用位置的变化，以克服不同的基础水平这一问题。迪斯从地上开始测量而不是从塔的底部；楼用短的棍子沿着垂直的位置水平地移动，他并没有考虑沿着塔一步一步地移动进行测量；贝设法用两个短的棍子测量塔的高度(尽管他也不能一步一步地移动工具，但是他是从"制造一种特别的工具"着手该项任务的)，在测量它的宽度的时候，他仅仅是保持木棍平行和分离。因此，在这一水平，不管是使用身体迁移，还是被试开始使用独立的第三方中介，它产生的位置变化的效应都远未达到可移动成分的程度。而这对于测量物体的长度守恒以及测量物体的全等序列都是必要的。

然而，即便是对水平性、平行性以及坡度的新的理解也会对视觉迁移产生回溯性的影响。感知比较以两种方式被影响。首先，它经过了精简，因为视觉迁移扩展到了更复杂的关系之中。由于新的智慧理解的出现，即便是感知空间也会表现出极大的结构化。第二，被试更能意识到视觉迁移的局限。因此，在亚阶段2B，我们很难发现还有孩子仍然相信仅仅通过观看两个有距离的物体就能确定它们之间的精确对比。

但是，模拟性的或者身体的迁移最重要的地方在于，它为独立中介的发现提供了一个连续性的过渡。我们看到，身体迁移作为众多模拟运动的连续体而出现，它是伴随着视觉和手动迁移自然出现的，能够帮助比较的进行。现在，从特征上讲，模拟过渡到了映像，映像本身不亚于模拟，或者并非来自于模拟[①]。因此，表征性的映像作为过渡到身体迁移的模拟运动的结果而获得。之后，映像与代表中项的符号性的物体相连接。当这一步跨出的时候，符号性物体变成了一个独立的中介，也就是在直觉水平上的共同的测量工具。这最后的一步可以类比于符号游戏的发展：儿童首先是模仿一个人或者是一种行为，之后将他的模仿投射至他付诸模仿力量的符号化的客体之中[②]。

---

① 充分讨论请参见《儿童的空间概念》，第一、二章。

②《儿童的游戏、梦与模仿》，第二部分。

所以,在共同测量工具发展的过程中,我们看到模仿力量被传递到像纸条、木棍这样的符号客体中,或者像迪斯、楼和贝用两根木棍连接在一起模拟一座塔这样的符号客体中。确实地,在贝的例子中,当迁移宽度的时候,他将两个棍子绑在一起,和他的手臂所做的极为类似。

在直觉水平中,共同的测量工具仍然保持着符号功能,这为直觉思维和运算思维的差异提供了清晰的说明。我们可能会想到一些从水平2B过渡到水平3A的例子。他们介于阶段2的直觉测量和阶段3的运算测量的中间位置。这些例子尽管比迪斯、楼和贝在某种程度上更高级一些,但仍不能毫无保留地划分为更高的阶段。他们阐明了真正测量进化的决定转折点是什么。

第五节 阶段2B和3A之间的过渡发展:独立中间项的逐渐发现

到亚阶段2B的末期,许多被试(迪斯、楼和贝)在开始使用身体迁移(如模仿客体)之后,会继续使用独立中间项。相同水平的其他被试则不再求助于身体迁移(或者至少不再以身体迁移开始)。从表面上来看,他们发展了一个独立的共同测量手段。然而,出于两个原因,他们仍属于阶段2和阶段3(水平2B和水平3A)之间的过渡阶段,也显示出模仿行为和使用独立中间项的连续性。首先,共同的测量手段,或者说共同因素,通过清晰的符号功能开始,导致模仿行为的产生,而这一模仿行为是极度缺乏运算性过渡的。因此我们看到,中间项可能是第三座塔,它的使用可能伴随着模仿行为等。第二,也是与此相关的,测量只是在有限的案例中才会成功,即中间项和塔的高度相同,这样它才具有代表性。当它高一点的时候,或者矮一点的时候,它的使用仍是不足的。只有当它是塔的精确拷贝时,它作为对照才是成功的。

儿童通过已有的经验开始发现中间项的使用,对这一过程的分析有时是复杂的。许多的被试,尽管仍属于阶段2,已经学会了如何测量;其他的被试也看到了成人测量。在这些和类似的案例中,区分外部因素和内部因素是容易的,因为儿童将任何他看到的东西同化到他自己的表征格式之中,只记得他所理解的(也就是说,除了简单的鹦鹉学舌式的语言复制之外)。因此,到了亚阶段2B的末期,只有当他感觉到通过伸展手指和手臂迁移大小存在困难时,他才会发现需要独立的共同手段。下面是一些例子。

帕维(5;1) 通过在视觉上比较积木,建立起一座塔。"它是相同大小的吗?——(他横过来看,并加上两个积木)是的。——你能量一下它吗?——(他拿起一块比塔更长的积木,并且将它靠在塔的旁边。)现在该怎么办?(不等到回答,他就跑到模型旁边,并且将积木放在它的旁边)是的,对了。——你是怎么发现的呢?——*它在这边有一点短,在那边也有点短。它是相同的。*(他还没有测量两个

差异，或者将塔的顶端标记在积木上。)——你能用这块积木测量吗？——不。(帕维现在使用不同大小的积木建造了第三座塔，将它做成和原来那座相同大小，并把它带到模型旁边。)它们的高度相同(在做了调整之后)。”

韩(5;4)　在建造复制品的同时仅仅看了一眼模型，说道：“离得太远了，我不能很好地看到它。——它是相同高度的吗？——是的。——你怎么知道的？——凳子太矮了，但我还是能看到。——你能用这块积木(比他的塔更长)来测量吗？——是的。(他标记它的长度，但是在去往将要丈量的模型的途中却失去了跟踪)它是相同的。——用这个小的积木呢？——(他把它垂直地放在塔的旁边，并且沿着它的整个长度逐渐将其上移，一个模仿姿势。它对模型做了相同的事。)——是的，它的高度相同。”

内尔(5;6)　在建造它的复制品的时候，也看着它的模型，但是他不确定它们是相等的。“你该怎么做呢——丈量它们。——用什么呢？——用一把尺子(注意学习效应)。——这个呢(一个和模型相同长度的纸条)？——(他不嫌麻烦测量了模型)是的，可以。——它们是相同高度的吗？——(他现在测量复制品。)另一个(模型)更大。——这个呢(一个比模型矮一点的积木)？——(他将它依次放在两座塔的旁边，看到他的复制品比积木更高，说道)我的更大。——你是说这座塔用这个纸条来量的时候更小，用这个积木量的时候更大吗？——是的。——好，然后呢？——(似乎不关心)——这块积木怎样？——它不起作用。——这个呢(和模型相同长度的纸条)？——(他对两个都进行了测量，将一个小块儿加在塔的上面，让它们相等，说道)它们是相等的。——这个呢(一个更长的纸条)？——(他测量了他的塔)纸更长。——这个呢(一个短一点的纸条)？——它不起作用。”

丹(5;9)　“它是相同高度的吗？——是的，因为我做的是相同的(他检查一块遗忘的积木)。——你该如何做才能确定呀？——拿着这个卡片，把它放在那里(看着这个卡片和塔的高度相同)。——你还能做其他的吗？——我可以把塔打破，并且在另一个的旁边再建一个。——其他的呢？——我可以用我的手臂(他沿塔的长拿着它，但是发现它太短了)。——这个呢(一个尺子)？——不，它太小了。(他现在用各种各样的积木建造了一座和复制品同样大小的第三座塔)我必须把它靠在另一个的旁边。——好，我会帮助你的。(实验者把这座塔打破，并且将它建在模型的旁边，故意改变它们放置的顺序，整体高度与模型的高度是一样的。)它们是相同高度的吗？——不，那两块积木是在顶上，不是在底下。(丹没能意识到长度 $A+B$ 和 $B+A$ 是相等的，他拒绝了提供给他的一根长棍)它太大了。——(一个短的尺子。他把它靠在塔的底端，像韩一样，用它进行模仿性的运动(imitative movement)。但是，他只是将它升至塔的顶端，又再次降至塔的底端，对模型做着相同的行为。)完全正确。”

特拉(5;10)　在建造的同时看着模型，不确定结果：“相同高度吗？——不知道。——你该怎么做？——拿着这个卡片。(他拿着卡片，并将它依次靠在两座塔的边上，发现三个的长度都是一样的)高度是相同的。”但是他拒绝任何比塔长或短

的积木或者是纸条。唯一他认可的其他的解决方法是，“*将两座塔放在相同的桌子上，用我的手这么做*(把它横在顶上，看看线条是不是水平的)。”

劳尔(6;1)　简单看了一眼模型，就开始做了。但是很快他就发现由于基本水平的差异，这太困难了。他把积木横过来，以更近地比较它们，之后伸出他的胳膊跨在它的上面。但是，他继续说道：“*桌子到这么高*。”并且给我们出示与复制品基本水平相对应的模型上的点。现在，他靠紧他的塔，在他自己的身上(他的肩膀)找参照点，但是再三考虑后又放弃了这样做，找了把尺子来衡量两座塔。他成功了，因为尺子的长度刚好和塔的长度相同。当被要求用更长的尺子来衡量的时候，他通过眼睛来判断差异，并且在这一过程中丢失了参照点。因此，他又把尺子放在它的顶端，把另一把尺子放在塔的底端，注意到两把尺子是平行的：“*它们的高度相同，因为它们的倾斜是一样的*。”当给他一把短的尺子时，他用它来衡量塔，并且用自己的手来弥补差异。

安(6;2)　首先用眼睛来测量，之后用手，但是仍不满意：“*我不知道*。——为什么？——*因为我的手总是会掉下来*。”他试图用尺子来测量，但是只有当尺子的长度与塔的高度相同的时候才会成功。他不能在一把长的尺子上标定参照点，也不能用短的尺子正确地进行测量。

韦伯(6;4)　开始的时候站在两座塔的中间，从一座塔望向另一座。“*首先我看到这一个，之后看到那一个，我确定是对的*。”但是，后来他不再那么自信。他用两个不同的棍子制作成一个总长等于塔高的共同工具。

弗朗姆(6;10)　开始的时候把一个一个的积木靠近模型，但是即便是在建造塔的时候，他也在说：“*我需要一把尺子*。”他拿到一把尺子，把塔建造成和尺子完全一样的高度。为了比较两个塔的宽度，他用两个棍子以恒定的间距隔开(参考贝，第四节)。

阿里(6;11)　在两个塔之间轮流观看，之后发现这样的过程是不够的，“*因为这个塔在较矮的凳子上*。”他拿出一个比他的塔更长的棍子，用他的手指标记它的高度。但是他在移动棍子的时候也移动他的手指，只有在尺子长度等于塔的高度的时候他的测量才是成功的。

雷恩(7;5)　想要丈量塔的高度，他建造了一座和模型相同高度的第三座塔。他使用17块积木建造了它，当在模型的旁边建造它的时候，他数着模型中积木的个数，将它们以相同的顺序建造起来。最后，他拿着最后的两块积木，说道：“*我必须留着这两块，看看能不能达到相同的高度*。”

梅(8;4)　也建造了第三座塔，但是在这么做的时候，他认真地选择积木，和模型中的相对应。因此，他的共同测量手段是模型的复制品。

这些案例是极具启发性的。它们显示出发展的最终平衡的开始，即通过共同手段进行高度迁移，这样守恒就通过协调参照点而得以保证。但是即便是在这种较早的水平中，当阶段2B的身体迁移导致发现可移动的中间项时，这种中间项的应用范围也仍

不是概括化的。

首先,我们可能注意到了这种中间项是在亚阶段2B的末期以直觉的形式出现的。它在特征上是符号化的,或者是模拟性的,因此表现出与身体迁移模仿之间较强的连续性。两个孩子(韩和丹)在移动自己的手臂时,经常将一块积木在塔上上下移动。其他的孩子(帕维、雷恩、梅等)或者干脆建造了第三座塔,或者建立起一根积木柱子,暗示他们还不能将共同中间项的高度抽象化,认为只有当一个物品外表和将要比较的物体外表类似时才会被使用。设想有两个物体A和C,儿童使用一个中间项B,它是A和C的反映。B是一个象征性的替代,帮助儿童通过C想象A或者通过A想象C。他还没概括化到推论的那个点:如果$A=B$,$B=C$,那么$A=C$。因此,中间项仍然是感知性的和直觉性的,缺乏运算性的传递。

这种直觉映像加工半感知性的特点通过行为的复杂细节而得以印证。内尔做出了矛盾性的判断,这跟我们在感知估计中所发现的类似:当使用和模型相同长度的纸条时,他发现他的塔比模型更小,但是当使用一个短的木棍时,他认为他的塔更高。这里我们既能够看到对比效应,也能看到测量手段的相对性,并且观察到感知关系的特征[①]。再次地,对高度的测量经常比对跨度的测量处于更高的高度,因为对宽度的测量仅仅用手就能完成,它更容易迁移——因为我们手臂的生长刚好在相同的水平,而不是一个高于另一个。这类似于视觉比较,因为对于视觉比较而言,水平比较也比垂直比较容易。

这个水平的中间项被认为是直觉性的,因为它是想象的、模拟的和半感知的。因此,儿童还不能成功地使用它,除非它与将要测量的物体的长度接近。这种方式要求在三个比较的项目之间具有某种类似性。假设有一个共同测量手段,或者有点长,或者有点短,因为它不像要测量的项目,所以儿童才会失败。只有当被试能执行真正的运算的时候,直觉性的迁移才会迁移成运算性的测量手段,而他们还没达到那个水平。

测量的几何属性如此,以至于没有表征位置变化和协调性的参照系统的能力,就不能理解公式,如果$A=B$,$B=C$,那么$A=C$所表达的运算性传递。测量不仅仅是逻辑演绎。如果我们不考虑分割问题以及测量单元的假设,可能会说,测量是两个等式$A=B$和$B=C$的表达。因为中间项B是一个可移动的项,便这些等式变得具有传递性。但是,除非在B这个位置的变化归类为一个可拟的连接性的成分,暗示着一个多维度的参照系统,他们才能得出等式$A=C$。当这些条件还没满足的时候,即便是单一维度的测量(这里是两座塔的高度),也充满着困难。

首先,发现稳定的参照点,并且在迁移指标的时候保持在这个点上,仍是困难的。利用一根比塔长的木棍,帕维对差距做出视觉判断。韩和阿里标定了一个参照点,但是却没有追随它,楼通过眼睛找到了一个参照点,也丢掉了它,安还不能想到参照点,弗朗姆不能将测量高度的方法应用到测量塔的宽度上。如果$B>A$或者$>C$,那么共同测量指

① 参见《智慧心理学》,第三章。

标B的位置变化则完全是缺乏参照点的。只有当B等于A和C的时候，测量才是成功的。

转过来看位置变化本身，我们注意到三个局限，首先许多被试还不能看到他们必须从A移动中间项到B。因此，帕维将中间项B放在自己的塔A的旁边，问："现在该怎么办？"到这时他才将B带到模型C旁边。内尔将纸条靠近模型C，却忽视了他自己的塔A，说道："是的，正确。"其次，当中间项比那些将要比较的对象短的时候，儿童经常将它上下移动。他们表现得好像这些中间项的长度是移动的起止点的函数，而不努力计数测量指标进入测量过程的次数。他们不仅缺乏对单位测量的理解，还缺乏对位置变化和参照系统的理解。最后，许多的被试（如丹）用积木建立了另一座塔，以对应将要比较的那座，接着试图在塔的旁边以相同的顺序重新建立它，表现得好像相等部分的总和并不总是导致相同的总和一样，或者说从A到B的距离不等于从B到A的距离一样。在内尔的案例中，结果的混淆导致他不承认长度守恒。

如果在这个水平中间项的成功使用，只是在有限的案例（$B=A=C$）中才会发生，那么这不仅是迁移的直觉特征，还是位置表征不足的特征。与他们自己运动的范围类似，当位置变化太大和测量较小物体的时候（参考第一章），儿童还不能将这些变化以及这些变化和参照点系统之间的连接组织起来。他们之所以不能组织这些关系，是因为不能将距离和长度视为由一系列有序的点组成的间隔，而只想着两个端点的缘故[①]。因此，如果这些参照点是相等的，他们可以表现出长度的全等性，但却不能将不相等整体的有限的部分进行等价，这不是偶然的。更进一步地，如果没有参照系统，那么组织间隔之间的关系是不可能的，所以那些不能在单一维度中固定参照点的孩子在涉及两维或三维系统的时候将更加迷茫。

我们已经发现在阶段2的末期，模仿性和符号性的表征会导致儿童发现中间项，以作为比较的基础，但是仅仅发现了中间项并不足以达到运算性的测量。所涉及的位置的变化需要对分组的充分表征，而这种分组带有联结性和可逆性成分。这反过来也需要一组可协调的参照点网络。除非具备了这些条件，否则被试将不能一步一步地移动测量单位。这种叠加对应的是等式：$A+0=1A$，$A+A=2A$，$A+2A=3A$…它假定A的一系列的位置服从加法运算$A+A+A$…以及在一系列位置中A的正确位置的参照点是充分固定的。

第六节　阶段3：运算性的共同测量，亚阶段3A：无须单位叠加的递推全等

阶段3标志着阶段2以及本部分中间水平基础上的巨大进步，因为儿童现在处在这

① 《儿童的运动与速度概念》，第三章。

样一个位置,他可以用任何长度的物体作为一个共同的测量单位。他们不再要求它必须看起来和要测量的东西一样,或者它应该和要测量的东西一样长。它长一点或短一点都可以。在亚阶段3A,他们使用一个相同长度的测量单位和一个长一点的测量单位。如果它短一点,他们仍会失败,因为还不能处理单位的概念。另一方面,当中介长一点的时候,他们比以前更有效地组织其位置的变化,开始协调参照点。但是,无论是组织还是协调都不足以帮助他们将长度划分为一系列的相等部分,达到理解测量单位的地步,他们还不知道这些连续的位置可以相加。尽管如此,当中间项较短的时候,他们确实试图寻找某种解决的方法:将它与另一段长度结合,或者与手的长度结合等。但是,这样的叠加仍是不成功的,其他的试验也都是相当笨拙的。这与他们能够自信而又运算性地运用较长的单位形成鲜明对比。在这里,他们标定参照点,以精确地显示差异,这种比较是运算性的,但是只是在质的水平上是这样。也就是说,他们以系统的方式比较长度,并且只有当他们将划分出来的部分视为恒量并且将部分长度相加形成一个总体的时候才会使用该部分。但是,他们并不能将这样的部分作为一个单位以确定其他部分的长度或者总体的长度。因此,有关部分本身位置的变化,他们仍然没有掌握。

平均而言,自发地使用一个长的单位,大体发生在7岁左右。只有到了那个时候,水平2B的直觉迁移才能通过变得具有传递性和可逆性而达到平衡。的确,有些6岁的儿童也能测量。但是,这样的例子是很少的,并且行为也只是发生在演示给他们看的精确条件下,测量还没有概括化,这种条件下的测量是习得的。当一个被试再被要求测量一幅画时,他可能会说:“我忘记怎么测了。”这是在习得材料时儿童经常说的话。而另一方面,如果测量是自然发展的结果时,不管它是儿童自己发现的还是被教的,它都能被同化,并概括化到新的领域。

沃格(7;2) 开始的时候只满足于视觉比较。“*我两个一起看就能知道*。——你能同时看到它们吗?——*不,但是能看完一个马上看另一个!你可以用一个尺子来量一下它们*。——哪个更可靠一点,是看呢还是用尺子量?——*用尺子量,因为你能把手指放在它量的地方。如果桌子是相同高度的,你可以通过看。像这样的话,用尺子量更好*。——(给他一把比塔更长的尺子,他把它与塔身严格平行地放置。)尺子是垂直还是斜一点有关系吗?——*是的,因为这样的话塔会变大*(如果尺子倾斜,测出来的长度会更大)。*你必须标记一下长度*(他用手指标记一下长度,之后转向模型)。*对的,一样高*。——宽度呢?——(他以相同的方式测量宽度,将尺子放在比塔底高一点的地方,但是与塔底平行)。”当给他一把短的尺子的时候,他用他的手来弥补不足的长度。

罗布(7;4) 用较长的尺子测量的时候,将手指放在适当的点上,并且注意到了他发现的数字(33)(它使用的是一把以0为起点的米尺,到他那个地方是67cm,

而他正对着33cm处)。通过这种方式,他精确地测量了塔的高度。当给他一把短的尺子时,它通过眼睛来判断不足部分的长度,而不是移动尺子。当给他的是较长或较短的木棍时,他的表现一样。"用这块积木可以吗? ——它太小了。——你能数一下你走了几步吗? ——(他以粗略而简单的方式移动积木,而没有精确地界定参照点。在数了13步后,他在模型上重复这一过程。)——对吗? ——*不,因为用尺子量的时候是33*。"

厄恩(7;5) 也成功地用长的尺子进行了测量,但是用短的尺子则不行。"*它不能测量,它太短了*。——用它没有其他的方法吗? ——*如果长一点的话可以,但是短的话不可以*。"

杰克(7;6) 先用眼睛来测量,将塔拿过来再放回去:"还有其他的方法吗? ——(他用手指来测量细节。)——用整个的东西可以吗? ——(他用硬纸板的屏幕试了下。)不,它太小了(但是他拿过来长的尺子,正确地进行了测量)。——用短的尺子可以吗? ——*如果我的手足够大的话可以*(他用手指来弥补不足的部分)。*我喜欢用长一点的尺子,因为它更简单。我只需要标记下正确的长度*。——你能用这些积木中的一块来测量吗? ——*不,我需要很多块积木才行*。——用一块大的呢? ——(他用这块积木试了下,用手的跨度弥补不足。)*不起作用,我的手一直在移动*。——你不能把积木紧靠在它身上几次吗? ——*不,因为我不能在另一座塔身上也这么做*。"

罗布(8;4) 依次经历了低水平的几个部分。"*它们的高度是相同的,因为我很仔细地观察了它们,就像这座紧靠着另一座一样(!)*"然后是,"*你可以把它拆开,然后在另一座的旁边再建一座*"。然后他通过手来迁移塔的高度,但是评论道:"*我可能出错了,因为我总是移动我的手,尽管我不是故意的*。"接着,他用长的尺子正确地测量了它们,尽管他不能用短的尺子这么做。

这里有两点需要注意。首先,共同测量手段的使用在质的水平上导致运算的平衡,之所以是质的水平,是因为还没有掌握测量单位的叠加。第二,测量的早期方式本身被新获得的行为修正。

在水平2B,中间项仍是映像性的或者模拟性的,因为感知或直觉的迁移仍服从于感觉和符号印象的添加(accretions)。只有当这些添加脱落了以后,迁移才开始变得可逆和具有运算性。就像在其他方面一样,运算可逆性是动态平衡的最终状态,它是调节的结果,这种调节最初是感知性的,然后是直觉性的。它们来源于表征水平同化和顺化的交互作用。

与第5节的中间水平相比,几何思维已经达到了一个新的发展阶段。它是新的,因为参照系统是组织化的,并且存在对位置变化的分组。没有这些,也可能存在全等,但这种全等并非是递推性的。被试甚至在水平2B就形成了对水平、平行和坡度的直觉理解,这能帮助他们将基本水平的差异与处于顶点的那条线联系起来。但是,基于参照点

的对位置变化的表征仍然是不足的。因此，利用共同测量手段B进行测量，只有在B等于A和C这两座塔的时候才是成功的。即使B比A长一点，他们也不能在B上面标记一个点，区分出等于A的那一部分。但是，在水平3A，刚才所涉及的这些理解已经开始综合。他们形成了一个参照系统，将位置的变化分组，保证全等的迁移。沃格达到了两种行为的综合。他在长的尺子上标记一个参照点，借此暗示B的一个部分等于A，之后将B小心地带到C那里。他注意到要确保平行，否则"塔会变大"。在比较宽度的时候，他也是这么做的，注意保持尺子水平，保证从参照点到尺子末尾的距离恒定。正是这种综合，使得他在三种维度中都能进行精确的测量，虽然还没掌握单位的叠加。具有不同基础水平的两座塔的部分构造和中间项相协调，这样当后者从一座塔转向另一座塔产生位置变化的时候，这种位置变化被分组。只有这样才会有"若A=B，B=C，那么A=C"的精确判断。(这并不意味着对该被试而言，整个的周围空间也得到了协调。)尽管被试仍不能一步一步地移动短的尺子(叠加)，但它能通过在尺子的基础上加入一段长度使得它等于塔高来进行测量。更重要的是，这种过程是可逆的和连接性的：厄恩使用小的积木，这样加上尺子的长度就等于塔的高度了。但是，与第五节中的丹不同的是，他并不担心整合尺子和积木的顺序问题，因为他知道，不管顺序怎样，总的长度都等于部分之和。

我们可能注意到了，测量发展的该水平所达到的部分协调类似于对一组位置变化的表征的部分协调(参考第一章)。但是，两者除了测量上的差异之外，还有一个重要的差异。当一个孩子参照建筑物或者十字路口改变他的位置时，他不需要关心移动中间项的大小，也不存在任何有关移动中间项的参照点。但是，在本实验条件下，既包含一个外部参照系统，还包括一个内部参照系统。外部参照系统或者静态系统不像一座村庄或郊区的草图那么复杂，尽管它经常被塔所建立的不同高度所混淆。但是对于移动的中间项而言，需要将其从一座塔带到另一座塔那里，这构成了进一步的内部参照系统。儿童必须将与塔顶相对应的点标记下来，将中介的大小考虑进去。这种在测量时由于位置变化表征所带来的困难在于，它需要同时表征两种参照系统。它在水平3A的时候将会被克服，这个时候部分协调已经通过第一章我们所研究过的情境得以实现。

此处，协调仍然是部分的，因为它不容许一个较短物体或者单位长度系统性地逐步移动。在这一水平的儿童不仅不能自己想到这一程序，也不能精确地使用参照点，即便被告知怎么做也是一样(如罗布)。确实，在通往成功叠加的道路上还有其他的困难，就像罗布的特定反应一样，他将由单独的一块积木所测量的13个单位与用米尺所测量的33个单位相比较，好像这里所涉及的单位是相等的和可比较的一样。

将测量的发展与数的发展进行对比具有启发意义[①]。有人可能会问，为什么一个在

① 参考皮亚杰，《儿童的数概念》。

质的水平上已经能够使用共同测量手段的儿童,在通过单位长度的叠加来建构真正的测量系统时会出现困难。因为他关于长度的概念是过渡性的,他能利用精确的参照系统协调位置的变化,能迁移全等关系,因此,他已经掌握了两种必要的成分。首先,位置的变化是分组的和有差别的,容许全等的迁移。第二,能对物体进行定性或者连续密集的分割(intensive subdivision),诸如$A+A'=B$,$B+B'=C$等这样的形式。后者通过补足短的尺子到需要的长度这一点上表现出来,他们利用其他物体的长度,认为总的长度是独立于部分的排列而存在的。为了达到单位的叠加,他只需要对迁移全等、记住过渡特征等将这些部分中的一种加以应用。他将会达到一种解决方案,这种解决方案可通过下面的公式来代表,如果$A=A'=B'$,等,那么$A+A'=2A(=B)$,$B+B'=3A(=C)$,等。测量不过是部分以及位置变化的运算综合,当将一个部分应用到其他的部分之中时,部分也就可以用等式表示了,测量也就获得了。因为他既掌握了部分,也掌握了位置的变化,那么我们就要问,为什么他不能整合它们。

我们可能还记得,数代表集合相加与项的顺序排列的平行运算的整合,并且在那里整合通过各部分的加工而得以实现。这些成分的加工本身类似于切分和位置的变化。集合的加法分组($A+A'=B$,$B+B'=C$,等)与加总部分以得到总的长度有相同的结构形式,而像$A \rightarrow B \rightarrow C$这样形式的序列正是一个分组的过程,它类似于顺序和位置变化的分组[①]。数是一个集合,通过加法和顺序排列这两种分组过程的融合得到,就像测量集合来源于两种平行的分组过程——分割(部分的加总)和位置变化一样。在数的案例中,逻辑成分的表象也是处于水平3A,它会导致总的数字序列通过单位的叠加而产生,即1+1=2,2+1=3,等。当儿童获得了它的逻辑成分时,他立刻就会掌握。为什么在测量的案例中我们发现的是另外的一种情景呢?

水平3A中的定性测量由过渡性全等构成,它有别于真正的测量系统。因为真正的测量系统包含由中介构成的切分位置的变化(一个部分被选作测量的单位并应用到其他的部分),而定性的测量一个物体则是作为整体应用到其他的地方。这种差别决定了具有集中性特征的运算与具有延展性特征的测量之间的差异(参考《儿童的空间概念》第十五章第三节)。然而,其在心理学上的困难并不是立刻就能发现的。通过进一步的分析,我们可能发现,测量系统的综合会受到直觉障碍的影响,而数的综合则不会。一个数字就像一个集,或者一个序列,因为它是一个不连续体的集合。所以当一个孩子掌握了集和序列的加法的时候,这两种运算就能被整合。然后,他既将物体视为与集合中的其他成员是等价的,又将其视为在计算顺序上是特殊的。也就是说,他将其视为一个数量单位。但是,在测量的范围内,尽管切分和位置的变化类似于集与序列的加法,但是却没有自动的整合过程。这是因为长度是连续的,并非由离散的单位构成。它确实像我们所看到的一样可以被切分[②],但是所分割的比例并非固定的,因为它们是连接在

① 参见《儿童的空间概念》第十五章,第三、四、五节,表明位置的变化(置换)是一种位置排序的特殊情况。

② 细节详见《儿童的空间概念》第五章。

一起的，所以很难比较它们。意识到一条直线上的连续部分是全等的比意识到两个分开的可移动物体是全等的需要更大程度的抽象化。这就是为什么运算性过渡在水平3A已经以质的水平获得，而单位测量在水平3B仍未被掌握的原因。这些运算获得的顺序证实了基因继承(genetic succession)的顺序性，这一点我们在集中运算与外展运算或测量运算的比较中已经看到了(参考《儿童的空间概念》第十五章第六节)。

总之，我们可能注意到了水平3A的智慧成就是如何以回溯的方式对更原始的比较模式施加影响的。在测量以及测量之前的整个过程中，视觉的、体力的和身体的迁移都很明显。被试使用他们的手进行身体迁移——但是他们意识到他们的"手不停地动"(杰克)等。但是，若与视觉迁移相比，进步就立刻变得鲜明起来，在理论上也很重要。罗布自己意识到了迁移，并且精确地描述了它的机制，他说："我很仔细地观察了它们，就像这座紧靠着另一座一样。"之后，运算传递性的进化导致视觉迁移的一种拟传递的结构化。因此，在皮亚杰和朗博希尔有关儿童进行大小和距离判断的研究中发现，当对近的物体和远的物体进行视觉比较时，年长的儿童是能够使用中介的。如果A是近的物体，C是远的物体，而B代表的是介于A和C之间的一个或多个中间客体，那些还没有达到运算性传递的儿童能够看到$A=B$，$B=C$，但是他们却认为$A>C$；而那些大于7岁的儿童能够推理出$A=C$，最终将它们视为是相等的(虽然有一些延迟，但是却清晰地说明了运算性思维对感知的回溯性效应)。

第七节　阶段3：运算性的共同测量，亚阶段3B：通过单位叠加的测量系统的进化

儿童是通过尝试使用较短的中介物来发现单位叠加的。在建立了待比较的项之间的传递关系之后，他们这时发现项之间的差异同样也是可传递的。假设B_1和B_2是两座塔，A是一个短的中间项(也就是说$A<B$)，而A'则是差异，$B-A=A'$。定性的测量只能参照B_1、B_2和一个等于(B_3)或者大于($B_3+...$)它们的中项。儿童只想着全等关系$B_3=B_2=B_1$，而不考虑剩余的部分。在亚阶段3B，A开始应用于A'——它用来测量A'。测量目前概化到了剩余的部分，这意味着测量现在纳入了单一整体的不同的部分。如果儿童发现$A'=A$，那么他就会声明差异也是相等的，所以$A=A'$且$B=A+A'=2A$，那么B_1和B_2就是相等的。因为它们两个都等于两个单位A(或者，如果$A'=2A$，那么$B=3A$，等)。

下面的几个例子中，前面的两个处于从水平3A到水平3B的过渡阶段。

艾戈(7;1)　"*它们的高度是一样的。*——你怎么知道的？——*我可以看出来。*——你怎么才能确定呢？——*把一个靠在另一个的旁边。*——如果你不能那么做呢？——*那么我必须量一下*(他拿着一张纸条来迁移要求测量的高度)。*它们*

是一样高的。——你能用这个(长的尺子)来量吗? ——它太大了(他标记出来差异,将标记与塔顶相对照)。*是一样高的*。——你能用这个(短的尺子)吗? ——它太短了(他在塔上标记下尺子所达到的点,用一个小棍来测量剩余的部分,借此转化整体的高度)。——你能用这个(小的积木)来测吗? ——(他在塔上一步一步地移动积木,用大拇指标记下每一个位置。)它移动了13次(在另一座塔上他也这么做),*是相等的*。"最后,他被要求画下一条等于塔的线条,用那把短的尺子作为单位,计数1+1+1=3,最后还留下一部分的长度,加上3个单元,借此得以将长度转化。

弗尔(7;9) 反应类似。当给他一个小的积木时,他建立了一座由类似的积木构成的塔,这样就把小的积木迁移成了中介:"如果你只有一块积木呢? ——*我可以移动它*(他将小的积木翻滚着贴着复制品移动,再将翻滚的次数迁移到模型上面,而翻滚的次数与作为测量单位的边的数量是相等的)。"

克里(8;3) 说:"*你必须找到测量它们的东西*。——怎么找呢? ——(他用一个长的棍子测量高度和宽度。)——用这个(小的积木)呢? ——*那很容易*。(他用它的四条相等的边翻滚,通过翻滚了13次测量他的塔。当测量模型的时候,他只是从底部到顶部一步一步地移动积木,标记下13个单位的长度。)"

瓦尔(8;6) 首先用一个长的棍子来测量,之后用一个小的积木作为单位:"用这个积木,你能得出和木棍测量一样的结果吗? ——*是的*(微笑着)。——这块积木到达木棍标记的地方走了几次? ——*13次,就像走塔的次数一样*。"

理解的获得可以表述如下:在亚阶段3A,如果尺子很短的话,被试经常用其他的物品来弥补差异(就像艾戈和弗尔,使用一把短的尺子和一个棍子)。但是这一行为并不等于单位叠加:它等于特定中间项与并列部分的建构,这无异于集中性或定性分割的加总。在亚阶段3B,中间项A经常且必要地被用来测量差异的长度和塔的长度,这暗示着其长度被作为一个单位进行了叠加。积木被作为1个单位A,差异$B-A=A'$等于$12A$,因此$B=13A(=A+A')$,之后这13个单元被迁移成另一座塔的高度。这样测量系统的进化也就比较明显了。单位叠加来源于切分与位置变化的综合,当单位应用于分出来的部分和整个物体的时候(也就是说,它们包含了单位A和长度A',A'代表的是部分长度A和总长度B之间的差异),它就发生了。

切分和位置变化的运算性融合既需要对位置变化分组的精确表征,也需要对参照点系统的精确使用,以区分连续的部分。参照点作为单位测量中位置变化的坐标,也提供了长度的数学指标。我们注意到,克里是如何沿着塔身翻滚了它的单位积木之后,又一步一步地将其沿着模型移动,轻而易举地将滚动的数量与边的数量等同的,这显示着他已经对位置的变化有完全的理解。如果要保证通过单位长度测量的一系列切分是连续的,且没有重合之处,那么参照点必须是精确的。这种内部参照系统,和上一部分描述过的外部参照系统一起,保证被试能够建立起一套足以协调位置变化的网络。它是逐级发展的最终阶段,从阶段1开始。在每一阶段,都可以看到参照系统和位置变化协

调的发展。参照系统的完全协调导致切分,进化过程的终结是它与位置变化的融合。

第八节　总结:位置变化以及测量问题的表征

在第一章中发现的结果的重要性以及它们与测量的基因分析之间的关系现在应该很明显了。在阶段1,位置变化的表征仅仅由唤起被试自身的行为所构成。它在视觉上等于一套无遮掩的感觉运动的格式。可能的参照体总是围绕着被试自己的运动,或者只看重终点的位置。因此,被试不是根据协调的参照体为标准看待自己的运动,他表现为一种对空间的系统的自我中心的歪曲。一个连续的发展过程导致了这些情况的迁移。在水平3B,一个被试能够重新建构他自己的位置变化,这跟数学集合的法则是一致的,并且是以外部客体为参照的。这些接下来得到了系统性的协调。在此之后,他有关空间的概念将自己视为许多运动客体中的一个。他将自己的位置整合进客观的空间集合之中,因此与运动的其他形式是类似的。

测量本身作为我们所关注的焦点,它首先表现为位置的变化,不管是在两个有距离的客体之间进行视觉比较,还是共同测量手段的运动,抑或是一把能够有效地将它们联系起来的尺子,都是这样。因此,所有学习到的跟位置变化有关的东西都可以应用于测量。较大规模的位置变化的表征被准确地学习到,这是因为它看起来是跟测量不一样的东西。被试在城乡的道路上重构他们的旅程和他们自发测量两座小的积木高塔的企图是类似的,这种类似性是惊人的。在开始时,测量是视觉性的对比,或者说是视觉迁移,通过眼睛的运动比较起点和终点,或者仅仅是比较终点,表现出明显的对空间自我中心的态度,而眼睛运动的程度以及可能的参照系统则完全被忽略了。此外,他们有时只关注于塔的绝对顶点而忽略基础高度的差异也证实了这一点,因为对他们而言只有终点才是重要的。在发展过程的最后,即水平3B,测量由测量单位的叠加所构成。这一测量单位是位置变化的中间项,它通过参照两个相互连接的参照系统而集合化。一种是外部系统,它由两座塔及其周边的环境所构成;一种是内部系统,它由中间项上面的一系列参照点所构成。这里,最终的阶段也是对自我中心的视觉阶段的逆转。像视觉迁移、手动迁移和身体迁移这样的被试自己的运动被逐渐去中心化。它们的功能被中介物所替代。在测量变得客观、具有运算性以及连贯性的过程中,自我中心让位于分组。同时,客体现在成了空间框架的一部分,它包括被试自己的运动。这一框架是静止的、可协调的,被试被认为是许多运动的客体中的一个。

在整个发展的过程中,都存在一种功能上的连续性。它将各种各样的测量方法联系起来,从视觉比较到运算性的测量。同时,原始的测量方法伴随着更为先进的方法同时存在,但是却不断被先进的方法所修正。

阶段1当中年龄小的儿童存在一种对视觉比较夸大的自信。他们的测量可以总结

为一句话：我看到了，我能看出来。当他们开始注意到基础水平的差异的时候，这种信念被颠覆。结果，这两种感知领域通过手动迁移而整合（亚阶段2A）。当要求儿童在不移动塔的情况下比较它们时，儿童进行了手动迁移运动。他们调节手的运动以适应塔的大小，模拟塔的高度。他们处于一个发现自然中间项以弥补现存的眼睛和手的运动等中间因素的过程之中。通过身体迁移（亚阶段2B），他们获得了共同测量工具的概念。因为身体迁移是不精确的，他们迟早都会放弃它。但是，通过模拟而产生的映像导致了符号化客体的产生。这一客体之所以是符号化的，是因为它在某种程度上仍然是待比较的物体的复制，但是它同时也是独立于被试身体的一个共同的测量工具（连接水平2B和水平3A的中间阶段）。现在，直觉迁移在表面上被逐渐调整。结果，他们达到运算的可逆性。这暗示着质的水平上的过渡（亚阶段3A）。当过渡扩展至包括了总长度的各部分的关系的时候，由单位叠加所构成的测量系统的进化也就完成了（亚阶段3B）。

行为上的较高级的方法会对感知和行为的原始方法产生回溯效应。首先，处于表征水平的位置变化的集合不断进化，能够容许被试的行为做出更大的调节。第二，当视觉迁移导致更为高级的比较和测量方法的出现时，它也经历了转化。刚开始的时候，视觉迁移对关系的迁移一无所知，它还没有整合进协调系统之中。渐渐地，它开始纳入复杂关系的迁移，这些关系进一步参照不断稳定的坐标系统进行组织。这解释了研究中所发现的儿童感知比较的矛盾之处。很少有儿童能够较好地判断那些倾斜程度不同的线的长度，因为他们缺乏感知上的协调，而年长的儿童在运用迁移关系的时候则能较好地判断它们的大小，因为隶属于思维的组织性的运算对感知活动产生了回溯性的影响，并且协调系统现在已经概化到了容纳感知现象的程度。

表征水平位置变化集合的发展以及坐标系统的进化，这是测量行为发展的两个基本过程。但是，还存在一些跟测量本身有关的特殊问题，这些将构成我们的下一主题。位置的变化本身在第一章和《儿童的运动和速度概念》的第一至四章也得到了足够的论述；坐标系统在《儿童的空间概念》的第十三、十四章以及第十五章也有所涉及。本章旨在引入跟测量方法相关的问题，即欧几里得测量学问题。

这些问题中最重要的一个问题是，长度及距离的守恒问题。以上我们概述的比较的连续模式除了构成位置变化的进步之外，还构成了长度守恒的不断进步。这种守恒最终是如何达到的呢？要具体地回答这个问题，我们必须首先研究距离本身的守恒，之后是带有位置变化的长度的守恒，最后是构成连续直线的连续直线的守恒，这条连续直线能够拆分成一条虚线。只有那个时候，我们才会发现长度守恒的精确关系，它来源于质的水平的运算，尽管它们只包括一个坐标系统以及单维的测量。

下面的四章致力于研究长度的守恒，它是所有测量基本的先决条件。接着是线性测量与面积测量和固体测量的关系，我们已经看到，对宽度的测量跟对高度的测量是多么不一样。一般地，我们可能会问，构成面积测量与实体测量的阶段是什么。再次，我

们还要从守恒开始讲。最后，思考《儿童的空间概念》中角度分割的研究以及本研究中将位置变化的表征和坐标系统联系起来的发现，我们将会检验角度的测量问题以及曲线形式的表征问题（它们与测量和运动的关系）。

李占星、程南华译，朱莉琪审校

第二篇
守恒和长度测量

这部分研究的第一部分致力于在一个广阔的框架下探讨儿童如何协调位置的变化以及他们如何进行测量。这个更广阔的情境需要我们将欧几里得测量的详细分析牢记于头脑中。

第一个问题,正如在其他章节所见到的,是关于守恒的问题。要测量一个物体长度,就得移动另一物体,已知长度的物体不会因为移动而改变长度。守恒是优先于测量先发展起来的,还是测量的结果?如果是前者,守恒的心理运算和测量的心理运算之间存在什么关系?为了回答这些问题,我们必须首先探讨距离恒常性以及数量水平上的长度,只有明白这些,我们才能探讨它们是如何被测量的。实验室的情境需要更加结构化以便测量过程中所包含的多种心理运算能够被清楚地描述出来,而不是像以往一样,让被试随意选择适合他们自己的测量方法。

第三章　重构距离关系

在分析守恒和长度测量之前，我们需要探讨儿童如何判断距离以及他们如何获得守恒这一概念。惯用的研究方法可能并没有对距离和长度的概念做出明确区分。但是在心理学层面上，随着儿童年龄的增加，它们却指向两种完全不同但又相互依赖的情境。因此，我们必须分开讨论它们。一方面，存在一个物体线性长度的问题，比如木棍，或者我们散步的距离。我们应该使用"长度"这一术语来指代这种长度类型。因此，"长度"这一术语指的是填充满空间的大小，例如物体这一类。"距离"应该被用来指代物体的线性空间，例如未被占用的空间。根据心理学的观点，距离问题与长度问题不同，不过在逻辑上它们是相互依赖的，因为距离是一段区间的长度，而长度是一个物体走过的距离。然而，作为心理学家，我们可能会问，儿童是否从开始就能够辨认出这两者之间的相互依赖性，如果不是，他们又是如何意识到的。

因为距离的概念表示了间隔或是未被占用的空间，因此一项研究的价值应该体现在其不仅能够描述儿童如何解决测量问题，而且也能够测查其如何从整体上建构欧几里得空间。当儿童掌握距离概念后，能够将空间看成是一个共同的媒介，这其中包含着许多客体及其空间关系。这些关系使得儿童能够形成一个协调的坐标系，也使得计量系统的出现成为可能。当儿童还没有掌握距离概念时，空间作为一种对许多物体都适用的媒介，他们将无法对其进行协调。在相互分离的客体内部或是相互分离的形状中，可能还存在关于空间关系的一些想法，但是这些并不包含对测量的理解。

距离概念的建构使得儿童从基础的拓扑学关系过渡到欧几里得空间。因此，距离概念对于关系的产生非常重要，而关系是测量的发展和儿童对坐标系细化过程的基础。正如在第二章中所讲到的，这些加工过程是相互依赖的。在第四章中，我们发现在儿童能够重构投射的和欧几里得关系之前，就已经掌握了基础的拓扑学关系。拓扑学关系关注的是单一形状的空间特性，而欧几里得关系能够将任何数量的形状统一整合在一个共同的空间媒介内。因此，当前关于欧几里得测量发展的研究，必须从测查儿童对距离概念的发展过程入手，因为这能够为空间作为共同媒介跳出原始性的拓扑学直觉提供必要的条件。没有这种共同的媒介，就不会有测量的发生。

有人可能会认为距离概念来自于直觉。也有人可能会认为，如果距离概念意味着某些模糊和难以区分的知觉性估计，那么这一概念就必须依赖于测量而不是其他的一些东西。人们相信距离的重构导致了一个问题，这个问题不仅与知觉性的距离相分离，

而且也与测量相分离，距离的重构本身就是一种测量情境。事实反复地证明，即使是一个长久存在的知觉关系，也无法充分保证儿童在表征水平上对它们进行重构。因此，在第六章中我们发现，虽然很小的儿童已经能够将即兴画出的线条知觉为直线，但是直到很晚（大约7岁）他们才能画出投射性的直线，虽然这一任务是基于知觉性的“瞄准”。重构[1]意味着对知觉行为的运算性的协调。因此，儿童在头脑中表征的距离可能与知觉距离存在很大差异。如果儿童在6.5—7.5岁之间不能重构一条直线，那么我们就有充分理由认为他们也将不能重构距离，因为距离是两点之间的直线间隔。

是否表征的距离一定要基于测量？这个问题只能通过心理学实验加以证明。我们没有任何先存的理论基础来说明表征距离一定要基于测量。如果*A*、*B*和*C*是已知的一条直线上连续的三个点，那么，不用测量，我们就能够推导出*AB*之间的距离小于*AC*之间的距离。这种推导遵循了关于*ABC*三点顺序的知识以及对*AB*和*AC*之间距离的理解，*AB*和*AC*作为间距来说，是对称关系，但是这与点和点之间的顺序相关，而后者是一种非对称的关系。*AB*和*AC*之间的距离将会保持固定，因为$AB<AC$，然而，许多项目*X*、*Y*等，是在*A*和*B*或者*A*和*C*之间内插进去的。

当新的项目被插入进去后所导致的距离守恒问题，是这一章我们将要探讨的内容。我们会探讨儿童对距离对称性这一特征的理解：$AB=BA$。在一个公共的空间媒体中设置*A*、*B*、*C*三个点，对于被试来说并没有任何困难。但是对于那些不能从一个相互依赖的空间参照系统角度将物体彼此联系起来的被试则会感到困惑，他们的理解局限于对相邻和顺序的拓扑学关系，因为他们对于直线或是坐标系一无所知。从原始的拓扑学观点出发，当两个物体之间加入了第三个物体后，它们之间的关系会发生改变，因为儿童不能理解拥有不变的几何特性的“空的空间”这一概念。$AB=BA$这一特点在每一个发展水平上似乎都是不证自明的。具有直觉性和不可逆性思维的儿童在顺序*AB*和顺序*BA*之间看不出任何共同点，而是会夸大地点*A*和*B*在同一水平面上差异。距离的概念假定，空间是各向同性的。然而，知觉的空间不是各向同性的，而且也没有任何证据表明非常年幼的儿童的空间表征能力与此存在差异。

第一节　方法和结果概要

主试首先在桌子上放置两个等高的铅制人物，或者两棵等高的树，它们之间的距离大概是50厘米。为了让儿童明白问题的内容以及所要使用的语言，主试要求儿童说出它们是否“在彼此附近”或者“距离很远”。要尽力避免动作或者移动的距离对儿童产生参照作用，这一点非常重要，在研究长度时也是出于这种考虑。在整个实验过程中人物

---

① 我使用的“重构”和“表征”这两个术语是等价的，法语原文是*représenter*–E.L.。

应该放置在相同的地方。如果儿童对于这一点有任何疑问，那么就把人物换成树木。当儿童回答它们是在附近或是距离很远后，研究人员把一个硬纸板缓慢地放在两个人物或是两棵树之间。纸板比人物稍高一些，而且人物仍然待在原来的地方。主试要询问儿童，两个人物是否还是距离较近或是距离很远，这依赖于儿童以前的回答，而且会要求儿童给出理由。一个儿童说距离已经发生改变，但是如果纸板上存在一个洞的话，距离就仍然保持不变。因此，研究人员在纸板上加了一个洞，考查儿童在这个洞开着和关闭两种情况下对距离守恒的理解。接下来，纸板被移开，代替它的是一个大的立方体，同样也比两个人物高。儿童再次被询问两个人物之间的距离是否保持不变。通过插入几块砖，这种情境可能会发生改变，这些砖没有人物高，并且在两个人物之间形成一个"篱笆"，或者通过使用低矮砖块形成一个"地毯"的方式来覆盖整个间距。

对于对称性问题，主试只需要简单询问儿童一个问题："从这儿到这儿(*AB*)和从这儿到这儿(*BA*)一样近吗？"实验者用手指演示*AB*和*BA*之间的距离从而避免儿童有任何的误解。接下来，两个人物被另外两个人物所代替，其中*B*是*A*的两倍高。现在，这两个人物面对面放置，实验者问儿童，*B*到*A*的距离是否与*A*到*B*的距离一样。最后，其中一个人物的高度高出桌面*50*厘米，以便于两个人物处于不同的水平面上。任何向上或是向下的动作都是要避免的。实验者会再次询问儿童*AB*的距离是否等于*BA*的距离。

儿童对这些问题的反应可以分为三个不同的发展阶段，第三个阶段大约出现在7岁之后。几乎所有6岁以下的儿童，甚至一些年龄更大的，都认为当有第三个物体进入两个人物或是两棵树之间后，它们之间的距离发生了改变。绝大多数儿童认为距离变小："它们离得比以前更近了。"少部分儿童则认为它们之间的距离变大了，总是受到物体移动的影响。当他们只考虑距离时，他们都同意两者之间的距离变小了。唯一的例外发生在距离被小砖块形成的"毯子"所覆盖后。儿童的解释如下。

在第1阶段中，大约是4—5岁，儿童不能将被纸板分隔的两个间距整合成一个整体，因此，纸板的加入导致儿童不能理解*A*和*B*之间的任何距离关系。儿童仅仅能够考虑整体中的一部分，从这一部分开始，他会发现距离减小了。当两个人物处于不同的水平面上时，儿童就不能确立它们之间的任何距离关系，而仅仅是从他自身的角度判断它们之间的距离。

在第2阶段中，大约从5岁到7岁，无论什么物体被插入两者之间，儿童都能够明白*A*和*B*之间的整体距离。但是在*2A*阶段中，当纸板被放在两个人物之间后，儿童认为*A*和*B*之间的整体距离减小，因为纸板本身占用了一部分空间，因此，这部分空间必须要从*A*和*B*的整体距离中减掉。纸板的宽度不是分隔*A*和*B*距离的一部分，因为它是填充满的空间，而非空的空间。当两个人物处于不同的水平高度时，儿童的反应模式表明他的空间概念仍然处于对称性的第2A阶段：它与穿过纸板所耗费的努力关系密切。第2B阶段产生了两种不同的反应模式，这两种模式都是起媒介作用的。当纸板被插进来之后，两者中没有距离守恒，但是两个人物处于不同水平层面引起的差异并没有改变它们

之间的对称关系,而当儿童意识到守恒问题后,他们便不再认为两个人物是对称关系。

7岁之前的儿童很少能够达到第三阶段,这一阶段的儿童能够明白,尽管有别的物体插在两个物体之间,但是它们之间的距离是守恒的,而且尽管两个物体处于不同的水平面上,但是他们之间仍然是对称关系。

因此,距离的概念在变得直线化的同时,也变得可运算(《儿童的空间概念》第六章,第一节),而且当直线的运算顺序被概括化并形成一个可逆的集合后,距离概念也就越发重要(《儿童的空间概念》第三章)。由于研究者假定距离守恒对长度的概念非常重要,我们将详细探讨这些反应,因为这种发展预示着儿童测量概念以及欧几里得概念的全面发展。

第二节 阶段1:整体距离的缺失

第一阶段的特征就是儿童不能将两段距离AS和BS整合到一起(A和B代表两个人物,S代表纸板),因此,当纸板被插进来之后,A和B之间的距离关系就停止,不再有任何意义。而且,当A和B处于不同的水平面上时,它们之间的距离不是对称关系,有时甚至当A和B处于相同水平面上时,他们也会认为两者之间的距离关系不是对称的。

托(4;2) 主试把纸板放置在两个人物之间:"*它们离得更近了。*——为什么?——(没有回答。)——仔细看一下。它们是比以前离得更近了还是和以前一样?——*更近了*(指向AS的距离)。——那么如果这样呢(把纸板移开)——*离得更远了。*"

"从这儿到这儿(从A到B)和从这儿到这儿(从B到A,没有纸板且两个人物处于相同的水平面上)的距离是更近了还是更远了?——*如果这样的话,更远了*(AB)。——为什么?——*它们之间的距离远。*——如果是从这儿到这儿(BA),它和刚才一样远吗?——(没有回答。)"很明显他不能理解实验者的问题,并且只能从自身的角度出发来思考距离。

"现在,像这样,(B有50厘米高出A),从这儿到这儿(AB)和从这儿到这儿(BA)是一样远吗?——*如果是这样的话,就变远了*(指着B)。——为什么?——*因为另一个变高了。*"他从自己的角度来进行判断。"这些怎么样(A矮C高)?——*这样的话AC之间变远了。*——为什么?——*因为这个高,这个矮。*"

克莱(4;9) 研究人员在两个人物之间覆盖了一系列小积木:"*它们离得近了。*——(实验者移走一些小积木。)——*它们仍然是变得近了。*——(空间里什么都没有了)这样呢?——*它们离得远了。*——(空间再次被填充满。)——*非常近。*——(只留下了一个小积木)它们彼此是离得更近了还是更远了?——*离得远了。*——(积木被移走。)——*远了。*——(呈现纸板。)—*更近了。*——为什

么？——(没有回答。)"他的这些判断非常一致，虽然他还不能对此进行解释。当纸板插入进来后，他认为距离的明显减小很有可能是由于他不能构造距离。另一方面，比人物矮的小积木的插入再次导致儿童认为距离变小，但是这次是由于填充满的空间而非空的空间。"从这儿到这儿(*AB*，物体被移开)是变得更近了还是更远了？——变得远了。——从这儿到这儿呢(*BA*)？——变远了。——跟另外一个是相同的吗？——不是。——为什么不是？——(没有回答。儿童没有理解这个问题。)"

西(4;11)的回答与其他儿童类似，但是他明显地指出："当没有纸板时，距离变远了，因为当纸板在时，距离只有原来的一半。"显然，这里没有任何关于距离的成分。

丹(4;11)　两棵树："*它们离得很远*。——现在(插入纸板)，它们还像原来一样远吗？——*不是，没有那么远了。这个靠近纸板，这个也靠近纸板*。"因此，*A*和*B*之间整体的距离关系随着纸板的插入消失了，"但是它们不是变得更远了吗，就像它们以前一样？——*不是，它们都靠近这个纸板*。"

当两个人物处于不同的水平面上时，它们之间的距离是不相等的，因为人物*B*离儿童自己更远一些。实验者坚持想要知道*AB*和*BA*之间的关系。德恩这样解释："这两段距离不一样，因为处于低处的这个人看到这个人的脚，而处于高处的这个人看向这个人的眼睛……对于处于低处的这个人来说，距离更远，因为它更高。"他的话表明他已经开始确立起两个人物之间的关系，但是这种关系是不对称的。

相比于第2阶段儿童的反应来说，这些儿童的反应似乎不那么有趣。但是这些反应值得认真探讨，如果我们想要清楚地知道它们与第2阶段反应的差异究竟在哪里。在第2阶段，儿童仍然不能明白距离的守恒，但是他们能够把从第一个物体到纸板这一局部的距离*AS*以及从纸板到另一个物体的距离*SB*整合成一个整体来看待。

首先，我们需要指出，处于第1阶段的儿童不能将两个间距*AS*和*SB*整合到一起从而获得一个*ASB*之间的整体距离。他们为什么不能这么做？因为他们的直觉是不可逆的，因此运算性的整合也是不可能的，这就意味着一件物品一旦被分割成不同的部分，儿童将不能重新将它们建构成一个整体[①]。然而，激发儿童直觉性的情境可能是为了强化这种不可逆性或是他们使得这种情境不起作用。在当前的情境中，这种不可逆性一方面被儿童关于距离的概念所强化，例如"远"和"近"等术语的使用，另一方面则被实验装置的表面知觉性特征所强化。距离是一个空的空间，例如，在这个空间内没有任何固体的实物；当纸板*S*被放置在*A*和*B*之间的那一刻，在*A*和*B*之间就已经没有距离关系了。唯一的距离关系存在于*AS*和*SB*之间，而这两者不能整合在一起，因为物体*S*横亘在中间。德恩的回答清楚地证实了这一点，他说："这是一段距离，这也是一段距离。"并

① 参见《儿童的数概念》第七章，一个存在逻辑关系的整体B不能与其自身的某个部分A进行比较，因为一旦B被移动，头脑中的直觉只会反映出留下的部分A′。

且更加明确地补充说:"这两个小人(A和B)都靠近这个纸板。"因此,它们之间的距离不能变远也不能变近。这一点在早期关于拓扑学关系优于欧几里得关系的讨论中已经明确证实(《儿童的空间概念》第一至五章),处于阶段1的儿童通过接近性进行推理而不是通过扩展到非邻近性物体的方式进行推理。当两个人物通过一些小砖块形成的地毯组合在一起时,儿童的反应预示了下一个阶段的到来;因此,克莱坚持认为,相比于两个人物之间的距离被小砖块部分填充,当两个人物之间的空间是空的时,两个人物之间的距离更远。

最后,我们来讨论距离的对称性特征,$AB=BA$(没有干扰物体),我们必须区分两种情境。如果A和B处在相同的水平面上,儿童不能理解这个问题,即从A到B的距离是否和从B到A的距离一样,那是因为他们对于顺序关系的概念是不可逆的。在其他地方我们曾描述过一个儿童发现距离对称性本质的加工过程。在6岁7个月时,这个儿童从对立非对称性角度谈到了对称性:"劳沙要比拉萨格更远,而拉萨格也比劳沙更远。"然后实验者要求该儿童测量一段距离,一次是从A到B的方向,另一次是从B到A的方向,儿童说:"那就是我想要说的,它们是一样的!"[①]在第1阶段中,也就是从4岁到5岁,儿童会以一种既定的顺序思考距离问题,无论是AB还是BA,他们不能将这些距离与其被反转后的距离进行比较。另一方面,如果其中一个的终点高于另一个,不论因为它本身更高还是因为它被放置在更高的位置,那么它们之间的比较是有意义的,但是这种意义是对称性的一种直接功能:距离向上的方向上似乎比向下的方向上看起来更远一些(*Le movement et la vitesse chez l'enfant*, ch. Ⅳ, §1)。德恩提供了关于这种反应的一个清楚的例子。但是大多数儿童都是从自身的角度来判断物体之间的距离,因此不能将AB和BA放在一起进行比较。

第三节　亚阶段2A:整体距离的非守恒性,距离关系的不对称性

在第2阶段中,我们发现了问题的本质。儿童能够比较A和B之间各自的距离,甚至在纸板被放入之后仍然可以进行比较。虽然如此,他们仍然认为由AS和BS进行加法而成的总体距离必须随着S的厚度而变化。同时,A和B之间的高度差异使得儿童产生了一种A和B之间距离是非对称的信念。

凯尔(4;6)　两个人物,纸板已经被放置在相应的位置上:"它们是离得更近了还是更远了?——*离得更近了*。——它们离谁更近了?——(儿童把手指从一个

① 参考《儿童期的游戏、梦和模仿》。

人物移动到另一个人物，跳过了纸板。）——现在呢（纸板被移开）？——它们离得更远了，因为之前你把纸板放在它俩中间——为什么它们离得更远了？——因为现在它们彼此看着对方（只有从两个人物之间的空间现在为空的角度来理解，这个答案才是有意义的）。——现在呢？（用一个烟盒来代替之前的纸板）——它们离得更近了。——为什么？——因为你把盒子放在了那里。”

安诺（5;3） 两个人物，没有纸板：“它们两个离得很近。——（放入纸板）它们是否还像刚才那样近？——它们离得更近了。——（纸板上的窗户被打开）这样呢？——它们离得更远了，因为这里有一个洞。——它们为什么离得更远了？——因为之前这个洞是关着的。——（重复实验。）——当你把窗户关上的时候它们离得更近。——这样呢？（呈现烟盒）——离得更近了，因为它更厚！”

戴尔（5;6） 没有纸板：“它们离得很远。——（呈现纸板）现在它们和刚才一样远吗？——它们离得没有那么远了。——（纸板上的窗户被打开）这样呢？——它们离得远了，因为窗户打开了。——（呈现烟盒。）——这样的话就不是很远，因为这儿有一堵墙。”

大的人物A和小的人物B，没有纸板：“当A这个人看向B这个人，和B这个人看向A这个人，这两者的距离是否一样远？——不是。——为什么？——对于矮个子的人来说更远，因为另一个人很高。”

兰（5;11） 人物之间填充满小砖块：“它们离得很远。——（去除一块砖块）现在它们和刚才一样远吗？——它们离得更远了。——为什么？——因为你拿走了一块砖，有更多的空间。——（拿走两块砖。）——仍然还是很远。——（空的空间）这样呢？——离得更远了。——那么它们之间的距离一直在变化对吗？——是的。——（一块砖再次被放回。）——离得更近了。——（砖块被移走。）——离得更远了。——（呈现纸板。）——离得更近了。”

两个人物处于相同的水平面上，两者的高度相同：“当A这个人物看向B和B这个人物看向A时他们的距离是否一样远？——A这个人物看得更远，这里有更多的空间。——为什么？——B这个人物更远，A这个人物更近。”（兰是从他自身的角度进行判断，尽管他能够很好地理解实验者的问题）。

两个人物，高度相同但处于不同的水平面上：“A这个人物看向B和B这个人物看向A的距离是否一样？——向下看的时候离得更远，因为他站得更高，看起来更大。——（呈现大小不同的人物，处于相同的水平面上。）——从大的看向小的更远，因为他更大。”

吉恩（5;11） 在思考空的空间变得更小时给出了比较少见的答案。无论问题是什么，他都以同样的方式开始，因为他受到运动思维的影响：“（两个人物，空间中填充小砖块。）——它们离得很远。——（移走一个砖块）这样呢？——离得更近了。——（每次移走一个砖块，每一次吉恩都回答）离得更近了。（放回一个砖块。）——离得更远了，因为你把砖块放回来了。——为什么？——因为你把砖块放在了那儿……噢，不对，如果你把砖块放在那里，它们离得更近了。——为什么？——因为空间变小了。——（移走所有的砖块。）——离得更远了，因为现在它

是一条长长的路。——如果我把这个纸板放在这里,他们之间的距离还和原来一样远吗?——不,它们离得更近了。——(移走纸板。)——离得有点儿远了。———(在实验者和儿童中间放置一把椅子)我们还和原来一样远吗?——是的。不,离得更近了。——那么我们之间的空间发生了变化吗?——是的,因为你在这儿放了一把椅子。"最初,吉恩是从路程包含的长度这一层面进行思考,但是他突然改变了想法,他认为当一个实体物体被放置到两个物体中间后,他们之间空的空间减小了。

两个人物,高度相同但处于不同的水平面上:"对于较低的那个人物来说更远。——为什么?——因为他需要向上看。"

弗里(6;0)　非常明确地给出了原因。"没有纸板时两个人物离得很远。——(放入纸板)——除去纸板所占用的极小的空间(指示纸板的宽度),他们仍然离得很远。"对称性:"向上看的话离得更远。"

菲斯(6;1)　"(没有纸板)他们两个离得远还是近?——有点儿远。——如果我把纸板放在这里,还是和刚才一样远吗?——不,离得更近了。——为什么?——纸板把它们分开了。——那么他们是否还和原来一样远?——更近了。——如果把烟盒放在这里呢?——离得更近了,因为它很宽。——加上这座桥呢?(很宽但是下面是打开的)——相比于盒子的情况,离得更远了。——这样呢?(空间是空的)——离得远。——把纸板放在这里呢?——更近了。——为什么?——因为这里有厚纸板(指示纸板的厚度)。——(加入另外几个物体)这样呢?——更近了。——(两个人物之间填充满小砖块。)——仍然是离得更近了。——比什么都没有的时候更近了?——是的。——为什么?——因为它更满了。"

*AB*和*BA*的距离,*B*被抬高。"从*A*看向*B*的话更远。——为什么?——因为它需要向上,而另一条路是向下的(*BA*)。——如果我把一根木棍放在它俩之间,那么向上和向下的距离是一样的吗?(*A*和*B*之间跨越一把尺子的距离)——向上的话更远。"

弗兰(6;2)　"它们之间的距离很远。"当两个人物之间没有任何东西时。而当纸板被插入之后它们的距离就更近了。

人物*A*(蓝色)和人物*B*(红色)高度相同,且处于同一水平面上:"从*A*看向*B*和从*B*看向*A*,距离是一样的吗?——不,对于蓝色的这个人来说更远(*AB*与儿童自身的角度相关)。——(人物*B*被抬高。)——对于高处的这个人来说更远。"然而,当*A*和*B*通过一根木棍被隔开后,弗兰说:"对于低处的这个人来说更远。"

保尔(6;2)　开始时从运动的角度进行思考,和吉恩一样。当纸板上的窗户被打开后,他说:"现在它们能够从这里穿过,离得更近了。"但是后来,当纸板被移开后,他又改变了他的立场:"离得更远了,因为这里空间更大……"

迪夫(6;4)　没有纸板:"它们离得很远。——(呈现纸板)这样呢?——他们离得更近了。——(加入小砖块。)——又近了一点点。——(填充低矮的砖块。)——更远了。"

两个人物A和B，大小相同，处于同一水平面上："这个人物(A，靠近儿童)要看得更远。——那个呢？——是的，它们是一样的！——(B被放置到一个高的位置上。)——对于这个高处的人来说变得近了一点。——为什么？——因为对于处于矮处的人来说要看得更远，它必须要仰着头看。"

马尔(7;0) *没有纸板："它们离得远。——(加入一个小砖块。)——它们彼此的更近了一些。——为什么？——因为你在这里放了一个砖块。"*

A和B处于相同水平："AB和BA不同，对于红色的人物来说更远(A靠近儿童)。——另外那个呢？——是的，它们一样的！——(B被放置到高处。)——对于高处的人来说更远，不，对于低处的人来说更远。——这样呢？(大的和小的人物处于同一水平面上)——对于小的人物更远一些。——为什么？——因为他长得小。"

虽然这些儿童还不能明确地解释他们确立起来的这些难以觉察的关系，但是从总体上来说他们的反应已经接近完美。

不像第1阶段中的那样，这一阶段的儿童能够建构关于人物A和B之间距离的整体关系，而不是局限于每个人物和纸板之间的分割的关系。他们推理的整体特征使得这种区分更加明显：因此菲斯解释说纸板分割了两个人物，它们变得更近了；或者"它们仍然离得很远，除了这里有一处占用极小空间的纸板"等。通常，儿童会使用一种让关系的整体本质外显的方式来表达："它们之间离得远。"弗朗说。而马尔则说："它们彼此离得更近了，因为你把一个砖块放在了这里。"通过整合AS和SB来确立A和B之间的整体距离并不能说明儿童进行了必要的心理运算。一种直觉性的联结已经足够，因为A、S和B同时都能够被看见，而SB直接处于AS的延长线上，而且A和B从头至尾一直处于静止的状态。

然而，虽然他们能够忽略AB，可以细分为AS和SB，从而意识到A和B之间存在一种整体性的关系，但是他们相当确定纸板S的加入改变了端点A和B之间的距离。几乎所有的儿童都认为AB之间的距离并非像人们预期的那样有很大程度的增加，而是随着纸板的厚度同等程度地减小。吉恩和博尔是唯一最初坚持认为两者之间的距离由于纸板的加入而变大的，但是随后他们就从它所包含的路程这个角度改变了想法：在两个人物中间插入纸板后必须要绕道，而没有纸板的时候可以"直接穿过"(博尔)。在我们学习理解接近性中的拓扑学关系和儿童重构空间时的顺序所起的作用(《儿童的空间概念》第一至五章)之前我们应该弄清楚，尤其是要在我们发现儿童对于位置变化的概念如何依赖于他们的顺序概念(《儿童的运动和速度概念》，第一至五章)之前，我们期望所有的儿童都以一种与吉恩和博尔类似的方式进行反应。但是这些儿童会在一段时间之后改变自己的想法，与他人的想法一致，即认为两个人物之间的距离减小。他们的推理如下：距离是给定顺序的两个物体之间的间距，但是由于间距只能意味着空的空间，因此，纸板的插入减少了间距，因为它占用了与它宽度等量的空间。

弗里以及上述儿童给出的解释都很明确:"除去纸板所占用的极小空间,它们仍然离得很远。""极小的空间"指的是纸板的厚度。更多的儿童以一种较不明显的方式给出了类似的答案。弗里反复地提到纸板的厚度,两个人物之间插入纸板后,他说:"由于纸板很厚,所以它们之间的距离减小了。"而几个小砖块加入后他说:"它们仍然离得很近,因为它更加完整。"吉恩改变主意后说:"当你把纸板放在这里之后它们离得更近了,因为它们之间的空间减少了。"兰也说:"当你把砖块拿走之后它们离得更远了,因为有了更多的空间。"

儿童将距离和"空地"或者是"空的空间"等同,空的空间与物体占用空间的维度相对。这是间距的维度而不是位置上的物体。儿童对纸板上窗户开与关的反应提供了一个极好的解释。因此,当窗户关着的时候,戴尔说:"它们离得不远。""当窗户打开的时候,它们离得远。"在这一点上所有儿童的回答比较一致,好像纸板宽度的出现与消失能够改变从A到B的直线距离!对于这些儿童来说,通过一个洞画出的一条直线构成了一个更长的距离,因为在它的整个长度上空间是未被占用的;而当一条直线经过一个纸板时,他们的距离就减小了,因为只有那些空的部分才有资格被称为"近"或者"远"。

位于其他物体之间的某个物体可能被儿童描述成"长"或"短","宽"或"窄"等,这些都是长度关系。同时,它也可以被说成距离另外一个物体"远"或"近",这些都是距离关系。但是后者只能应用于未被占用的空间,它们不适用于占据空间的物体。因此,在这一水平上,距离和长度并不能进行组合。因此,第一个问题就是为什么在儿童身上距离和长度仍然处于一种不能协调的状态?对这个问题的回答依赖于对由同一批儿童反应所引出的第二个问题的回答,为什么距离是非对称的,即使当这些距离被局限在未被占用的空间里?

即使人物A和B大小相同,且处于同一水平面上,处于第2A阶段的儿童还是会经常否认AB的距离和BA的距离等同。然而,不像第1阶段的儿童,第2A阶段的儿童能够理解实验者的问题。那么原因只可能是,从儿童自身的角度出发,顺序AB,从"近"到"远"不能与顺序BA的从"远"到"近"进行比较。迪夫和马尔的反应显示出这种理解的端倪,他们能够意识到A和B之间的相互关系使得它们之间的顺序是可逆的,AB可以转变成BA,以及AB和BA距离的等同性。有一些儿童,比如菲斯,认为"从低处往高处看更远,因为它需要向上",而另外一些儿童,比如弗朗则认为"对于高处的人来说更远,因为它更高"。当人物大小不同但处于同一水平面上时,情况相同,马尔说"对于小的人来说更远",因为儿童自己就在向上看。当两个人物处于不同的水平面上时,弗朗一直坚持认为,两个人物之间的木棍"对于位置较低的那个人来说更大",这立即就显示出一种对长度距离的非守恒性。

我们现在要理解距离和长度的非组合性,长度本身的非守恒性和不对称性。所有的这三种现象都起源于相同的基本推理过程:顺序和位置变化这两种集合化过程都是不完整的;由于其非运算性特征,在所有的情境中,它们都不容许组合或者逆转。长度

是某个位置上客体的一种特性，而距离是一种空间特性，对于这一阶段的儿童来说，它们两个是异质性的概念，因为它们缺少包含两者的公共空间的概念。正如在第一章和第二章中所观察到的，儿童还未形成一个坐标系，在这个坐标系中，一方面它们可以指代占用空间的物体，另一方面则可以指未被占用的空间。建构这种系统的第一个阶段是辨别，即使实体性的物体可能会被放置在各种各样的位置上，每一种都会占用一个恒定的位置，不管它是填充满的还是空着的，因此可以与未被占用的空间进行比较。然而，我们不止一次提到[①]，只有通过对顺序关系和位置变化关系同时进行集合化，儿童才能够发现被移动的物体落在了静止位置的后面。这种发现过程使得儿童能够将空间构思成一个容器或者一个独立于其内容的参照系统。直到儿童7岁时集合化过程才完成。在当前的这个阶段中，儿童从物体边界顺序的角度对物体之间的距离进行长度判断，从物体之间直觉性间距的角度对距离进行判断。他们不能比较长度和距离，因为他们缺少一种整体性的对顺序和位置变化进行集合化的能力。他们不能感知物体之间位置的恒等性，未被占用的空间也导致他们难以理解距离的守恒。缺少集合化的能力，因此他们在描绘物体的特性时就不能进行可逆性运算，也因此他们认为给定顺序的物体之间的间距*AB*与反转顺序的相同物体之间的间距*BA*是不同的。

第四节　第2B亚阶段类型A：整体距离的非守恒性，距离关系的对称性

处于第2B阶段、属于类型*A*的儿童，与处于第2A阶段的儿童一样，认为距离和长度是异质的，距离指的是未被占用的空间，而长度指的是固态的实物。因此，在端点*A*和*B*之间插入的纸板*S*导致了儿童不能理解*AB*之间距离的守恒性。另一方面，他们开始能够理解间距的对称性特质，并意识到*AB*和*BA*距离的等同性。

贝尔(5;7)　“(*这两个人物*)*离得远*。——如果我把纸板放在这里呢？——*它们离得没有那么远*。——为什么？——*因为它们之间有纸板*。——这两个人物移动了吗？——*没有*。——(把纸板移开)如果这样呢？——*它们离得更远了*。——(纸板放回来)这样呢？——*离得没有那么远了*。——为什么？—*如果纸板上有个小窗户，那么它们之间的距离就不会变化*。”正是贝尔这种自发的回答导致了在纸板上设置窗户这一环节：如果窗户开着，它们之间的距离“变远”，如果窗户关着，它们之间的距离“变近”，因为必须要考虑纸板的厚度。

相互的距离：有两个人物*A*和*B*，高度相同且处在同一水平面上。“*这两段距离是一样的*。——为什么？——*因为它们彼此相对*。”人物*B*被放置到高处，实验者

① 参见*Les notions de mouvement et de vitesse*, chs. Ⅲ, Ⅳ，我建议也参见ch. Ⅰ。

又问了很多问题，但是出于简洁的考虑省略了一个问题。那么："当A看向B的时候距离远吗？——它站在高处。——从B看向A呢？——它站在矮处。——但是这个距离是远还是近呢？——不远，中等距离。——当A看向B的时候呢？——也是中等距离，它们两个完全相同。——(B被放置到一个更高的位置上。)——仍然是他更高他更矮。——如果B向A扔一根绳子或者A向B扔一根绳子呢？——两条路线还是一样长，但是A的头会比较累，不过，因为它们是以相同的方式看向对方，因此距离一样远。"

克拉(6;3)　人物A和B被一排大的、高度高于人物的砖块所隔开："它们离得远。——(移走一个砖块)现在还和刚才一样远吗？——不，它们离得更远了，因为你拿走了一个砖块。——(拿走所有的砖块。)——这下离得更远了，非常远。——(放回一块砖。)——没有那么远了。"

水平面上相互性："它们是一样的(从A到B和从B到A)。——(B被放置到高处。)——这个人(A)要看得更远。——另一个呢？——它也看得很远，这两个是一样的。"

纳乌(6;8)　两棵树A和B："它们两个离得很远。——(实验者在两棵树中间放入一个砖块。)——砖块形成的墙改变了它们之间的距离。——怎么改变了？——不像刚才那么远了。——为什么不像刚才那么远了？——它在宽度上减小了。——从这棵树到那棵树？——是的，因为这个砖块是宽的，因此它们之间没有那么远了。"

实验者把B放置到高处："是一样的(从A到B和从B到A)，因为路程是相反的。"在这里方向的可逆性导致了对称性。

佩尔(6;4)　实验人员在两棵树之间放置一个纸板："这样比没放的时候离得更近了些。——为什么？——这个很窄(用两根手指指示纸板的厚度)。——如果我把纸板移走呢？——那就和原来一样远。"

A和B处于不同的水平面上："它们两个的距离是一样的(AB=BA)。"

在距离的守恒这一问题上，这些儿童的反应与阶段2A儿童的反应完全契合，比如贝尔。我们要把在纸板上设置窗户这一想法归功于贝尔，他主动提到了纸板的厚度会减小两点之间的距离，但是"如果纸板上有一个小窗户，距离就不变"，也就是距离的守恒。佩尔用手指表示纸板的厚度，说："这个要窄得多。"纳乌回答说，"因为砖块是厚的，所以没有那么远了。"……在以前，儿童把距离定义成未被占用的空间，任何固态的实物由于其本身的宽度都会使距离减小。

然而，虽然这些儿童在距离的守恒性上没有展示出进步的迹象，但是他们都意识到了间距的对称性本质。无论A和B是否大小相同，也无论它们是否处于相同的水平面上，儿童都能够意识到AB和BA是相等的。他们如何解释这种现象？贝尔的回答具有一定的启发性，因为两个人物"彼此相对"，所以距离是相等的。当两个人物或两棵树在水平面的高度上存在差异时，处于低处的个体看向对方的时候就会有困难，因为他的

"头会比较累",但是距离仍然是相同的,因为"它们以相同的方式在看向彼此"。这些简单的公式表达了一种真正的发现。处于第1阶段和第2A阶段的儿童允许自身的观点来干扰被关注的客体。因此,他们认为距离*AB*一定大于距离*BA*,因为当他们看向客体时,是以*AB*的顺序进行观察的。一旦脱离了自我中心思维的困惑,他们就能够同时采纳*A*和*B*的角度,因此会发现两者的距离是相等的,准确地说是因为两个人物"彼此相对"。即使两个人物处于不同的水平面上,儿童也能够发现人物"以相同的方式在看向彼此",克服掉最初的来自于运动的主观附加物的影响。例如,儿童会指出,处于低处不得不伸着脖子看的个体会疲劳。

第五节　第2B亚阶段类型B:整体距离守恒,距离关系的非对称性

属于类型*A*的儿童在理解*AB*之间插入纸板后距离仍守恒之前,能够发现间距*AB*和*BA*的对称性本质。而属于类型*B*的儿童则以相反的顺序获得了这些发现:在第2B阶段,他们能够意识到*AB*之间插入一个物体后,它们之间的距离没有变化,但是当*B*高于*A*时,而且要求比较*AB*和*BA*之间的距离时,他们并不认为*AB*之间的距离不变。

罗布(5;6)　最初的反应类似于类型*A*:"*它们离得更近了*(插入纸板后)。——为什么?——*因为这个纸板藏住了一部分距离*(未被占用的空间的一部分)。——(移开纸板。)——*它们离得又远了*。——(放回纸板。)——*不,它们之间的距离根本就没有发生变化,它还和原来一样远,因为这是相同的距离!*——为什么?——*因为这两个人都没有移动过*。"

人物*B*高于人物*A*:"*从B到A更远*。——为什么?——*因为其中一个人在低处,另一个人在高处*。——为什么它们不是相同的?(*AB*和*BA*)——*因为距离不一样*。——如果我们用一根木棍测查*AB*的距离,用另一根木棍测查*BA*的距离呢?——*站在高处的小人需要一个更长的木棍*。"

加斯(5;11)　实验人员在区间中按直线排满了小砖块,移走一个小砖块:"*距离是一样的,因为你没有向前或向后移动任何一个人物*。——(再移走一个小砖块。)——*是一样的*。"

人物*A*和*B*处于相同的水平面上面对彼此:"*它们是一样的*(*AB*和*BA*)。——(实验者把B放置到高处。)——*这个人站在山上,对于它来说距离更近,因为是向下看。对于低处的这个人来说更远,因为要向上看*。"

皮克(6;6)　有和没有纸板:"*不管有没有纸板,距离都是不变的*。——为什么?——*它们就待在原地没有移动*。"

人物*A*和*B*处于不同的水平面上:"*站在低处的这个人需要做得更多,距离更*

远。——为什么？——因为它要抬头看。——如果我在这里放两棵树(矮的树放在A处,高的树放在B处),从A到B和从B到A的距离是一样的吗？——不,一棵树在低处,另一棵树在高处。向上的时候需要走得更远。——为什么？——树很难向上爬。——如果我们用木棍测量AB和BA呢？——向上的时候需要更长的木棍。"

不管是否有别的物体插入,这些儿童都能够意识到A和B两点之间的距离是守恒的,这种理解发生在他们能够明白间距AB和间距BA相等之前。没有对称性的距离守恒在一定范围内是不完整的,因为它局限于两个可能方向中的一个。在这一点上罗布的解释很明确:AB是一个向上的方向而BA是一个向下的方向,这两个方向"不是相同的距离",在测量A和B之间的间距时,相比于在A位置的人物,处在B位置的人物"将会需要一个更长的木棍"。

如前所述,不对称性是由于儿童对距离的评估受到动态思维的干扰的缘故。这一点不应该被理解成距离是物体运动的一部分。因此,皮克只是说低处的人物必须"做更多,因为它要抬起头看"。当实验者把人物换成两棵树之后,皮克仍然坚持认为AB的距离大于BA的距离,理由是"向上爬很难"。这里所包含的努力是旁观者作为真实参与者所付出的。距离关系被同化进与儿童自身动作相关的自我中心格式中,而在这种格式中顺序是不可逆的。

如果这些儿童在辨认间距的对称性方面是如此不成熟,那么我们可能会问,他们是如何意识到包含插入物体的一段整体距离的守恒性呢？从总体上来说,他们的回答包含一些陈述,例如两个人物并没有向前或向后移动,它们仍然保持静止等,这一点对于更年幼的处于第1阶段和第2A阶段的儿童来说正是如此,他们不能推论距离和长度的构成成分。这个问题应该与第3阶段联系起来,第3阶段儿童的回答与之类似。

目前我们注意到,尽管在第3阶段中关于整体距离的守恒和间距的对称性是相互依赖的概念,也就是说当顺序和位置变化的概念完全可运算后,属于第2B阶段的子类型A和B的存在,证明最初这些概念是相互依赖地发展起来的。类似的研究结论也见于儿童对时间概念的建构过程,即时间的连续性和持续性也是相互依赖地发展[①]。在此,间距的对称性则依赖于顺序关系的可逆性,而整体距离的守恒性依赖于这种关系是否同时被应用于距离和长度。因此,在直觉水平上,这些关系中的某个获得发展,而与之相联系的另一个则可能没有相应地发展。接下来的部分我们将说明它们在运算水平上是如何整合在一起的。

① 《儿童时间概念的形成》。

第六节　阶段3:距离守恒

处于第3阶段的儿童的反应说明了两个静止物体A和B之间距离的守恒性,无论在两者之间插入什么,从两个方向看的距离AB和BA被认为是相等的。平均7岁左右的儿童才能达到第3阶段,虽然有些儿童发展得更好,而另一些则发展得有些迟滞,但都符合正态分布。

刚开始的两个例子具有一定的中介作用,揭示出儿童在把固态实物看成是距离的一部分时所体验到真实的困难。

弗勒(6;9)　实验人员把纸板放在相应的位置上:"*它们离得很远。*——(纸板被移开。)——*现在离得近了一些。*——(纸板再次被移走)现在呢?——*离得更远了。*——(在两个人物之间再放置一个人物。)——*和原来一样远。*如果你在纸板上开一扇门(现在使用的纸板没有门),那么距离一样远,*因为通过这扇门它们能看见彼此,并穿过门到达对方的位置。*——如果没有门呢?——*不如原来那样远。是的,因为它们可以从周围走。*"

对称性,两个人物的水平面存在或不存在差异:"*两条路是相同的,因为它们既可以站在高处也可以站在低处。*"

尼克(7;4)　最初的反应与他人相同,然后:"*不,是一样远的,因为你并没有移动它们。*"

能够正确判断对称性。

接下来的例子才是阶段3的真实反应。

西尔(5;2)　没有纸板:"*它们离得很远。*——(放入纸板)这样呢?——*还是一样的,这里有没有墙不会对它们之间的距离产生影响。*——(实验者打开纸板上的门。)——*仍然是一样的,因为你并没有移动它们。*"

在同一水平面上的对称性:"*它们是一样的(AB=BA),因为它们都没有被移动过。*——(B被放到高处。)——*离得远了,因为它向上走了。*——但是从A到B和从B到A是一样的吗?——*在它们两个之间总是相等的,永远是这么长(伸出手臂指示A和B之间的距离)。*"

贡斯(5;11)　有纸板和无纸板:"*它们之间永远是相同的距离,因为这个纸板不能让它们向前移动。*——(实验者打开纸板上的门。)——*仍然是一样远,这个(较低的水平)不能再低了。*"

莱帕(6;10)　实验人员放入纸板:"现在和原来是否一样远?——*是的,你看这两个小人仍然在相同的线上,它们没有被移动。*——(实验者放入一个砖

块。)——它们之间的距离还和原来一样，砖块没有让它们移动。——(实验者打开或关上纸板上的门。)——门打开的时候它们能看见彼此，门关上的时候看不见，不过距离都是一样的。"

水平面上的对称性："($AB=BA$)？——当然，它们是一回事儿(他觉得这个问题很可笑)。——如果我把这个放在这里呢？——在低处的人必须这么走，在高处的人则正好相反，它们是一样远的。"

佩尔(6;11)　没有纸板："是的，距离是相同的，因为这两个一半是相同的($AE+EB=AB$)，因为纸板并没有移动两个人物。"

对称性，两棵树处于不同的水平面上："它们是相同的，这两棵树一直待在原来的地方！"

沃格(7;3)　实验人员插入纸板："它们之间的距离没有变化，因为它们都没有移动过。"处于不同水平面上的对称性："它们认为向上要走得更远，因为这是一座大山。当站在低处的人看向站在高处的人时，离得更远，因为他非常高。但是当站在高处的人看向低处的人时也是一样的。两个方向的距离是一样的。"

更小的人物A和更大的人物B处于相同的水平面上："小的人眼睛很小，因此它会认为路程很远，但是其实是同一回事儿。而且，你可以改变它们，把这个小的人放在那儿，这个大的人物放在这儿，因此是相同的事情。"

格拉(7;5)　实验人员插入纸板："距离没变，因为你没有移动两个人物。"不同水平面上的对称性："无论你把它们放在什么高度上，它们之间的距离都是一样的。——但是一个小女孩刚刚告诉我向上的时候更远。——当这两个人看向彼此的时候，距离总是一样的。"

格雷热(7;6)　实验人员插入纸板："距离是一样的，但是它们将不再能够看见彼此。它们没有移动，你只是把这个纸板放在这里，在它们之间未被占用的空间减少了，但是现在还是和原来一样远。——(实验者在间距中填充满东西。)——现在没有未被占用的空间了，但是距离还是和原来一样远。"

能够正确判断对称性。

马尔(7;6)　实验人员插入纸板："距离总是一样的。——为什么？——因为空间被占用未被占用时是一样的。"

奥巴(7;10)　"你没有移动这两个小人，即使我在这里放置很多砖块，仍然是相同的距离。"

这些反应展示出儿童对距离概念的运算。很多可逆性的组合成分可以通过间距之间的加法或者对称性的反转而获得。他们的反应为我们关于儿童在较早期阶段(第三节末尾)会体验到很大困难的结论提供了极好的证据。距离是对称性的间距，这一结论是从对位置顺序和位置变化(顺序的改变或者是系列顺序)的非对称关系的集合化中提

取出来的。当儿童在一个定性的水平上习得这些运算化的集合过程后,他们就已经掌握了距离的概念。

显然,距离概念的发展独立于任何形式的测量行为。当这种发展过程结束后,距离能被测量,但是只有当儿童能够理解以下三点时,他们才有可能习得测量行为:(1)AB的距离不会因为额外物体的加入而发生改变,S_1,S_2等;(2)顺序AB可以被反转形成BA,这种反转不会改变距离$AB=BA$的特性;(3)如果S位于A和B之间,那么$AS<AB$。在理解欧几里得测量学之前,儿童必须首先理解上述这三点,因为这些仅仅是处理部分和整体之间的一致性和相互关系,而测量需要解决的是一个部分和另一个部分之间的关系,例如AS和SB。

从一个纯粹质性(深入但不广泛)的角度来看,距离意味着:

(1)线性顺序之间的关系:沿着一整段距离AC,距离可以看成是从点A到点B再到点C的距离,想要抽取出这一关系只能是通过顺序ABC或者它的反转性距离CBA来获得,这样的话距离是不会发生改变的。从心理学层面而言,顺序关系来自于对“位置”的可逆性运算。它们独立于投射的和度量的协调关系,在大约6.5岁到7岁时聚合在一起,这一过程发生于大多数基本的拓扑学直觉已经建立好之后(《儿童的空间概念》第三章)。

(2)间距关系的对称性:顺序关系是非对称的(A先于B,B先于C),但是假定有这样一组非对称的关系,那么就能抽取出一组间距,而且这些关系是对称的。如果B位于间距A和C之间,那么它一定也位于间距C和A之间。因此,间距就形成了一系列AB、AC和AD等系列,其中,每个连续项都包括其前面的所有项,而考虑每个单独的项时,都具有对称性。

处于阶段1的儿童还不能建构这样一个嵌套的系列,也不能将多于一个的间距联系起来。如果A和B中间没有任何东西,他能够推理AB,但是如果一个物体S插入AB之间,他只能考虑新的间距AS和SB,而完全忽略掉整体的间距AB。在阶段2中,即使有新的物体S插入,儿童也能够从AB的角度考虑,但是这只发生在子阶段2B中的类型B,他们能够推论$(AS+SB)<AB$,因为他们认为一段间距仅仅是从未被占用的空间角度来考虑的。因此,他们很难意识到间距是一种关于两点之间的关系,而这种关系不会受到它们之间的空间是否被占用的影响。再一次,只有第2B阶段中的类型A的儿童是例外的,他们不能理解间距关系的对称性本质,而这些对称性关系将继续转化为非对称关系,例如顺序关系和位置关系。只有处于第3阶段的儿童才能够意识到,整体性的间距AB与其余两个部分$AS+BS$之和相等,以及所有的间距都是对称的。我们必须要考虑他们是如何达到这样一种整体守恒的。间距关系并不足以对包含守恒的距离系统做出解释,因为一条有弹性的直线ASB能够被延伸和压缩,产生$AS+SB=AB$的关系,而这独立于欧几里得中的距离。因此,一定还有其他一些因素。

(3)从拓扑学间距的概念发展到欧几里得距离的第一个步骤是,对一条直线上的间距关系进行顺序化。A和B之间的距离不仅仅是A和B间距的总和,因为由抽取出的系

列组成的线段更进一步被直线的概念所定义。然而,虽然这种差别并不是原始性的(《儿童的空间概念》,第四章),但仍然不充足。此外,适用于未被占用空间的距离关系以及适用于填充空间的固态实物的长度概念都需要简化为同质性的概念。

(4)因此,一个非常重要的条件是,直线性顺序和嵌套间距的直线性系列,应该能够包含未被占用的空间和固态实物的长度。只有儿童形成这样的一种公共空间媒介之后,才能够保证在他们眼中距离不会发生改变。没有这样一种同质性的框架,不仅距离会随着两个相同端点之间物体的插入而发生改变,而且当物体的位置发生改变时,其本身的长度也会发生变化(见下一章)。因此,距离和长度只能在一个固定的参照系统中进行比较和维持不变,这个固定的参照系统提供了一种保持静止并不受位置变化影响的公共媒介。然而,这还不能暗示着一种协调的参照系统的形成,因为一个综合的框架只能在第3B阶段时才能被儿童习得,正如在第八章和第九章以及该书的前两章中所讲到的。在静止的框架中对保持不变的距离的建构,仅仅标志着坐标系进化的一个步骤。距离关系首先是线性的或者是一维的。儿童坐标系的最后获得依赖于对多个这种系列关系的扩展,而所有的这些都需要在两维或三维层面得以协调。

距离的同质性,以未被占用的空间和长度为特征,同时也暗示着一种直线性的顺序系列和直线性的嵌套关系,儿童是如何习得这种同质性的?同时这种同质性也意味着一种直线性的顺序系列和直线性的嵌套关系。阶段3儿童的反应清楚地表明了这一过程。间距和顺序关系不再指代运动的物体以及在它们之间的未被占用的空间。相反,它们指代的是静止的"位置",当物体发生运动后,这些"位置"仍然保持不变。持续出现的一种争论就是,儿童认为纸板或者砖块的插入并不能移动小的人物和树木(莱帕、佩尔、西尔、格拉等)或者"让它们向前移动"(贡斯)等。年幼儿童非常明白这一点而且也非常相信,当一个纸板改变了距离后,是由于处在终点位置的客体被移动了。如果因为物体保持静止而认为距离没有发生变化,那么一定是因为距离被看成两个顺序化"位置"之间的一种直线性间距,这些"位置"构成了一种既包含物体也包含未被占用的空间的媒介,而在之前这些"位置"被认为是不包含固态实物的间距。格雷热的反应清楚地证实了这一点:"它们两个之间未被占用的空间减少了,但是仍然和原来一样远。"马尔甚至更加清楚地表述"距离总是相同的,因为空间是一样的",这里的"空间"正确地被用于指代一种对未被占用的空间和固态实物共用的同质性框架。

如果我们还有印象,建构距离时所包含的运算,儿童轻而易举地就从客体之间的关系过渡到"位置"间的关系。到了第3阶段以后,位置的变化是一种顺序或者"位置"的变化,并且拥有只针对客体本身的参照系。儿童会忽略经过的空间甚至是起点和终点之间的关系,只有终点位置的客体才会影响儿童的判断(*cf. Les notions de mouvement et de vitesse*, *chs.* Ⅲ, Ⅳ以及本书的第一章)。对起点和终点之间关系的确立,使得儿童能够明白间距的概念。拥有了这种概念之后,儿童开始学习从固定参照点的角度比较位置的变化,而不是仅仅将它们看作是运动物体顺序的改变。因此,每一种运动都暗示着

一种运动物体和静止位置之间的差异。而静止"位置"不会改变它们与参照成分之间的关系，虽然这些运动的物体已经发生了变化。因此，顺序和位置变化中所包含的运算关系的概括化过程，能够解释间距关系如何达到一种包含"位置"的发展变化，无论空间是否被占用，并且不再受限于未被占用的"空间"（第2阶段儿童偏爱的一个短语）。因此，关于顺序和长度的对称关系在头脑中就被整合成一个整体。

在对这种运算进行概括化之前，事实上儿童的空间被分割成两个异质性的成分，而不是形成一个同质性的公共媒介。一方面，存在客体以及填充满的空间。这些以形式、长度的直觉性概念为特点，而且也容易受到另一个物体位置变化的影响。另一方面，在两个客体之间形成的间距中包含未被占用的空间。这种直觉性的关于未被占用空间的概念包含了距离运算性概念的萌芽，但是它既没有进入对位置变化的表征，也没有进入对长度的表征。在儿童身上可能没有通过这种方式孕育的关于间距的守恒性，因为他们认为无论何时一个固态实物插入两个物体之间后，它们之间的距离都会发生变化。即使是两个静止物体之间的距离也会发生变化，因为这些并没有被儿童认为是关于位置变化的静止参照点。关于顺序和位置变化运算的概括化过程对这些异质性的部分进行协调，例如，填充满和未被占用的空间，不是简单地融合，因为这可能会被认为是荒谬的，而是通过一种超越这两者的第三种手段来实现的。这是一个关于"位置"的系统，这些"位置"可以被客体占用，也可以不被客体占用，这些位置反过来又被一些静止的物体固定下来。

因此，当间距指代固定位置时，它们就变成了距离。因此，距离的真正概念是物体之间的一种关系，而物体不是通过位置的变化而是通过他们所占用的静止位置来得以表达的。因此，距离暗示着一种空间框架的组织结构，这种框架可以作为一个部分独立于其内容的媒介或是容器。当与间距和拓扑学空间的顺序特征（包含与客体自身相关的邻近性关系或者复杂客体的部分之间的关系）进行比较时，这显示出距离概念的发展进步。距离意味着位于空间中两个相互独立的客体之间的关系，而且这种空间或者公共的媒介才是真正的集合结构的客体。在早期的研究中已经被展示过的投射性空间（《儿童的空间概念》）开始于对直线和角度的建构，这需要儿童理解顺序的拓扑学关系指代的是特定的"观察角度"，因此，这预示着在一个不变的整体中对所有的观察角度进行综合的协调。类似地，距离要求儿童理解顺序的拓扑学关系和指代固定"位置"系统的间距，预示着坐标系和几何学概念的建构，例如，由参照坐标系构成的空间领域的组织结构。这些协调化的过程只有儿童到达发展的后期（第3B阶段）才能获得，对于欧几里得几何学和不止一个维度的位置变化的集合化过程也同样适用。但是不变性这一概念和对称的线性距离是发展的第一步，因为它暗示着将空间看成一个容器，而不再被分割成内容或者填充满的空间，缺失内容或未被占用的空间。

徐晓惠译，朱莉琪审校

第四章　位置变换以及长度守恒、长度和距离

任何测量都基于一个概念:一个物体不管如何变换位置,大小保持恒定。物体的运动就像是空间形状的全等变换,因为一个运动的物体长度AB本身是保持不变的。拓扑学或者投影的概念,比如类同和相似性,不足以产生这样的守恒。当儿童慢慢理解拓扑学上的嵌套系列,通过重组物体的各个部分以及重新变换最初的形状($A+A'=B$等),他们意识到即使零部件进行了重组,一些元素依然保持不变。一个例子就是变化一条线段或者橡皮筋的片段。这些片段的各个部分,不管是将它们绑成许多结,拉伸或者压缩,总是会组成相同的物体(《儿童的空间概念》第四章)。但是整体的守恒并不意味着长度或者距离的守恒。儿童知觉和直觉的世界属于恒定变形,因此相比欧几里得空间的不变形,儿童直觉感受的世界更加靠近拓扑学的弹性和可收缩空间。后来,从不同角度看到的视点之间的协调让儿童能够重构在任何方向上部件的次序,例如,从左到右,或者是从右到左。然而,尽管这样,这些部件的表面长度在这个过程中也不断地变化。那么儿童如何能够保持大小不变性的概念?这是度量空间的基础。

之前提到的距离概念建构提供了一个重要的线索。两个物体间间隔的长度(例如它们从一个到另一个的距离)由位置系统所决定,同时也是由假定是静止的元素所界定。但是当物体移动时会怎样?在没有测量和度量协调性时,儿童如何能够界定原始物体空出的位置以及后来物体所占据的位置呢?

答案在于当物体经历位置变化时长度的恒常性。假如在运动的过程中,物体以一种任意的方式改变长度,那么就没有一个固定的空间领域能够作为媒介以及参照系;因此在物体之间就没有固定的距离。相反地,距离的概念,允许一个稳定和均匀的媒介建构,同时也带来了位置变化过程中长度的守恒。这种守恒只有在物体的位置保持恒定大小时才能保证(例如,它的距离关系),这个时候物体留下空余的位置,同时位置的大小被另一个物体占用时,位置大小没有改变。整个结果就是对于任何一个新填满的位置,都有一个对应的新的空缺的位置,反过来也一样,这就类似于物体之间的距离守恒和运动物体的长度守恒。

为了演示这个过程,这一章呈现了类似的一项研究,儿童对两根树枝进行推断,一根相对于另一根位置的变化。研究指出,当他们的思维还依然停留在距离概念尚未形成的阶段,儿童会首先说两根树枝是相等的,然后他们将会看到其中一根树枝被向前推动一点距离,他们会说这根树枝比另一根更长。换句话说,当他们的思维达到了认为距

离是稳定的和对称的水平时，即使物体经历了一些位置上的变化，他们也会意识到长度的守恒。

但是，在解释这个实验之前，我们必须要问，通过物体端点之间的间距检验物体的长度是不是一个发展过程的结束阶段。因为情况有可能是这样的，长度就像运动，首先会被认为只是与两个末端有关，或者甚至仅仅与物体表面最远的点有关。为了回答这个问题，我们进行一个初步的研究，要求被试比较一条直线和一条波浪线。这两条线长度不一，但是它们开始和结束的位置都在同一个点上。

第一节　线的长度及端点的一致性

呈现给儿童一条短直的木棒或者泥土棒和一条长的弯曲的像蛇一样的塑料绳。塑料绳的末端与木棒的末端重合。塑料绳和木棒并排放置，距离几毫米，它们的端点准确对齐。首先要求儿童比较其他的直线，看他是否能够检验直线长度是一样的。然后要求他对比两个物体的长度。开始，问题是这样的形式："它们长度一样吗？或者是一个比另一个要长？"假如儿童说它们一样长，让他们用手丈量一下两个物体，然后重复同样的问题。假如他依然说是一样的，就以一种能够集中注意力到运动路径的方式询问：假如有两个蚂蚁，或者是两个小朋友，沿着这些线走，谁会发现路线长一些？最后给儿童看当"蛇"拉直了之后的样子，当他乐意承认现在"蛇"比另一根木棒要长时，将"蛇"复原到原来的形状，然后询问最开始的问题。

接近100个儿童进行了实验，84%的4岁6个月甚至更小的儿童回答不正确（6%的儿童回答没有意义），而只有15%的儿童正确地意识到两个长度不相等。而对于年龄大于5岁6个月的儿童，90%回答正确，只有10%回答不正确。总的来说，在阶段1，一条线的长度仅仅通过它的端点进行估计，没有考虑到它的直线性或者出发位置，一项研究认为，在这个阶段，儿童不能连接局部的距离形成整体的距离（参见第3章，第2节）。在亚阶段2B，我们的被试开始表现出有不完整的关于距离直觉上的合成，能将长度与两条线端点位置的顺序区分开来。阶段2A的反应相当于水平1和水平2B之间的中间阶段。

在阶段1，儿童一直认为直线和"蛇"长度一样，即使是用手指丈量过之后，或者在还原到之前形状之前他们看到蛇被拉直的时候，他们也这么认为。

李克（4;0）　能够正确回答直的木棒是否等长。展示给他看直线挨着曲线："它们是一样长吗，或者是一个要长于另一个吗？——*两个都一样*。——假如两个小朋友沿着这里走呢（指出他们对应的路径）？——*两条路是一样长*。——用你的手指试试（他用他的手指同时沿着这两条线移动）它还是一样长吗？——*是的*。——那么这样呢？（'蛇'被拉直了）？——*它更长了*。——（'蛇'回复原

位)——它和另一条(木棒)一样长。”

莫特(4;2)　“这一条更短(‘蛇’)——为什么？——它弯曲了。——假如两个小朋友沿着这两条路走呢？——这条的路程更长(木棒),因为它非常直。——用你的手指试一下(他做了)。——那一条更长(木棒)。——(‘蛇’被拉直了)这样呢？——它更长(‘蛇’)。——(原来的形状。)——现在它跟另一条(木棒)一样长。”

特尔(4;6)　“它们都是一样长(指出端点的位置)。——假如一个蚂蚁沿着这两条路走,它走哪条路会更长一些？——走木棒这条路会更长一些。——为什么？——因为这条直的木棒实际上更长。——用你的手指沿着它们试试(他做了)你走的哪条路会更远？——那条路(‘蛇’)——然后哪条更长？——(他犹豫了,没有回应。)——(‘蛇’拉直了)哪一条更长？——‘蛇’。——(回复到原来的样子)现在呢？——它和木棒一样长。”

拉夫(4;6)　“它们长度一样。——为什么？——(他将手指放在端点没有回答。)——那么假如两个小朋友像这样散步呢？——这条路(木棒)它更长,不,他们一样长。——用你的手指试试看。——它们都一样。——(将‘蛇’拉直。)——它更长。——(恢复原样。)——它们一样。”

在亚阶段2A,儿童有了关于运动的建议之后(不管是用手指去衡量还是仅仅想象着小朋友沿着两条线走),他们认为曲线的形状会更长。但是静止形状下的观察依然会让他们认为它们是相等的,而且有些被试即使在考虑了运动之后还是会这样认为。

弗罗(4;6)　“它们是同样的长度。——假如小朋友沿着这些路线走呢,哪个会更远？——(弗罗在没有建议的情况下,自己用手指沿着两条线往前)这条(曲线)。——哪条更长？——(犹豫一会儿之后,他指出曲线的形状。)——(将‘蛇’拉直了。)——它更长。——(‘蛇’回原位了)它们之间有更长的吗？——不,它们都是相同的长度(指出端点)。”

佩拉(4;6)　“这两条线有哪条更长吗？——那条(曲线)更小。——假如两个小朋友沿着这两条线走路呢？——那条(直线)会更短。”

布赫(4;6)　“这是相同的长度。这条和那条一样。——那假如两个小朋友沿着它们走呢,会不会一条线更短呢？——是的(直的那条)。——为什么？——另一条是弯的。”

罗斯(4;11)　“它们是相同的长度。——假如两个小朋友沿着这两条路走呢？——那一条(有波浪的)路会更长,因为它成团了。”

赛尔(5;2)　最开始认为两条线是相等的,然后自己主动说:“你要是拉直它的话,这条(‘蛇’)会更长。但是当它没有拉直的时候,两条线一样长。——假如我让一对蚂蚁沿着这条路线走呢？——这条更长(‘蛇’)。”

安迪(5;3) *"一样长。——假如两个小朋友沿着这两条线走呢?——(他自己用手指沿着两条线走)这条会更长('蛇')。——(将蛇拉直了?)——哦,它更长。——(蛇回复原位?)——还是相同的距离(指出端点)。"*

很明显,在水平1和水平2A,曲线形状的长度纯粹取决于它的端点,或者更精确地说,取决于它的最远的端点。在阶段1,要说一条线的长度与它的两头端点之间的直线距离没有差别是不对的。因此,在第三章,在这个水平上,距离仅仅归功于空余的空间,同时距离与物体的大小是不对等的。特别是,距离表现出不对称性。换句话说,距离还没有被当作一条线的端点之间的关系,它只是被认为与"靠近""远离"等这样的文字有关。因此距离就成了一种从物体出发到最远的点的评估(不可逆)。再者,接下来的实验以及那些包括表现出儿童认为两条线等长的实验很清楚地表现出,最开始,这些比较是最远端点之间的功能。因此当前的反应不能被认为是距离和长度之间缺少区分而造成的。只是简单地缺少距离和长度的整合,距离和长度都被认为是与它们最远的端点有关。儿童注意到两条线的端点一致,很容易忽略这些线的内部构成,一个是曲线,一条是直线。于是就判断它们在长度上是相等的,因为他的标准就是两个端点之间的排列。

在子阶段1,甚至对于与运动有关的标准,儿童也很不敏感。他们断定小朋友走的路线是一样的长度,而且一些被试在用手指进行比画之后依然如此回答。这是因为位置变化的评估最开始依据一条路线上点的位置排列。通常,他们甚至认为直线会更长(莫特、特尔、拉夫),好像"蛇"弯曲之后使得它相对于直线更短,而不仅仅是相对于自己拉直之后长度更短。当"蛇"拉直之后,他们同意它比直线更长,因为它投射得更远。但是当它再次弯曲之后回到曲线形状,它再一次变成与直线同样的长度。在水平2A,判断就受到了对于运动思维的调整。但是静态的评估依然是相等,经常在进行不相等的动态评价之后,被试又只是简单地观察,开始恢复到做出相等的判断(弗罗、赛尔和安迪)。

在下面的这些例子中,第一个是中间阶段,然后剩下的都属于子阶段2B正确回答的水平。

匹克(6;6) *"它们是同样的大小。——这条树枝的形状与那条的形状能变化吗?——不能。——假如一只蚂蚁沿着它们散步(实验者用他的手指连着这两条线移动)哪条路会更短一些?——这条路(直线)。——为什么?——对蚂蚁来说它更短些。——那么它们就不是同样的大小是吗?——不一样,假如你将'蛇'像这样(直线)放,它会更突出些。"*

摩尔(4;10) *"这个Z字形的更长些。——为什么?——因为它是Z字形。——要看它是否更长你会怎么做?——你可以这样:Z字形(他将它拉直*

了)。"

丁(5;6)　*"蛇更长一些。——你能展示下为什么吗?——好(他将蛇拉直了)。"*

戴尔(5;7)　*"假如你还原这条线,它会更长。"*

提亚(6;0)　*"'蛇'更长些,假如你一旦将它拉直了它就更长。"*

康茨(6;6)　*"这条会更长因为它被弄弯了,假如你将它拉直就会更长。"*

安吉(7;0)　*"这条会更长因为它是弯的。"*

尼克(7;0)　*"这条'蛇'更长,因为要做一条这样的东西,相比另一条它需要更长的材料。"*

所以,从子阶段2B开始,当直觉能够更多通过口头表达时,这两条线的长度通常都会被判断正确,因为儿童意识到间距可能是在两个端点之间的片段,这些是Z字形或者是像蛇一样波动的,也有可能是直线的。但是,对于端点顺序直觉的固着出现了这样的情况,最开始,判断依然与端点有关。匹克考虑到假如将蛇拉直之后是什么样的,也知道它会"突出"一些。后来两种形状的转变可能产生了一些与两者长度之间间隔本身有关的解释(特别参考尼克的回答)。这些都反过来预示着阶段3中整合(composition)的性质,这是出现在定量测量之前的。

第二节　阶段1和亚阶段2A:长度不守恒

这一阶段主要的实验包括,给被试呈现两条等长的直线,它们的端点都紧挨着;一条直线向前移动1或者2厘米(直线接近5厘米长),然后让被试再次说出哪条线更长或者它们是否是相同的长度。在所有水平上,直线在交错放置之前都被认为是相等的。在位置变化之后,被试在第一阶段认为往前移动的直线更长,只考虑到最远的端点而忽略了最近的端点。这样的回答持续到子阶段2A。在水平2A和2B之间我们发现了一系列的过渡的回答,开始知觉调整,从直觉调节到操作,这个时候长度守恒确定了(阶段3)。

下面是水平1和2A的一些例子。

拉夫(4;6)　在交错之前:*"它们一样长。——(一条线移动了。)——它更长因为你拉了它。这条线更长。"*

凯尔(4;6)　在交错之前:*"一样大小。——(交错之后?)——那条线更长。——为什么呢?——因为你拉了它。——(实验重复。)——那条线更长因为*

你把它拉回来了(意味着“向前”)。——那这样呢(一条线在另一条线的延长线上)?——他们接近是相同的大小因为你把它们都拉回来了。——(一条线移动到更远?)——它更长因为你拉动它到更远的地方。”

布赫(4;8) 在交错之前:“它们是相同的长度,(在交错之后)那个更长。——(另一条线移动到更远的地方。)——它就是更长的那条线。——(两条线成一个锐角的形状。)——它们是一样的。——那现在呢(直角)?——那条线更大(例如,那条被垂直移动的线)。——那现在呢(平行但是交错)?——那条线更长(那条投射的线更长)。”

祖尔(4;9) “它们是同样的长度。——(一条线推向前。)——这条线更长。——为什么?——我不知道为什么。——(重复之前的实验。)——这条更长。——那现在呢(T字形的形状)?——那条(垂直的线)更长(一种熟悉的知觉错觉)。——这样呢(直角)?——两条一样长。——那现在呢(平行但是交错)?——不,那条线更大(投射)。”

马恩(4;9) “它们一样长。——(在交错之后。)一条更长另一条更短。”

斯基(5;0) 在交错之后:“那条更长。——(交错反转之后。)——那条更长,因为你移动它了。——那这样呢(延长线上)?——它们都更长,因为它们现在是这样的。——(锐角。)——一样长。——(一条线放在纸张的边缘与边缘平行,另一条线与它在中点接触,并且呈45° 角。)——那条(有一个角度的)更长。——为什么?——为了让它们一样长,你必须再放一些在那儿(类似于延长平行于边缘的一条线到一个点,以至于另一条线的投射与这条线正好重合)。”

韦特(5;2) “它们是一样的。——(交错。)——那条更长,因为你把它向前移动了。——那这样呢(延长)?——它们都更长。”

内文(5;5) “它们一样长。——(交错?)——那条(在后面)更长,因为你没有动它(类似于最远直线的端点)。”

埃尔(5;6) “那条更长,因为你推了它了。——(锐角。)——一样长。——(直角。)——仍然一样长。”

安迪(5;1) “这条更长,因为你把它往前移了。”

凯尔(5;1) 一样的回答:“那条更长,因为你拉了它。——(直线恢复到了它们之前的排列。)——它们是同样的长度,但是它们能够更长,假如使得它们不对齐排列。”

查特(7;0) “它们一样。——(交错。)——后面的一条更长(但是他指出投射的端点向另一个方向)。”

这些最初的回答是相当有趣的,因为它们表明,在比较这些线时,年幼儿童仅仅关心端点的排列。但是这是一个拓扑学上的标准,线段能够扩张或者压缩,没有欧几里得长度的守恒。可能会有人说问题是被误解了,“短”或者“长”的意思通常是一种特定的

感觉，而与我们的用法不同，它是表示端点的排列而不是在它们之间的间距。但是解释后问题依然没有得到解决。关键的问题是年幼儿童不能同时考虑两个端点，这就意味着他们不关心在端点之间的长度的间隔。不管这个问题能否被正确的理解，他们的认识还是不能到达长度的守恒(就像他们不能形成空间距离的守恒一样，第三章)。这就是为什么他们对长度的判断没有欧几里得意义，依然是停留在原始的空间顺序的拓扑直觉阶段。

同样，可以说，这些儿童不断地提到运动，同时运动引发的位置变化是欧几里得空间的关键概念。然而，在第一部分，就像在水平1和水平2A时被感知的位置的变化导致了长度的不守恒，因此他们提到的运动不是位置的欧几里得变化。大小的守恒必然是从他们能够进行欧几里得运算之前开始的。在第二部分，这里举例的回答，与被试评估一个物体在经历位置变化后离原来的位置多远时的回答相似。就好像运动的路线被认为只是与终点有关，没有参考离开的点和它们之间的间距，因此在这里，物体的长度本身是其端点的函数，而没有参考它们间距的长度。

这些儿童提供的原因可以提炼出以下几方面：

1)他们大多数眼睛一直跟随着移动的线段，集中于它往前的端点，从而忽略了尾部的端点。因此线段被认为比另一条线更长，因为一条线段的一个端点慢慢超过了另一条线的一个端点。由于在这个水平上位置的变化纯粹被认为是一种顺序的变化，经过这些变化的相关的物体长度肯定被认为是随着它们往前的端点的顺序变化。

2)一些被试将注意集中在运动的直线这里，而不注意另一条直线相对的运动。再一次，他们忽略了一个事实，之前直线是相等的，认为一条线直接投射在另一条线上，投射的那条线更长。这可能就是那条移动的直线或者是固定的直线，取决于他们将注意力集中到哪一端。

3)对于其他人，直线更长的无意识判断来自于它们位置的变化，同时他们还检查直线的中点。两条直线合成一条延长线后都被判断为更长，仅仅是因为它们都被移动了。

4)极少的回应模式是集中在移动直线的后部端点。这个例子中，直线被认为是更短，因为直线的一段缺失，由于被试没有意识到这一段补到了另一端。

这些回答可能看起来很奇怪。但假如我们还记得在这些水平上，儿童表征空间的拓扑特征，(《儿童的空间概念》，第一至五章)、缺少参照系统(《儿童的空间概念》，第十三、十四章)以及类似于距离关系的非守恒和非对称性(第三章)，那他们的表现就一点儿也不奇怪了。尽管任何一个发现确实看起来是杂乱无章的，但是这些发现之间的完整的观点证明了它们的可靠性。我们能够知道的是，长度的不守恒是因为缺少一个独立的参照系统来提供给运动物体一个空间结构。那些不能建立运动物体两个边界之间配对关系的儿童，也不能将物体和参考元素联系起来。他们因此不能考虑到静态的点与运动的物体是不同的。没有这样一个对距离和长度的内部结合非常重要的静态媒介

的话(参见第三章),长度的判断只能表示为与它们的前端或者尾端的相对位置有关。这些是一条直线判断为比另一条直线更长时,端点顺序的静态关系,因为它的投射超过了另一条直线。

第三节　亚阶段2B:过渡回答

子阶段2B表现出各种在之前提到的和正确回应之间的过渡回答。但是,当正确回答出现时,这也只是过程调节的产物,还没有在特征上进行操作化。

佩拉(4;10)　端点一致:"*它们都是一样的。*——(有点儿交错的平行。)——*那条*(投射线段)*更长。*——(两条等长的7厘米的线被两条5厘米的线所代替,放在一起使得它们的端点对齐)这两条线是否有一条线比另一条线要长?——*不,它们都是一样长。*——(一点点交错,相对之前更少)现在呢?——*它们还是一样长。*——跟以前一样?——*它们比这样*(没有交错)*更长,但是这两个是一样长。*——那要像这样呢(平行但是倾斜的)?——*它们也还是一样长。*——那些呢(两条10厘米长的线,端点对齐)?——*它们还是一样长。*——要是这样呢(1厘米的交错)?——*它们要比之前的更长,但是它们还是一样长。*"比之前更长,是不是说每条线都长了?或者是这一对线组成的形状更长?可能被试没有区分这句话的两层含义。另一方面,他认为两条线一样长,是因为1厘米的投射对10厘米而言,比对最初的5厘米而言相对更少。

弗罗(5;0)　两条7厘米长的线端点对齐:"*它们是同样的长度。*——要是这样呢(有1厘米交错)?——*我认为是这样的*(用一条线替换另一条线),*是的,一样长。*——那要是像这样呢(一条线在另一条线的中点接触并且成45度角)?——*不,这条线*(斜的,投射超过另一条线)*更长。*——*那两条线呢*(5厘米对齐)?——*一样长。*——*像这样呢*(1厘米交错)?——*是的*……(通过重新对齐进行确认)*是的,它们还是一样长。*——*像这样呢*(垂直在中点交汇)?——*不,那条会更长*(垂线)?为什么?——(没有回答。)"

米尔(5;6)　两条对齐的5厘米的线:"*它们一样长。*——(交错1厘米。)——*你拉了它了,所以它更长。*——(交错撤销。)——*现在那条更长。*——(两条线重新对齐,同时往左边拉开1厘米,往右边拉开1厘米。)——*是一样长,这两条线没有变长。*——(一条线段在另一条线段的延长部分)这样呢?——*当你拉它们两条线,它们是一样长,但是当你拉其中一条线,这条线就更长。*"

格罗斯(5;6)　对最开始交错1厘米回应道:"*那条线更长,因为你就是那么放的。*"但是,面对一系列的这些测试的角度的呈现,他判断所有的这些都是一样长,除了直角:"*那条线更长*(那条与桌子的边缘平行的线)。"当两条线再次平行排列,1

厘米交错,他最后回答说:"它们总是同样的大小。要是想让一条线更长,你要加一些线在那儿。"

皮尔(6;0)　交错:"*那条线更长。*——(另一条线在另一个方向也拉伸了同样的距离)它们是一样长吗?——*不,它们都更长一些。这条线在那里(右边)更长,那条线在那里(左边)更长。*——那么它们是不是一样长?——(犹豫了一会儿)*是的。*"

吉格(6;0)　对齐时:"*它们是一样长。*——(锐角。)——*也是一样长。*——(交错1厘米。)——*那条更长因为你拉动它了。*——它是不是真的变长了,或者它只是看起来更长了?——*它真的更长了。*——(两条线在另一个方向都拉动1厘米。)——*它是同样的长度,因为你把他们都移动了。*"

勒德(6;8)　平行两条线交错1厘米:"*那条(尾部)更短,因为你将它放得更短。*——(另一条在反方向上拉动。)——*它们是一样的,但是这样使得更短。*——(在延长线上。)——*它们是一样的,但是你拉了一点点。*"

拉佩(6;10)　平行线交错:"*那条线更长,因为它看起来就像;这条线更短,但是假如你看另一条线它就更长。*——假如你都看呢?——*那么它们就是同样长了。*——(交错增加到3厘米。)——*那条更长,这条更短。因为你在很远的地方看一条船,它会看起来很小,但是你要是靠近了看它,就是同样的大小了。*——(交错撤销。)——*它还是一样的。*"

洛布(7;2)　在这些通常的一般回应形式之后("那条更长"等),他最后说道:"*这看起来更长,但是最终是同样的东西。*"

拉克(7;4)　两条线对齐:"*它们是一样的。*——(交错1厘米。)——*那条线更大。不,是另一条线,你没有动的那条线更大。*——(增加交错。)——*有一条更长些*(但是他依然不知道哪一条)。——(延长线。)——*它们都是一样长,但是有一点点靠近。*——(直角。)——*一样。*——(每一条线以相反的方向拉动1厘米。)——*一样大小,因为你把它们都拉动了。*——那么假如你只是拉动了其中的一条呢?——*它们都更长*(依据一个末端,开始的时候指出一条线在右边的投射,然后指出另一条线在左边的投影)。——真的吗?——*它们是一样长。*"

整体来看,这些中间回答反映了整个的过渡阶段,一步一步地从不守恒的早期水平过渡到阶段3的操作性守恒。

一些暂时的步骤可能是这样的。

首先,纯粹的感知上的规则。最开始,这些不依赖于判断本身,但是它们影响等长方向上的判断。所以,当线段的绝对长度更长使得1厘米或者2厘米的交错相对更小时,佩拉很难确定这些物体是不等长的。佩拉判断交错的5厘米的线段是不等长的,而认为7厘米和10厘米的是等长的。

第二,第二步叫作直觉调节,这一步与注意分散无关,而与知觉有关。所以皮尔和

拉佩注意到，一条线在右边更长，另一条线在左边更长。他们的回答标志着两个配对的末端之间关系的开始（例如，四个末端两两配对），而不是直觉上集中于向前的末端。尽管被试觉察线段是相等的，但是可能也不会判断它们与之前是等长的。例如，佩拉一方面认为“它们都更长”，大概是因为他不能区分形成配对的元素和整个的形状是由所有的线段一起形成的。另一方面，佩拉也用到了这种方法，表面上达到了长度的守恒。然而，这只是一种直觉的守恒，依赖于比较线段大小表面上的变化，以及物体在投射视角下的不同的物体大小上的变化，而当它们被拉得更近时又恢复了原来的样子。

第三，更加高级一点儿的就是米尔表现出来的直觉的调节，当所有的线都以相反的方向同时移动时，米尔认识到了长度守恒。但是当只有一条线改变它们的位置时，他们就不能意识到这个。

第四，一些被试，像弗罗，离操作性推理很近。他们注意到，将线段排列完全对齐时是等长的。然后，因为不确定当一条线交错时，等长是否还保持，他们重新排列一下线段以确保它们是守恒的！他们的行为正好验证了儿童所感到的，当物体经历位置变化时，关于长度守恒的不确定感。但是，他们这种验证的方法没有表现出操作的可逆性，也不是一种实证的或者是直觉性地恢复最初的状态。可逆性是预兆，但还不完整，就像弗罗所提供的回答一样，用这个方法来确定线段的等长。但是当他看到一条线在另一条线的中点以45°角交汇时，立即否定了这种等长性。

第五，最后，发现了守恒。在开始相信物体的长度确实变化之后，一些被试最终被说服，通过互相补偿有矛盾的直觉（由许多测验物体的大小和相对位置所引发的），从知觉或者直觉的表面性上分离出事实的重新构建。所以洛布最后说：“它看起来更长，但是其实它们是一样的。”勒德说：“它们是一样的，但是你拉了它了。”表明了属于第三阶段的守恒的逻辑和其他必要特征。

为什么这些被试没有将守恒看作是逻辑必需的呢？他们想比较由于位置上的变化所导致的和由于其他导致的长度上的差异。这些比较导致直觉性质上补偿的增加。最后他们猜到了守恒，而不是基于精确的合成。精确的合成的基础来自于测试物体位置上的变化所留下的空白空间和那些被占用的对应的空间，他们没有意识到，在位置上的每一个变化上，这两个因素都是相互补偿的。他们的想法还没有形成一个固定位置的系统，也仅仅是处理了物体的转换。这种局限性排除了长度的操作性守恒。然而，这也表明了等长关系的直觉上的守恒，能够预期操作性守恒，甚至可能离操作性守恒很近了。

第四节　阶段3：操作性守恒

阶段3的特点是静止的点和运动物体的合成。因此守恒变成了逻辑上的必须，而不

仅仅只是一个假设。

索尔(6;7)　两条线1厘米交错:"*它们都是同样的长度。——你怎么知道?——那儿有一些(空的)地方(在向前的末端之间的差异),那儿也有一些地方(在尾部的末端之间的差异)。*"

斯卡(6;10)　两条线段交错:"*它们与之前一样长。——为什么?——它们两边都长了同样的长度(表明在前面和后面的末端之间差异相等)。——那要是这样呢(一条线垂直于另一条线形成一个T型)?——这条线转到了这个方向,另一条在另一个方向,但是它们都是相同的长度。*"

蒂姆(7;0)　交错:"*它们都是一样的,但是它们放置的位置不一样。——你怎么知道它们是一样的?——(指出了在前面和尾部末端之间的间距。)*"

瑞拉(7;6)　"*一样的长度,但是一个被移动了。*"——另外:"*你推了其中一条线,但是它们还是一样的。*"

卡拉(7;7)　"*它们还是一样的,它们没有长长!*"对很多放置的位置:"*它们总是一样的长度,它们也总是一样的东西。*"实验者坚持呈现出可能的变化,就像莱布尼茨,卡拉最终激发出充足的理由以及完全的才能:"*因为上帝不想让它们变短,假如它想这样它当然可以,但是它不想!*"

所有类似的守恒的问题都差不多(离散聚合守恒、物质的量守恒、重量守恒等[1]),最后的答案看起来都是简单地停留在一致性的识别上:"它们总是一样的长度。"卡尔说,"因为它们之前就是一样的,"同时还说:"它们不能长大。"卡尔没有意识到,直到阶段3,之前儿童还一直是受到表面的引导,真的认为物体是生长和收缩的。然而,特征关系间外观上的朴素性认知甚至在本章的案例中比在材料数量的守恒中更加具有误导性。一种类似于橡皮圈的物质没有改变本身,而是改变了长度。这个问题就是为什么存在长度守恒。争论说一些实体是没有弹性的解决不了问题,因为形式上的非弹性或守恒的概念是一个发展历程的结局本身,不是一个知觉上提出的概念。阶段1和阶段2的回答以及拓扑直觉上的整个范围都清楚地表现出儿童空间建构早期阶段的特点,在这些阶段里没有大小的守恒,只有接近、封闭以及次序等的守恒。因此,最开始儿童设想物体是与变形有关的,用这个概念来解释非弹性,而不是用这个概念作为一个可以解释的假设。

还在探索正确答案的过程中的最年幼的被试,或者最近刚好达到这个阶段的儿童都经常表现出主动反思的意思,因此给了这个问题一个答案。当具有长度守恒时,被试

---

① 见 Piaget and Azeminska, *The Child's Conception of Number*, and Piaget and Inhelder, *Le développement des quantités chez l'enfant.*

自己看到了位置的变化作为一个位置的顺序变化，就像蒂姆表述的一样："它们都是一样的，但是它们放的地方不一样。"位置的变化意味着可能两种事情中的一种：它可能仅仅只涉及物体变化的空间关系，或者经历扩张，或者经历收缩，或者两者都经历了（阶段1和2），或者它可能涉及一个位置系统，这个系统与位置的变化独立，因为它们与不变的元素在关系上是固定的（轴心或者被认为是静止的物体）。后面一层含义对于长度的守恒是必需的。所以只有索尔解释了守恒，指出测试物体末端空余的空间与现在被它的向前的末端占据的空间是相等的，以至于运动物体（A）前部端点产生的差异精确地被静止物体（B）尾部端点产生的差异填满。斯卡和蒂姆的回答是相似的。他们阐述的形式表明当一个物体经历位置的变化时，之前被占据的现在是空余的部分与之前空余的现在被填满的部分是等价的，所以整体的物体的长度依然保持不变。

因此，不只是距离，除非具有能够为所有物体提供一个普遍中介的参照系统，否则就不会有长度的守恒，不管是运动的或者是静止的，这些都反过来说明了必须要有物体和它们的部分以及空余部分之间的整合。结果就像第三章所表现的那样，长度和距离的概念是可以比较的，因为它们都是基于位置之间的顺序和间隔的认识。这些位置，不管是空余的还是填满的，都形成了所有测量的必要框架。长度的守恒与距离的守恒类似，因为它也导致了测量以及全面的协调系统，尽管它出现得更早。

程南华译，朱莉琪审校

第五章　长度的守恒与测量[①]

对象位置发生变化时的长度守恒并不能表明对欧氏度量的掌握。在位置改变过程中会出现空位和被占据的新位置,对于这两个位置之间做出相等性的判断并不涉及分段或者是对测量单位构建的问题。儿童是如何通过定性的守恒到长度的测量的呢?在详细回答这个问题之前,要先研究儿童对于不同长度是否相等做出的比较判断,这些物体其中一个是直线而另外一个是曲线。在第四篇章第一节中,我们提到了一个要求孩子们对比两个不同长度形状的实验,两个形状一个是曲线而另外一个是直线,但是使这两个形状的起点终点重合。随后又做了一组两个实验对象都是直线并且长度相同,但起点和终点错开排列的实验。研究问题依然是看儿童如何比较首先被放置成并列的两条直线线段的长度是否相等,之后将其中一条线段进行不同的变化,再让儿童进行判断。儿童在后者情况下的守恒会延迟吗?或者在这种特殊的测量情景中,儿童一旦达到守恒就能够完成这种测量吗?更广泛地说,是什么过程导致了从长度的守恒到测量的发展?本研究考察之前在第二章提到的自发进行测量的实验中对测量问题的处理,同时设计这个实验情景也是为了考察位置的协调过程在长度和距离守恒中所发挥的作用。

本章节会更加详细地解析长度测量运算的本质以及其与长度守恒的关系。因此需要回答这样一个问题,儿童是如何发展出某种参照系统并依据此去推断对象的位置变化的。研究表明,儿童会发展出两种参照系统。第一种是将空间区域作为一个整体的结构,它包括测量的对象以及用来测量的物体。这一整体结构最终使坐标轴的协调使用成为一个普遍的参照系统。第二种参照系统使用的是被测量物体和测量工具上的精确参照点。被试用码尺或者其中的部分来测量他们想测量的东西,并将这些内部参照点与外部参照系统联系起来。从后者来看,对参照系统的组织依赖于对于空间或者物体的分段(subdivision)。然而之前的三个实验都明确指出了外部参照系统所扮演的角色,而在这之中正是分段起到了相当重要的作用。因此长度测量会通过综合考量位置变化和分段来进行研究,而长度守恒则包括了对两种运算的定性协调。

---

① 与 Mlle Lily C. Tsien 合作完成写作。

第一部分　形状变化下的长度守恒

儿童将会面临以下几种实验情境。使用12到16支火柴将它们摆成相互平行的两列，每列火柴都是首尾相连且两列完全平行，间距仅为1—2cm，以便于观察它们的长度是否相等。之后对其中的一个队列引进角度从而改变其形状：如队形会被排列成连续的Z字形或成直角等。一个或者更多的火柴被折断，以避免被试简单地去数队列的成分个数来判断整个队列的长度。提出的问题是，两个队列是否仍然保持相同的长度。如果被试不明白，主试就会说，如果两只蚂蚁分别沿着两个队走，它们是否走了相同的路程。

然而，关键的实验技术在于使用规格为长30cm、宽1cm（为了更准确地获得研究的问题，纸条的宽度可以更窄）的纸条组成的两队列进行实验，问被试两个纸条是否一样长。首先，使被试确定两个纸条的长度是相同的。然后将其中一个纸条一分为二，之后再进行分段，然后对这些分段的纸条进行不同形状的组合。比如，一个长条和一个短条构成一个直角，两个相同长度的纸条组成各种不同的角度，多个极短的纸条拼成圆弧状等。目标就是为了确认经过这些改变后的长度是否守恒。（我们的例子会表明，建构过程中的误差并不能阻止高水平的儿童不使用“不好的理由来论断自己的正确性”，正如几何推理中都会出现的问题一样。而这种误差并不会出现在低水平发展阶段儿童对错误解释的理由中。）实验的第二阶段，通过给被试一些不同长度的纸板条，并且要求他们自己测量以证实他们的判断。无论被试者是否在上一阶段的实验中掌握了长度守恒，都会进行第二部分的实验。

就纸条对被试提问，如同和火柴实验中的一样，可能涉及“静态”长度或者是需要走过的距离。对于这两个问题的答案并不总是一样的，并且要注意区分两种语言表达方式。提问“静态”长度问题的难点在于，使被试者明白主试的问题是整个纸条长度，而不是纸条起点和终点之间的直线距离，显然两者表示的是不同的东西。因此，主试者需要频繁地使用一些表示运动的语言，并且要留心去掩盖这些运动的方面以及一些术语，如道路、路径等。

参与这些实验的是59位4—9岁的儿童，通过研究得出了三种水平的反应：在形状改变时，长度守恒失效（阶段1和2A）；中间的反应（阶段2B）；必然的守恒（阶段3）。

第一节　阶段1和亚阶段2A：不守恒

在使用长条纸做实验时，被试对于长度不守恒的反应是比较相似的，但是当使用火

柴时就会有两种不同类型的回答,尽管它们的区别并不直接关于空间的概念:年幼的被试即使是在数出每队列中相同火柴棒的情况下,也不承认存在任何的长度守恒;而年长的被试会受到火柴棒数量的影响,因此一开始表现出守恒,但是后期火柴棒队列的形状发生变化或者是其中的一个火柴被一分为二时则不能表现出守恒。

查(4;0)　5根火柴与另外5根的火柴形成两个相互平行的队列:"这个队列从头到尾与那个队列从头到尾的长度是否是一致的?——*相同的长度*。——那这样的呢(右手边的火柴队列被重新排列为Z字形)?——*不相同*。——哪一个更长?——*我不知道,但是它们就是长度不同*。——那它们需要走相同的路么?——*不*。——那有一个更长的路么?——*是的,那个*(带拐弯的),*不对,应该是那个*(直线型的),*因为它长。在Z字形队列中起终点间离得更近*(阐述着曲线形队列起终点之间的关系)。——那这样的呢(其中一个队列保持直线形,另外一个前半部分是直线后半部分由3根构成明显拐角)?——*这个多一点*(指包含拐角的队列)。——(在直线队列中再加入一根火柴。)——*像这样就是相同的*。"

两组直线形长纸条:"*它们的长度是相同的*。——那这样呢(使其中一个倾斜,两张纸条相交形成一个屋顶的轮廓)?——*由于尺寸是一样的,所以还是相同的*。——这样呢(两个纸条都倾斜着放置并且一个纸条延长另外一个纸条)?——*依然是*。——那现在呢(其中一个是直线形,另外一个与之平行,只是后四分之一为直角拐弯状)?——*这个*(构成直角状的),*因为它的路程短,所以需要走的就少*。——用你的手指分别演示一下两条路的行程。——(他用手指沿着两条路从头到尾地进行示意。)——它们的路程相同么?——*不,第二个*(带转角的)*更短些*。——那这样的呢(都为直线形,不过其中一个队列的是由只有一根完整纸条,另一个由五段纸条组成)?——*是一样的*。——(将五个纸条重摆成Z字形。)——*直线形那个更长*。——用你的手指示意路径。——(他正确地示意出路径,却仍坚持直线那个是长的。)——(另外一种Z字形。)——*仍然是直线形的长*。——为什么?——*如果是到这的话就是一样长的*(指着直线的尾部以及被加长后的Z字形队列的尾部)。——当第一次还是直线的时候认为它们是相同的,而在其中一个变成Z字形后变短了,如果我们在其后再加一节呢?——*那就是一样的*。——为什么呢?——(示意了两对的起终点。)——那现在呢(一个为直角,另一个为Z字形,但是它们有着一致的端点)?——*是一样的*。——这样呢(A队列为直线,B队列由前部分Z字形和后部分的长的附加曲线构成。而且A和B的端点都是平齐的,但是B要明显长)?它们其中有较长的么?——*是的,A是比较长的*。

诺斯(4;11)　两条平行的直线:"*它们是长度相等的*。——这样呢(变成V形)?——*依然相等*。——那这样呢(变为135°钝角,并且倾斜放在桌边沿上)?——*依然相等*。——现在呢(非对称直角形)?——*依然相等*。——那现在呢(设置成各边垂直的直角形)?——*还是一样的*。——(其中一个保持直角形,另外一个则是一边裁掉一截加到另一条边上)——*不,那一个*(有不同边长的)*更长*

(因为它更高些),*因为这个路程短*(有着相同边长的)。——那这样呢(直角形状与楼梯状的对比)?——*这个*(楼梯状)*是更长的*(指出来起终点)。

马尔(5;0) 5根火柴排成一条直线,并且与另外5根组成的直线并列:"*长度是相等的*。——为什么呢?——*因为这里的火柴太多了*。——你能数出来它们的数量么?——*不太能*。——那这样呢(五根形成直线队列与前四根是直线第五根在直角边上的直角队列)?——*这个*(直角队列)*更长*。——(两个有着共同终点的Z字形队列:)告诉我蚂蚁沿着两队列走的路径。——(他用他的手指示意着路径。)——是相同的吗?——*不,这个更长些*。——(将一个火柴加到较小形状的队列:)这个队列中有多少根火柴,你能数得出来吗?——1,2……6个。——那这个呢?——*1……5根*。——好的。那么这两个队列是否长度相同或者不同?——*是的,相同*。——为什么?——(指向起点和终点)。"

周(5;1) 如同罗斯在纸条实验中的反应:端点是长度判断的依据。而对于火柴,一开始的判断也是类似的。尽管周事先已经算出来两个队列中的火柴数,但是他还是认为这两个分别由5根和8根火柴组成的队列,"*蚂蚁走完需要同样的路程*。——为什么呢?——*一个在这儿,一个在那儿*(指着队列的端点)。"然而,当通过采取用4根火柴排成直线队列和8根排成直角的队列使它们的差异更大化后,周认为,"*8根的更长些*。——为什么呢?——*因为这个是弯曲的*。"相反的,当将火柴成对地涂上红色、蓝色等颜色后,并且使这些涂有相同颜色的火柴在队列中相互一致,他就认为由4根火柴组成的直线形队列要长于由8根火柴构成的稍微弯曲的队列。他甚至认为4根火柴组成的直线队列要比7根构成字母G形的队列长,其实长度是相同的,只不过G形队列的最后一根火柴以向内拐弯结束。但是认为4根火柴组成的直线形队列要比7根有弯曲的火柴队列短:"*它长是因为有拐弯*。"最终,5根火柴组成的直线队列被认为长于同样是5根火柴组成的Z字形队列。

詹(5;10) 大多是做出了相似的反应,但是在使用火柴测试的时候,他的数字发展水平稍微好一些。两个相互平行的每个都是由5根火柴组成的队列:"*长度是相同的*。——这样呢(把两个都排成一边有3根另一边有2根的直角)?——*依然相同的*。——那这样呢(一个为直角另一个为Z字形)?——(他在数数)*依然是相同的,因为两个都是4根*。——(主试者将两根火柴一分为二,4根完整的火柴组成直角形状,而剩下的半根组成阶梯状)这样呢?——*这个长,因为它有8根火柴,要多一点*。——是,但若是沿着走的话,这个是否长或者说是一样长?——*还是它要长*。"

在实验中,有很多案例是相似的。是什么因素导致了守恒的失效呢?儿童坚持守恒的判断,仅仅是因为他们感觉如此。当守恒是可能的时候,他们就坚持这么判断。就像诺斯一样,当直线是对称倾斜时,或者当它们形成135°角并没有出现对称倾斜的时候他都能认为是守恒的,再或者甚至是当设置成各边彼此垂直的方格时,他都认为是守恒的。换言之,当位置变化不涉及内部折断或一个形状的边界超过另一个形状时,儿童都

能认为长度是守恒的。相反的，当这个形状的内部出现变化，就会产生很多导致不守恒的因素。对于此，年龄大些的儿童会采取推理的方法进行克服，而年龄小的儿童却不会。

(1)首先，始终起着决定作用的因素是终点的位置，其次，是起点和终点之间的位置关系。这与之前的研究有些相似。尽管概念是静态的，但如果是一个队列的端点要突出于另一个队列，那么被试就会认为这条路径是长的，而这个判断既没有考虑近一些的端点，也没有考虑绕路、转角、曲线等问题。这种反应模式在之前描述的例子中有明显的表现。这一点和第四章类似，就不详细说明了。此外，当两队列的起点是并列的时候，儿童认为终点更远的那条线更长，尽管另一条线绕得更曲折。之前例子中儿童的反应情况也属于这种反应模式，但是当其他因素的影响超过了终点位置这一因素时，情况也有例外。因此，周刚开始只考虑终点的作用，但是，当绕的路途增加时(由8根火柴构成的Z字形队列与4根火柴构成的直线队列)，绕路就成了决定性因素。

(2)因此绕路因素就与第一条中提到的终点因素起着相反作用。周对它进行了两次描述，他指着一个绕路的队列说："因为它是这样的。"来解释为什么这个要长一些，之后又清晰地说道："因为它有拐弯。"尽管一个被试可以偶然地得到正确结论：由于这条路是曲折的，所以它更长些。但是另外两个因素对于绕路因素的效用起着严重的限制作用。首先，只有当被试者是从动态的或者运动的方式(身体的或心理的变化)来考虑位置的变化时，它才会起作用。当他们考虑转弯速度或者是需要花费的时间时，才会考虑这个因素，但是这和道路的几何特性没有什么关系，如它的长度。因此当使用两种不同提问方式(运动还是长度)，会带来差异很大的结果。在考虑长度的时候，迂回转弯问题似乎起到很小的作用。其次，当以静态的或者是不运动的方式提问被试的时候，由于转弯或者曲线的存在，他会坚信直线是更长的，除非扩大绕弯的程度。因此，正如我们看到的，对于周来说，他认为由8根火柴组成的Z字形队列，要长于4根火柴组成的直线队列；但是仍然坚持由4根火柴组成的队列，要长于由7根火柴组成的字母G或C字形队列。因此，小的弯曲或者绕路不足以使儿童产生比直线路段更长的印象。这一结论也被第四章第一节的调查结果所证实。

(3)第三个重要的影响因素以加强因素1削弱因素2的方式产生作用。这一要素针对特殊的线段组成部分。如果重新排列两个长度相等的线段，使它们的端点并列，并且其中一条线段的直线部分要比另一条线段中的所有部分都长，那么这个包含长线段的队列就会被认为整体上更长些。因此，查(在询问的结尾)认为，那个直线队列要长于包含Z字形和曲线的队列，尽管它们具有相同的距离。诺斯认为带有直角的队列要长于另外一个，因为直角线段的两个边长差距更大些，因此有一个边就更长。这个因素与年幼儿童在判断中缺乏第三章中提到的"构成"有着明显的关系，他们不能成功地重构两个部分构成的整体距离，只是靠知觉或者直觉的联系来判断。由于缺乏对"构成"的认识，被试被最长的线段所误导。带来的结果就是，在直线段上的两点A和B之间的距

离，被认为要长于迂回或者 Z 字形路段间同样是 A 与 B 之间的距离，尽管众所周知的定义是两点之间直线最短。

（4）最后，从一定程度上说，组成部分或者成分的数量可能会影响到判断，尽管它的作用可能不太明确。最小的被试由于缺乏数字的概念，甚至缺乏对于显而易见的一一对应物之间关系的观察能力，因此他们的判断是不受成分数量的影响的。马尔计算出来，这个队列中的火柴是5根，而另外一个6根，但是仍然判断它们的长度是相等的，那是因为它们的端点是并列的。但是在阶段2A，成分的数量开始发挥作用。由于都是由4个纸条组成，因此詹认为两个不同形状的队列长度相等。但是，当折断火柴或是将纸条分割成不同长度时，儿童只在意数这些成分的个数，而忽视它们具有不同的长度。

最后两个因素是对特殊组成部分和组成部分数量的关注，它们都是源于错误的分段。整体长度既不是由特殊部分决定的，也不可以不考虑不同部分的长度，而只关注有多少组成部分。另一方面，前两个影响因素涉及终点及绕路的作用，主要表明儿童缺乏相应的区分能力，第一个是对间隔和终点的区分，第二个则是关于空间位置的变化和运动相关的物理概念（速度或时间）之间的区分。起初，位置的变化仅仅被视为次序的改变，速度和时间的运动学概念并没有和这些判断关联起来[①]。因此，没有成功地将次序和区间之间的关系整合起来，才是造成直观概念中没有表现出区分的本质原因。由于分段错误本身就是对于间隔间关系的错误认识，因此关于不守恒的全部因素可以归结为对间距和次序关系的区分和协调的问题。事实上，在思维初级的初级阶段，长度和距离是不同的概念，因为后者关注的是空位之间的间距，而前者则是指实物的属性，因而后者尚未被认为具有间距的属性。但是在运算水平阶段，情况并非如此。因为客体的部分与间距类似，它们都是对称的，并组成嵌套的系列。因此，长度守恒就是对与间距（客体的组成部分）相关的概念和与次序和位置变化相关概念的整合的问题。因此，在初级的1与2A阶段，对于提问的问题是长度还是距离的时候，难度在于不能对分段和次序进行协调。

对于由直线型组成的一系列客体，要么把其看作是由嵌套的系列部分组成，每个连续的部分都包含线段之前的部分、线段本身以及它后面连接的部分，或者把其看作为一系列端点之间的间距。把第一个 a 部分加到下一个 a' 部分即 $a+a'=b$；b 它本身添加到下一个 b' 部分即 $b+b'=c$，等。理解长度守恒就是理解 $a+a'+b=c$ 或者是 $a+a'+b'+c'=d$ 的问题，不管 a、a'、b' 最初的次序位置以及它们在序列中的位置如何变化，它们的长度都是保持不变的。研究问题就在于，为什么阶段1和2A的被试没有认识到这些等式，并且他们是如何认识到它们的。

很明显在长度不守恒时，这些等式和潜在的守恒是不会被意识到的。第四章表明，在不守恒的发展水平中，当一根直棍与另一根错开的时候，它就会被认为变长或者变短

① 《儿童的运动和速度概念》第六章等。

了。因此,在这些系列中考虑的只是单一成分的变化,如 a、a' 或 b' 在位置变化之后,将会变得与原来不一样长了。关于这点在此就不再赘述了。即使能对整体中的部分长度保持守恒,也不能保证对整体长度的守恒。

对于年龄小的儿童来说,困难在于对分段或者间距关系和位置次序或位置关系间的协调。我们可能会用一组 $a_1+a_1'+b_1'+c_1'=d_1$ 排成直线队列与另外一组 $a_2+a_2'+b_2'+c_2'=d_2$ 排列成Z字形的队列来对比。当因素1占优势的时候,被试仅注意到 d_1 要比 d_2 更远些,或者说是它的端点(它同样是 c_1' 的端点,要远些)要比 d_2'(它同样是 c_2' 的端点)的端点远些。他忽略了同等重要的分段,而只是考虑了 d_1 和 d_2 的端点。相反的,当因素2占优势时,当采用序列 d_1 和另外一个明显比它长的序列如 g_2 作对比,并令 g_2 的端点与 d_1 的并列。在这个案例中,突出的绕路使得 g_2 的全部长度明显增加。g_2 的所有部分看起来要比 d_1 的长,并不是因为端点一致或者两个序列组成不能一一对应,而是因为 g_2 序列中排列出来的角度或弯曲形状。单独考虑这些绕路的因素,会使儿童认为从 g_2 的一个端点到另外一个端点需要耗费更久的时间。因素1和2会通过对序列和位置变化的思考而歪曲分段,而因素3和4意味着由于分段的错误而导致对于次序的忽视。因此因素3重在夸大与其他队列部分相比最长线段部分的重要性,而因素4则在于计算组成部分的数量,并忽视其长度。总之,是错误的分段的存在导致了被试歪曲了整体的系列中次序和位置变化的关系,并导致了对运动的忽视。在每个案例中,分段一方面作为次序与另一方面的位置的变化没有被综合并且相对没有分化。正是由于缺乏对这两方面基本要素的协调才导致了直线系列不守恒的状况。通过上述分析得出两个重要的结论:第一,能协调分段与位置次序的时候,质的守恒就会出现。第二,当分段与位置变化在运算上能够完全贯通时,长度的测量将能实现。

第二节　亚阶段2B:中间的反应

处于发展初期的不守恒阶段和与第三阶段对应的运算性守恒间有两个水平的中间反应。在水平一的时候,被试在守恒与不守恒之间来回摇摆,不能解决他们困境。然而,在水平二的时候,经过一系列的尝试和错误达到了守恒。下面是一些例子。

吉雅(6;3)　核对两组纸条队列的长度是相等的,并且认识到,两种不同形状L形队列的长度是相同的。其中一个两边长度相等,另外一个则是一边的长度是另一边的两倍:"这两个队列的长度是相同的吗(主试者用手指沿着队列移动)?——*是的,因为它们是相同的东西,并且都有两部分。*——但是为什么它们的长度是相同的呢?——*因为在你把它们切断并重组之前,它们是相同的。*——那现在呢(把第二个L形队列的长边一切为二,使其成具有两个直角的阶梯状)?——*这个要长*

些(带阶梯状的)。——为什么?——*因为它有更多的纸,你在这多放了一条纸条*。——我在它上面放纸条了么?——*没有*。——如果这些纸条都被排列成直线,这个会比另外一个长么?——*是一样长的,因为它们具有相同的组合部分*。——(这个回复是已证实的了,之后再将两组纸条重排列,第一个队列排列成带锐角的折线锐角,第二个队列中排列成双直角状。)——*那个(带直角的)要长,因为需要走得更远*。——为什么?——*不知道……因为这条路(变成锐角队列)更长而另外一条短*。——但是之前纸条的长度是相同的,对么?——*是的*。——那现在呢?——*同样是……不知道……不,那个(锐角的队列)要长些*。"

两个都包含5根火柴的直线队列:"*他们的长度是相同的,因为都是有5根火柴*。——这样呢(直线形和阶梯状)?——*仍然是相同的,因为仍然是都有5根。远近仍然是都一样的*。——(其中的一个火柴折断,并使其首尾相连排在队列中。)——*不再相同了,因为你折断了一个*。——那这个路途是要比另外一个短么?——*是的,那个因为有7段而这个只有5段组成*。——那如果我再折断一根呢?——*仍然是它长*。——那如果我把它们都摆成直线状呢(两个直线队列)?——*那个路(折断的)更长*。

优(6;8) 将他认为是相等的两个直线形纸条队列,一个排列成为两边相等的L形,另一个排列成两边长度明显不同的L形:"*那个(两边不相等的)要更长,因为另外一个不需要走这么长的路*。——我拿走任何纸条了么?——*没有*。——那我添加任何纸条了么?——*没有*。——那这样呢(将第二个L形的长边折断组成一个角度)?——*这个(两边相等)要长,那个带角的要短*。——那这两个小人(在两个队列的起点放置)到终点是否需要走相同远近的路程?——*看起来他们似乎需要走相同的路*。——为什么呢?——*因为之前他们是一样的路程*。——那这样呢(两种Z字形)?——*需要走相同的路*。——那是否其中一个要长些?——*是的,那个(转弯少的)要长些*。

米克(6;9) 认为两个直线形纸条队列在相互平行放置时是相等的,又说在互相垂直的时候也是相同的:"*因为这两条路仍然是相同的尺寸大小*。——这样呢(排列成边长相等和不等的队列)?——(用他的手指沿着两条队列轮廓线滑动)*那个(不相等的)要更长些,因为它的这个边要比那个队列的对应边长*。——那如果两个小人沿着这两条路走,会不会其中一个路长或者短呢?——*它们是相同的长度*。——为什么?——*因为之前它们是相同的,然后你切断了它们*。——那为什么你刚才觉得那个要更长些呢?——*看起来要长些,因为这个边要比那个队列的长*。——那这样呢(两个带有不同长度边的Z字形队列)?——*它们的长度是相同的,因为在你折之前它们是相同的*。——那我现在已经把它们折过了?——*它们的长度就不再一样了*。"

雷恩(6;2) 与之前的被试不同的是,他不再徘徊于守恒与不守恒之间,而得不到任何结论。包括他在内,以及接下两位被试,都逐渐地达到守恒。在看到两个

直线形纸条队列后，指出它们是相等长度的，在两个都排列成L形队列，其中一个两边都相等另外一个两边明显不等的时候，他才第一次否定了它们的相等：“*它们长度不相同*(用他的手指沿着它们滑动)。走完它们需要不同的距离么？——*喔，是的，这个*(指着长的一边)*长而且那个*(同一个L的另一条边)*短，并且这里和这里*(两个属于另外一个L队列的分支)*一个长一个短*(基于对比成对边长的区别进行推断)。——那这样呢(两个不同的Z字形排列)？——*不，不相同……噢，是的，它们是相等的，因为之前它们的长度就是相等的。*”

保尔(6;6)　如同雷恩，刚开始认为两个不同L队列的长度是不同的：“*这个路程要远些*(指一条边较长的队列)。”但是之后：“*不，它们是相同的长度，因为在折之前，它们的长度就是相同的。*——这样呢(两个区别很大的Z字形排列)？——*相同，因为它们之前是相等的。*——即使再折下去，它们是否会保持相等的长度呢？——*当然。*”

韩(7;2)　非对称L形队列：“两个长度是否相同？——(犹豫中)*是相同的*(将两队列重新排列为直线队列)，*因为你只是折断了它们。*——这样呢(每个都有两个直角但是组成部分不同的两个队列)？——*不再相等了，那个需要更短的路程。*——为什么？——喔，不，这个少一个小拐弯；如果不是那样的话，它应该更短(如果另一边不止一个组成部分)。如果他们一起走，对于他们来说路程远近是相同的。——为什么？——*因为你只是对相同尺寸的纸折了一下。*——这样呢(增加了拐弯数量和组成部分的长度)？——*它要长些，因为弯曲了……噢，不，是相同的，因为从一开始它们的长度就是相同的。*”

在研究长度守恒中使用的步骤方法，与那些出现在研究数学和物理中的恒定量(逻辑与数字的集合、事物数量、重量问题等)的方法本质上是相似的。被试可能回到实验设置的起点，通过采取一些明显的措施(如汉重新将队列排成直线一样)，或者是心理上(它们起初是相等的)，再或者他可能会发现那些变化是相互弥补的。无论如何，对于分段(将直线段分为不同的部分)以及次序和位置变化(重排位置)的可逆性的认识的出现，意味着他们现在的协调性增加了。因此有几个被试(如吉雅)受位置变化的影响，认为分段的数目确实增加了，但在心里重新使其恢复原形之后，就改变了主意。因此，他们在分段和位置变化之间找到了和谐。其他的被试(如优)被拐角的数量所误导，认为由于位置的变化造成了纸条队列变长，但是当他们意识到组成部分还是原来的纸条，而变化的只不过是它们的排列顺序之后，就会改变看法。此时分段已经具有足够的灵活性，并能够通过协调考虑次序和位置变化来证实，反之亦然。在早期发展阶段，对于分段以及次序和位置变化的不可逆性的直觉，阻碍了它们之间的协调。

第三节 阶段3:运算守恒

阶段3实现了必然守恒,它是通过对分段、顺序以及位置的改变进行完全的运算协调实现的。10个6—7岁孩子中一个达到了阶段3,一半的7岁0个月到7岁6个月的孩子能通过,四分之三的7岁6个月到8岁6个月的孩子能达到阶段3。

马尔(6;2) 两条长度相等的纸条被折成不同的L形:“*它们的长度依然相等。你剪断了它们,但它们的大小依然相同,只是形状发生变化。*——(进一步使情况复杂化)它们的长度是否依然相同?——*是的,虽然剪断了,但是大小没变。*——其他类似情况呢(由许多纸条组成的之字形)?——*是的,依然相同,因为在被剪之前,它们的大小是相同的。*”

西林(7;2) 如果是由两个或三个直角组成的形状:“*形状发生变化,但是长度依然相同。*——(用火柴来替代纸条。)——*形状发生变化,但是火柴的数量没有变化。*——(使情况更复杂。)——*你虽然改变了它们的形状,但长度没有改变。*——(有一些火柴被折断。)——*这种情况下长度依然相等,因为火柴的数量没有改变。它们虽然被折成两半但是长度没有改变。*”

阿尔法(7;6) 纸条被折成有角度的形状:“*看起来纸条似乎变长了,但事实上没有。长度依然相同,因为纸条的长度是相同的。*——(将有着各种角度形状的纸条与有两部分直角形状的纸条相比较。)——*长度依然是相同的,因为第一个有很多小的路径,第二个有两个大的部分。*——为什么?——*因为它们一开始的长度是相同的,所以即使被折成不同的角度,长度依然相同。*”

当分段能够与对顺序和位置改变的运算协调时,守恒得到保证。之前的结果表明,一系列嵌套的部分组成,$a+a'=b$;$b+b'=c$;$c+c'=d$等,最初并不服从于守恒。不仅每个部分的a或a'等被认为是随着位置的改变而进行扩展或收缩,而且整体长度b、c、d等会受第一节所列的因素所影响而被错误估计。这些因素有:端点位置的顺序、角度的数量、特殊部分的作用以及组成部分的数量。第五章的结果表明,组成部分的长度守恒只有在顺序和间隔的概念被广泛应用在不局限于占据的空间的情况下才能得以实现。整体可能以不同方式被割断或分段,因此当涉及整体长度守恒时问题就更复杂,因为关于组成部分的分段和重组的概念与顺序和位置的改变的概念之间会互相干扰。换句话说,两种直觉行为仍未分化,也不协调。整体长度的守恒取决于这种分化和协调,守恒只有在运算水平可以实现:只要两种运算系统可分化,它们就是相互独立的,但是它们可以互相协调,如果需要,被试可以依赖于一种运算提供的证据来得出另一种运算的结

论。我们现在关注的运算之间的分化是第三章和第四章讨论的有关间隔和次序关系之间分化的进一步扩展。当运算涉及位置(sites)时,分化和协调才有可能。因此西林认为"即使改变形状,它们的长度依然相同",这表明了移动的物体与固定位置(fixed sites)之间的区别。言外之意,西林依据固定位置这一稳定不变的参照系统——它与移动的物体相互独立,来推断分段和次序以及位置改变之间的关系。阶段3以整体和局部的守恒同时出现为开端。这两种守恒类型都存在一个参考系统。在测量部分会详细描述这个系统,局部的细分以及总和导致了独立于初始次序以及次序改变的不变性。

解释很简单,只要孩子不将他的判断基于被评判对象之外的外部参照系统(例如测试客体出发的桌子或者尺子),他对区间和长度的估计是一个关于终点顺序的函数。终点可能是个别部分的末端或他所判断的整体系列的末端。因此,分段(或者嵌套的间隔或者局部长度)与次序的直觉没有分化,后者由端点之间关系决定并会随着物体形状的改变而变动。结果就是长度不守恒。但是当他发现,自己能够基于外部参考系统(排列被实验物品的桌子或纸条)判断时,他将嵌套的间隔与位置及位置的变化整合成一个相关的综合空间框架,这一框架不再局限于测试对象的不同排列布局。因此他能够区分分段和次序的关系(包括位置的改变),长度的运算守恒得以实现。

两种运算方法(运算和顺序)还处于质性水平。在它们分化之后,自动出现的相互协调,表明了它们是互补的。考虑分段就意味着位置和顺序,反之亦然。但是当一个活跃而另外一个休眠时,它们不作为一个复杂整体同时起作用。然而,测量却需要分段和位置改变的完全融合,这就是达到度量水平的时间稍微滞后于质性长度守恒的原因。

第二部分　长度的测量

之前的部分已经表明,分段以及对部分整合的运算一开始与次序和位置变化的运算是没有分化的,以及嵌套序列的不同组合是如何导致长度不守恒的。两种运算的完成,一方面分段和另一方面的次序或者是位置变化的运算,自然而然地产生了守恒,这是因为组成部分以及对它们的累加已经独立于它们次序和位置的变化。然而关于自发测量(第二章)的研究表明,测量是概化的分段(选取一个单位长度)和位置改变(使用一个单位长度)的综合的运用。因此接下来必须要关注的问题就是,这种最终的综合与两套质性的互补运算的分化和协调之间的关系。

(这部分所用)方法是之前方法的直接拓展。将各种各样包括直角、锐角等的线型纸条进行不同的组合,并将它们粘贴在硬纸板上,让被试判断。当被试给出答复时,认为它们是等长的或者一个比另一个要长时,给他几个可移动的纸条让他去证明自己的结论"看一下你是否正确,试一下测量"等。之后,给他提供3厘米、6厘米的短纸片,也

有9厘米的(这些长度与构成队列的纸条的长度是相对应的)。主试可以用3厘米的纸片沿着队列的起点进行2到3次的测量,并解释一个小人正在沿着这条路走,这就是他走路时的连续步伐。因此,通过展示让被试用"步伐"的方式来完成他自己的测量。

第四节　阶段1和亚阶段2A:在传递和测量之前的多种方法的比较

早期自发测量研究会提供多种测量方法,以及如何使用不同的测量方式,因此我们很难去孤立地看待每一个具有连续性的反应类型。第2章对测量结果之间的联系进行详细的分析,目前的测量方法是专门设计出来研究长度守恒作用的。在阶段1和2,儿童的反应包含了多种情况,不存在一个共同的特点。儿童不能构建测量的单位,甚至在使用一个普通测量单位时也不能完成质性运算的传递。

皮瑞(4;0)　只是通过视觉上的比较,而不会采用其他测量程序,这也是阶段1(2到4岁)儿童反应的一个特点。当给儿童展示不同布局的线型组合时,他只是通过观察来做出长短的判断,而拒绝使用提供的用来测量的纸条和卡片。"只通过看,你能确定答案吗?——*是的*。把这个放到这儿,把那个放到那儿不会有帮助吗?——*没有*。"……"步伐"程序完全不能通过。

加斯(4;11)　线a和b($b>a$)组成形状为L的形状,线a'和b'($a'<b'$,$a>a'$)组成形状为V的形状。"*那个更长*。——你能确定吗?(提供一个纸条)——*是的*。(沿着a′放测量条)*它太短了*。(纸条没有a'长,所以加斯沿着a放测量条:)*它更长*(纸条比a长)。*这个路径更长*(仔细检查,看看他是不是判断正确,测得是否准确,他自己也不确定)。——就没有一种更好的方法来确定你的判断是否正确吗?(提供3cm的测量卡片。)——(他沿着线条滑动测量卡片,看上去好像是一个小人在步行)*是的,它更长*。——你看出来这个小人走了几步吗?*看,一步、两步、三步*(使用每一个小单元测量并用点标注每一次的终点)。——(他又开始挪动卡片,但不是那么明确,只是随机放置他的卡片。)——*在另外一条线上*。——(跟在第一个形状上做的一样。)——按照这个步骤一步一步能确定哪个更长吗?——*不能*。——为什么那样做?——*因为他就是那么走的*。"

派(5;6)　"你要测量这两根线的长度吗?——*嗯,是的*(说着就用两个手指沿着线比画起来了)。——你能测得再精确一点吗?——*好*(他用手指头在另一条线上滑动,显然很粗糙,不准确)。——你看,我们来看他需要走几步(按照前面说的测量了三次,并在每次测量的终点做上标记)。——(派继续测量,但是并不关心每一步结束时的位置。事实上,他仅仅是模仿去移动卡片,而不会使用一个测量单位并把这些相等的分段相加。)"

欧迪(6;1)　判断其中一条线长7个单位,由一个长边和一个短边组成,短边垂

直于长边，另一条线也是长7个单位，但是线两边成锐角，他判断前者比后者更长。给他一个6cm长的卡片，并对他说："使用这个，并告诉我这两条线是否一样长？——(他沿着两条线滑动测量条，但是没有测量他们的长度。)*这条线(直角)长一些*。——那如果这个小人像这样沿着它迈步走呢(演示头三步)？——(他继续测量着这条线，但是忽略了另一条。)*是的，这个更长*。——那另一条呢？——(他使用同样的方式测量另外一条，但是忽略了每次测量之后的终点的位置)*前一条更长一些*。"给他展示另外两条形状的线型，一条是由6段长一点的部分组成，其中三段长度一样；另一条较短并折成垂直的形状。欧迪用一个长的测量条测第二条中三个部分的长度，而忽略了第一条。"*这个更短些*。——为什么呢？(他用长条测第一条线型中长的部分)。*这段更长，因为它由6段线组成*(6个不相等的部分)。——这6段长度一样吗？——*不一样*。——它们数起来一样吗？——*是的*。——有的线比其他的长，不会产生什么不同吗？——*不会，那个更长，因为它由6段组成*。——(主试画了两条线，一条是6长段组成，一条是6短段组成)。哪条更长呢？——*那条更短，因为每一步更短，而这边更长*。——那么这两条线型呢？——*那条更长因为它由6段组成*。"解释在这里没有作用。

布鲁(6;1)　认为由7个单位组成的直角形的线段比由8个单位组成的锐角形的线段长："*这个更长*。——你能确定下吗(提供测量纸条)？——(他用测量条去测第一个形状中长的部分的长度)*这条更长*。——那样就行了吗？你还需要做其他的吗？——*没有*。——纸条告诉你什么了呢？——*那个(第一条)更长*。——难道不用测第二条就可以说哪个更长吗？——(他用另一个纸条去测量第二条线型的一个部分)*是的，后者更短*。(没有比较两个测量纸条的长短，他甚至没有去测量两个线型的其他部分)。"——主试现在引入单位测量的程序，并向儿童展示小人如何在第一条线型中走前两步："*一步、两步*。那我们能通过这种方式找出来哪一条路更长吗？——*是的*(他继续测量)。*三步、四步。这个更长了*。——不测量另外一条你就能判断第一条长吗？——*是的*。——现在你来测第二条。——(他移动测量条，并用铅笔随意地画线标注，因此间隔并不都是一样的。)——铅笔的标记有什么作用呢？——*铅笔标注说明他从这里走过*。——它们能帮助你确定那条线段更长吗？——*是的。比如，第一条线标注了3下，第二条标注了5下*。——哪个更长？——*第一个长*。——为什么呢？——(没有回答。)"

马尔(6;2)　两个L型的线长度都是8个单位，第一条两边几乎相等，第二条长度差距比较大。"*这个(第一条)长一些，因为它由两条比较长的两段组成；而另一个的由一条长、一条短组成*。——(给他三个长度分别为3cm、6cm、9cm的测量条让他测量。)——(他把9cm长的测量条放到第二条线段长边上，3cm的放到第二条的短边上，6cm的放到第一条的边上。)——这样就能帮助你找到哪条长哪条短吗？——*是的，第一条长*。"给他单位测量条，并给他展示如何使用步伐测量。马尔应用这样的方法去测量并数出相应的数量，但是端点和间隔都是任意的，不一定相等。"测量条帮助你把被测量的线段分为几段吗？——*是的*(他把单位测量条放在两条线段

上测量，也不管是几段）。*那条长一些。这就是我要表达的。*”

朵来(6;4) 比较了两条长度相等的线的长度，一条是折成直角的，另一条是锐角。向他展示怎么用单位测量法（也就是步骤法）来测量。朵来继续测量，尽量准确，一边数着步数。“*6步，这条更长一些。我还要用同样的方法测另一条的长度吗？*——如果你不测量另一条的长度，你怎能判断哪条线段长度更长呢？——（他用同样的方法测量了另一条的长度，但是没有那么精确，在中间的时候随意地标记了位置的终点，然后数出步数）。*9步，后面这条更长。*”

雷恩(6;3) 比较两条弯成直角形状的两条线的长度，用单位测量法，计算测量卡片的步数，但是每一步结束并不做标记。主试跟他讲述怎么使用铅笔对每一步进行标记，之后他进行重复，尽管并不是那么精确。而后，他拒绝测量两条形状稍微复杂的线条长度，因为多少步明显可以看得出来。“*这样看，三大步，三小步，是比较长。*——（无论如何还是用测量卡片测量了一下。）——（他用不同长度的卡片放到两条线上）*六步和四步！*”

阿瑞(7;2) 也用不同长度的测量卡片沿线轮廓线测量，发现第二条轮廓线上的卡片没有完成覆盖线条。他说：“*第二条更长，因为测量卡片没完全覆盖线条。*（根本没有测量第一条的长度！）”

楼(7;8) 用“步伐”的方式测量两条折线：“*这个线更长，因为步数更多。*——非常好。那这样呢（线型分别由6段和4段组成的两段线段）哪个更长？——*那个更长*（数出部分有多少）。——测量卡片一样长吗？——*不一样。一部分长，一部分短一些。*——大的和小的长度是一样的吗？——*不一样。*——你可以测出来哪个长吗？——（他用3cm长的卡片测第一条线的长度，用6cm的测第二条）*分别是10步和4步。前者更长。*——每一步长度都一样吗？——*不是的，有的长，有的短。*——你能用这个小的纸条测量这个吗？——*可以的*（用较短的测量）。*测量步数分别是9和8。*——然后呢？——*测量结果少一步，所以这条更短。*——你能用长的测量卡片测量吗？——*可以。如果他走大步的话，它们还是一样的。*”

对于测量情景的初级阶段的反应是非常明确的。它们同样与第一部分研究中阶段1和2A长度不守恒中的反应相一致。不守恒的主要原因是不能区分分段和位置的次序（或变化）。由于没有区分，它们并不能彼此互补并相互协调。因此，它们并不参与整个全局空间框架的构建，而这一全局空间构建对于综合理解空间位置和在空间中不同排列的客体有重要作用。同样地，上述分析表明，儿童如何以及为什么不能够完成测量，再一次指出两种类型直觉之间缺乏协调，而完成测量则是要求它们运算的整合。

这个实验并不是去解决自发测量的问题（在第二章中所研究的），而是研究儿童吸收主试所展示的方法的能力。因此相应的反应类型就变少了。这些反应可以分成一个整体的两个方面。要么是能够对测量单位做出位置的变化，但是缺乏充分的分段；要么

是能够对被测量的客体进行分段，但是不能正确地使用单位测量物。如果将这些反应与第二章的做对比，能够分段但是不能考虑位置变化无疑与最早阶段的反应类型相一致，因为它主要依靠明显的感知觉的和眼睛运动（“视觉转移”）来对比不同轮廓形状。相反地，能够进行位置变化而不能考虑分段与那些模仿动作（源自“手动转移”到“身体转移”）相对应，这些模仿动作是被试使用他们自己的身体及其移动作为普通测量的萌芽。在这章给儿童提供事先准备好的测量方法，问题变得简单了，孩子们能够明白和吸收多少，则取决于他们对于长度的直觉，尤其是是否达到守恒。因此两种类型的反应是同时出现的。这些反应所表现出来的仅仅只是儿童不能协调分段和位置次序的直觉，因为这两个因素没有充分地分化来彼此互补。

只要关于位置的改变不能考虑分段，运动的直觉思维就会占据主导位置。这种反应最基本的形式就是被试用他们自己的手指沿着两条线路滑动，并且做一个动态的对比（参看派的直觉行为）。在这种反应形式中不存在任何分段。发展稍微提前一点的反应形式是，被试用他们自己手指的位置变化来表示一系列的位置变化。这也就是分段的萌芽。比这个反应更高级一点的表现是，被试用两个或三个手指来测距或者宽度。所有的反应类型都是限制性的，因为分段仍然都是近似的，并没有明确的标记来确定它。值得注意的是，当主试提供给被试一套可以用来单位测量或者做一般测量的纸片时，同样出现了相同的反应。如同之前用手指，加斯（4岁11个月）把卡片沿着线路移动，当主试者展示应该如何使用“步伐”测量之后，他再次移动纸片，而后就随意地用铅笔标记纸片连续运动达到的端点。派和欧迪等也做出了相同的反应。显然，当被试采用位置变化来帮助自己做出判断时，经常是以不能分段为代价的，要么两者都不准确，要么两者在本质上都很随意。

第二种类型的反应则是以不考虑位置变化的分段开始的。其最基本的形式则是像布鲁表现的那样，他最初的分段并不是很完全，或者说是不太详尽。他用一个纸条沿着队列中一个条边，甚至没有彻底覆盖那部分，就认为可以判断两个队列的长度了。之后，他用另外一个纸条沿着第二个队列的一部分放置，在没有对比两个测量纸条长度，也没有完成对两个队列其他部分的测量的情况下，再次得出两队列之间的长度判断。布鲁的“测量”仅仅是通过把队列分成一些特别的部分进行对比，并且没有将这些组成部分进行转换或者互相比较。在给布鲁展示了如何使用连续步伐测量后，他数出了两个队列的不同尺寸的步伐数目。马尔同样是通过对比两个队列中的组成部分来测量，似乎测量仅仅是通过强调组成部分存在来复制一个形状，并以此来辅助视觉对比。由于一般测量物没有位置的变化，每个形状只能进行内部分段，因此不同形状之间的联系只能通过眼动来获得。因此朵来将第一个队列分成单位步伐长度，并很无辜地问道：“我是否应该对另外一个也这么做呢？”他并没有意识到单位测量的作用就是一个通用测量，因此其位置的改变可以对不同形状的队列做精确的对比。

在第一种类型的反应中，被试者只是沿着路线移动测量工具，似乎移动本身就能够

得出长度,并且分段是不必要的。而第二种反应类型的被试会做出直觉的分段(例如没有考虑整体的长度并且错误地强调基于感知的特别组成部分),但是并不是测量单元从一个组成部分移动到另一部分,或者是从一个队列轮廓移动到另一个。无论哪一种,正确测量显然都是不可能的。这些反应类型清晰表明,测量必须以位置变化和分段的综合为开端,这就意味着:(1)对于一个作为通用测量的中介物来说,它必须从一个队列移动至另一个;(2)这一部分同样要被应用于测量其他的部分(使它们同等化或可替代化,以此承担单位测量的作用)。

(1)在最初水平,对于通用测量(common measure)理解的缺失在之前的反应中已经被充分体现。它直接源自于不守恒。通过中介M来对比A和B的测量,可以表达为:$A=M$,$M=B$;因此$A=B$。这一传递性组合首先涉及令M与A相等,之后是和B,这种运算只能将M从A移动到B。在这一阶段,分段和位置的次序之间有着极少的区别,只有A、B和M有着相同的形状和位置的时候(在这种情况下就不再需要通用测量,因为通过感知也能得出其相同性),才能够被认为相同。如果它们的区别在于形状,它们的尺寸就可能会被认为随着位置的改变而变化。因此,在这一阶段,儿童对于通用测量是没有概念的,更别说对于测量单位的构建。他们不会将中间量M从一个对象移到另一个,换言之,他们只是单独地测量A与B,因为改变M的位置并不能帮助他们解决问题,因此守恒是不能够保证的。因为细分和位置次序没有分化,分段会随着位置的变化而改变,因为没有达到守恒也就没有运算性传递。

(2)如果之前关于两种形状关系的论断是正确的,那么一个单独形状的内部成分之间的关系也是如此。同样地,这就会没有位置的变化,一个组成部分不会被应用于其他的部分,不会作为一个通用测量去和不同的部分做对比。因为测量单位的概念的需要,真正的度量依赖与各部分之间的相互比较。让我们想象一个数字A是由a与a'组成,数字B是由b与b'构成。如果一个儿童只是将a和a'与两组纸片m和m'($m+m'=M$)对比,得出$a=m$和$a'=m'$,之后又将m与m'应用到B上,得出$m=b$,$m'=b'$,他就会下结论:$A=M$,$M=B$;因此,$A=B$。但是这个推论没有涉及度量尺寸或者是相关的运算;只是对定性(直觉)传递和运算成分的一般化而达到的守恒。真正的单位测量是要涉及对比a与a',之后,对比m与m',b与b',等。这个对比必须要涉及a位置的变化,或者其等价性,转移到a',如此,这个部分是与其他部分相等价或者与它们二阶的分段相等价。这就是分段与位置变化的综合或者融合所代表的意义,因为单位测量是可移动的并且是可与每个分段相等价的,而定性对比只是将一个部分长度与整个队列的长度作对比。正确的度量运算是由于等式$a=a'$,因此$A=2a$,而不仅仅是$a<A$,$a'<A$。

在此阶段,单位的概念仍然是很遥远模糊的。儿童们只是单纯地数细分的数目而不关心它们是否相等,而相等是单位的一个必要条件。因此,欧迪用纸片去测量小人沿这条路可能走的连续步伐,只是数出了另一条线路中不相等部分的数目作为步伐数。他承认那些步伐是不同的("一些大,有些小一点"),但是却按照同类的单位进行数目统

计了。雷恩同样也是这样。甚至是7岁8个月的楼,用两个不同长度的纸条测量两个队列,他承认两个纸条是不相同的,但是还是通过测量纸条走的步数来对比两个队列的长度。他几乎没有掌握同类单位的作用,以至于他认为当使用短纸片测量的时候,两个队列的长度是不同的,但是再用长步测量的时候却可以是相同的。

具有传递性的组合是不可能的,因为没有达到长度守恒,并且单位测量的使用也是不可能的,因为没有对分段和位置变化进行综合使用。不守恒是因为分段和位置变化没有分化,并且两者之间不能协调。因此,表明守恒和传递性是分段和位置变化的完全融合的首要和必要条件,而这种完全融合则是单位测量的概念和真正的尺度测量所需要的。第二章的结论可以由此得以证明:传递性是在测量之前出现的,并且单位测量的构建是这一发展过程的最后阶段。

第五节　亚阶段2B:中间的反应

在第二章,被试的反应是自发的,但在本实验中则要求被试利用提供给他们的测量单位。问题是他们在长度守恒的不同阶段能够多大程度地同化这些智慧工具。在阶段1和2A中,被试没有守恒的概念并且常常不能理解中介物和单位的概念。在子阶段2B中,长度的守恒模模糊糊地被意识到了,孩子们开始理解在通用测量中的传递,后来开始理解测量单位的作用。但是他们的理解是通过试错而获得的因而缺乏运算性质的成分。然而有趣的是,当儿童不能意识到单位的意义时,却出现了传递性的萌芽,以下例子中的前两个可以很好地表现这一点。

克劳(6;2)　对比两组线的长度,一组的线被折成一个三角板,另一组是由相互垂直的五个相等部分组成的:"*它们有相同的长度*。——为什么?——*因为我看到的就是这样*。——你能通过使用这种方法确认一下吗(主试向他展示如何一步一步进行测量,被试拿了卡片)?——*1,2*……(继续从A开始计数到5,并且运用同样的方法数到B,不需要进一步地提示),*它们都是一样的*。"

然而,尽管这个建议能得到对传递性的理解,但是单位的概念仍然没有出现。主试提供了另外两个不同的形状给克劳,并加上一个3cm和一个6cm卡片。克劳用3cm的卡尺来测量第一个形状,并用另一个6cm的去测量另外的一个,得到的结论是:"*那一个比较小*。——为什么?——*因为这个步伐较短*。——你能不能用大步来进行这个过程?——*可以*。——那么?——(他于是使用了那个6cm的卡片。)——它是不是比较短?——*它们一样*。——这个6cm的卡片是那个3cm的多少倍?——……——看一看(实验者拿了两个3cm的卡片放在6cm的卡片上面)。现在如果你用3cm的卡片去测量这条线(第一个形状),它是和另外一个一样长还是要小呢?——*比另外一个小*。"

杰克(6;3)　不要更多的提示，用3cm卡尺测量第一个形状，用6cm卡尺测量第二个形状，得到的结论是这两个形状的长度是一样的。但是他依然没有理解单位的概念并且对传递性的概念依然是直觉水平的。他也测量了另外两条线，使用3cm的测量其中一条，6cm的测量另外一条线，并得到的结论是：“*后者比较短。*——为什么？——*因为它的步数更少。*——你看一看，这些步数是不是有大有小？——*是的。*——那么？——……——(实验者拿了两个3cm的卡片放在了一个6cm的卡片上面)你明白了吗？——*是这样的。*——那么这些线是一样长还是不一样长呢？——*不一样长，那个更短。*”

吉斯(6;5)　开始明白单元的作用了。开始时，他把3cm的卡片沿着要测量的两条线上滑动，就像在较早试验中做的那样：“那样做有用吗？——*没有。*——接下来你应该怎样做？——*计算步数*(前两步在之前已经演示过了)。——试一试。——(他测量得到第一条线有5步，而第二条线有6步，无需进一步的提示)*这条线更长一些*(表现出对传递性的一些理解)。——那么这两个呢(一个楼梯的外形是由一些长长短短的段数组成，另外一个的外形就像锯齿一样)？——他用6cm的卡片测量第二个的外形，然后再测量第一个，但是发现他的卡片对于其中较短的部分而言太长了。他忽略掉这些，在上面做出任意的标志然后说：“*6和6，它们一样长。*——你确定？——*相当确定。*——所有的步都是一样的尺寸吗？——*不是的*(他有重新测量它们，这次他把一个长的算作两个短的。)——你在做什么？——*我把这个算作一半。*——你认为它真是一半吗？——*是的，我刚刚看过了*(他把卡片单元不准确地放在两个不连续的部分上)。*这两个组成一个*(这是他通过‘看’而感知的，但是依然不能通过测量来证实)。”

岩(7;3)　在水平亚阶段2B和阶段3的过渡阶段。他比较了两个折线，每条折线都是由两部分构成的，并且通过视觉比较认为，第一条折线的较长的部分和另一条的较长部分是一样长的，但是两者较短的部分则不是一样长的：“*这和那*(较长的部分)*是一样长的，但是这部分*(第二条折线上较短的部分)*比这个长，那么这个就长一些。*——你能像这样去测量它吗(一步、两步，依次继续下去)？——(他继续测量了这两条线)*是4和5段，这条比较长。*——那么这两个形状呢(两个锯齿形状)？——(他用3cm测量其中一个，6cm的测量另一个)*一个是6步，一个是4步。这里的一个长些。*——这些步数不一样长，难道没有影响吗？——*哦，是的，确实有影响。*——那你该怎么办？——(他都用3cm卡片测量)——那么这两个呢(另外两个形状)？——*这个比较长，因为它有更多转角。*——(给他提供3cm和6cm的卡片，他都用3cm卡片测量)*那个是8步，这个是7步*(正确)。——另外一个呢？——(他用6cm的卡片测量一个外形，又用3cm的测量另外一个)*这个是4大步，那个是4小步。*——然后呢？——(他对比了两个测量结果，并且没有被提示)*那个(6cm)是这个的两倍。*——那么？——(在3cm卡片上数)*这个是8步，那个是7步。*”

这些中间的反应的第一个标志就是，协调性的成长，之后是分段与次序的关系和位

置的改变之间进行综合的出现。当让被试者应用卡片连续地测量时,他能够将被测外形分割成连续的部分,能在固定的顺序下移动标准的卡片,并且依赖相当准确的参考标记。最初的演示帮助被试完成了协调的测量并且让他们理解了如何使用通用测量。(第二章中)在某些年龄段,让儿童自发测量,他们会用自己的身体作为中间部分,目前实验过程在一定程度上使其意识到一些测量中相等或不相等关系的传递性。然而这种理解并不能立即让他们做出相等单位的分段。克劳和杰克在数"步"的时候没有注意它们是否尺寸一样,并且克劳仍然相信,通过一种方法测量得出是相同的尺寸,而使用另一种方法测量长度会变得不一样,这些清楚地表明他对传递性的理解上具有直觉性和前运算的特点。另一方面,吉斯和岩,几乎能够完全理解测量单位的功能,但是他们只能够通过不断试错来获取这种能力。他们接近于到达运算阶段,但是却不能认为已经掌握了它。

第六节 阶段3:运算的测量

伴随着分段和位置顺序的协调,长度的守恒得以实现。分段和位置改变的运算融合成为可能。它以系统测量的形式出现,但是这之前可能会有一些时间的滞后。质性的传递性和守恒在平均7岁半获得,运算的测量(也就是来源于直接的洞察力而不是试错)只有在大概8岁或者8岁半才获得。这个时间滞后尤为有趣,因为这章的研究方法是向被试者演示各种测量方式,并不像第二章那样完全依靠被试的直觉。再次证实了定性的运算和真正测量之间的区别。

奥(7;4) 对比两根分别各由两个直线部分组成的折线:"*这个折线比较长,因为这两部分是一样长的*(那两个较大部分),*但是那部分比这部分长*(较短部分)。——你确定?——*是的,相当确定*(在没有提示的情况下,他用他的手指丈量着)。——这儿(纸带),看看你是否是对的。——(他用纸带测量一根折线上面较长部分的长度,并标记在纸带上,然后把它和另外一条折线上相同部分做对比。)*它们是相同的*。(他然后测量较大折线的剩余部分并和另外的一根同样的部分做对比,发现了差异。)*这个要大一些*。"提供另外两个形状,其中一个比另一个有更多的Z字形弯折:"*那个更大*。——为什么?——*因为如果把它拉直,它比较长*。——为什么?——*因为它有更多的线*(部分),*而另外一个少一些*。——都有多少呢?——*3和5个*。——它们都是相同尺寸吗?——*不完全是*(它测量着)。*这条线是那条线的两倍*(继续测量)。*那样的话,就是5和6*(单元)。"重新提供一对新的形状和3cm与6cm的硬纸带。他测量一个两部分不同的形状:"*哦,两部分这些*(分段)*组成一个大的,并且这个*(3cm单元)*是那个的一半*(6cm的单元)。"他然后继续发现其中一个形状比较长,因为它测量得到3个单元,和3个半单元,而对比的另外

一个是4个单元。

夏维(7;9) 两条线被折成锐角:“*那一条比较大。——*你确定? *——我已经看到它们的差别了*(拿起一条纸带测量它们,然后展现它们的区别)。——那么这两个呢(外形像不同长度分段组成的楼梯)? *——那个长一些。——*你确定吗? *——我需要弄清楚。*(给他3cm和6cm的卡片,他用6cm的卡片测量较长的分段,用3cm的测量较短的一些分段。)*那个是一半*(在6cm尺子的一半处做标记)。*是5比3.5*(正确)。

威利(8;2) 开始是同样的反应。给他提供两根由不同分段组成的折线,并且他用6cm和3cm的卡片去测量这些分段。然后说:“*这个折线比较长。——*为什么? *——这3个小的直线组成1个半*(6cm的单元),*并且有3个大的直线。——*你是怎么得到是一个半呢? *——因为我用大的卡片测量,它只是两个小的。——*这条长的比那条短的长多少呢? *——半根线。*”

科尔(8;3) 分别用9cm、6cm和3cm的卡片测量两根折线:“*我认为这个*(9cm的卡片)*是那个*(6cm的卡片)*的两倍,不对,是那样的*(6+3)。”然后他选择3cm的卡片作为唯一的测量工具。“*因为两个小的卡片组成一个中等长度的卡片而一个中等的卡片加上一个小的卡片可以组成一个大的卡片。*”然后他正确地测量了每一个分段。

所有的这些被试者发展到了运算的长度守恒并且都不需要最初的演示。因此他们的成功不只是吸收了“步伐”的演示,而是在不用任何解释的情况下,都能够成功使用标准的测量。然后,毫无迟疑地,他们对比单元长度,并发现小的测量单元是其他的一半或者1/3,还发现要测量的折线的分段同样地都可以简化为3cm卡片的倍数。当分段能够由单个移动单元予以描述的时候,分段就被概化了。这个概化暗示着分段与位置的改变已经完全融合了,因为被用来度量整体这一个组成部分只有在作为一个测量单元并被连续使用的时候才能完成测量。例如,通过位置的改变进行连续的使用,并由准确的参考点决定每次的位置。

在实验设置中给儿童提供的用来进行标准测量的测量物,以及配合一个小人沿着测量线进行行走的说法,非常容易让人获得测量单位的概念。然而即使是这样,被试真正地理解这一概念也只有在有阶段3才能达到,儿童自己发展出这一概念。在发展的早期水平,提供的材料和演示只引起了直觉反应,尽管这些比在自发测量(第二章)中表现出的已经高级一点,但仍然缺乏对测量完整的运算能力。当前的实验条件容易掩盖水平3A(不含测量单位的通用测量,来源于质性的运算传递)和水平3B(测量单位的使用)之间的区别。但是两者之间还是存在明显的发展滞后性,第一部分中研究的长度守恒(质性的运算传递)和这一部分当中对测量的分析中也有相同的现象。

杨晓辉译,朱莉琪审校

第六章　对线段分段[1]

对儿童在测量情境中自发行为的研究(第二章)表明,对于度量单位的意识在阶段3B才会出现,并且依赖于先前掌握的运算转变(阶段3A)的质量,同时依赖于对表征水平上位置变化的协调,这本身就是一个参照体系的函数。接下来对于位置变化协调发展的分析表明,此方面的发展涉及测量,参照系统的完善离不开距离和长度的守恒。守恒是测量的前提条件,第三章和第四章展示了在静态距离和移动物体的长度方面它是如何发展的。第五章是关于长度守恒的,对于相等或者不等关系的转变,以及对于测量的认识。研究长度守恒和对于测量认识的研究方法是一致的,使用成对的线段、直线或者曲线。研究目的是区分(lay bare)线段分段、顺序和位置改变的关系的作用,并阐述它们对于守恒和质性的转换以及度量单位出现所具有的重要性。现有研究已经对这部分发展潜在的机制做出了探究。一方面,长度的守恒是对分段(或者嵌套的间距关系,nesting interval relations)和位置的顺序(例如关系的顺序以及按照这个顺序进行改变)进行协调的结果(第三、四章)。作为这种协调的结果,在这以前没有分化的、需要外部参照成分的两组因素,现在通过一种综合的参照系统变成了相互补充的关系。另一方面,对于长度的测量是分段和位置改变两者协调的结果,这种协调不是两者关系的补充,而是它们运算的融合。因此,公制单位实质上是一个部分,可以应用于同一整体的剩余部分。度量是通过改变这个等价的中间成分的位置来实现的,整体可以被那些分割的单位所表达。

但是,在最后一个实验中,分段是向被试展示测试线段的一部分,因此对于单位的选择在一定程度上是由测试物体的结构所主导的。这部分实验程序是用来测量守恒的。为了完成对于度量运算发展的调查,接下来的实验对上述实验过程进行了反转。让儿童在一条线段中间通过不同的测量手段找到特定的部分,这些测量手段是对第二章和第四章研究方法的折中。

有两条直线段A_1C_1和A_2C_2,它们可能平行也可能不平行,被试需要依据A_1C_1上的点B_1在A_2C_2上找到点B_2使A_2B_2等于A_1B_1。这个问题跟某些研究者在其他地方提及的问题有些类似[2],给被试展示点在一条直线上移动的过程,让被试在另一条间断的线上定位

---

[1] 与 Mme Renate Schaffrin-Kersten 合作完成写作。

[2] 《儿童的运动和速度概念》,第三章。

出相同的长度。然而，除了本研究中使用的是两条直线段以外，两个实验的中心问题是不一样的。前一个研究主要关注的是对一个间隔的分解，从起点到终点。当前的研究关注的是对于这个间隔测量的发展问题。这个研究是上一章的补充，它并不是对终点所起的作用这一特定问题的直接回答。

第一节　结果和方法概要

用固定在两个钉子中间的线的长度来表示两条直线段 A_1C_1 和 A_2C_2，（或者 A_2D_2，如果第二条线段比第一条长的话）。一个带孔的珠子穿在线上，并放在 A_1 和 A_2 的位置上，也就是在两条线段起点的位置上。告诉儿童："带孔的珠子是一辆电车沿着线（轨道）行驶。我的电车走了这么远（将第一个珠子从 A_1 移动到 B_1），我需要在你的轨道上（A_2C_2）走多远，才能使两者走的路程一样远呢？"接下来会问一系列难度递增的问题（如下所示）。但是，最好从第二个问题开始，如果儿童不能正确理解，则从第一个问题开始，否则继续下一个问题。

（1）两条线 A_1C_1 和 A_2C_2 平行并且一样长（30cm）。两条线段上的各个点都是并行排列的，因此，儿童在看到 B_1 之后，要立马指出在 A_2C_2 上的 B_2。

（1b）跟上一个条件类似，只是要求儿童从与主试相反的起点开始移动。

（2）两条线 A_1C_1 和 A_2C_2 平行并且一样长（30cm）。但是两条线段并非完全并列（相差10cm），因此 A_1 和 A_2 没有完全并列。

路程比主试提供给儿童的标尺要短，所以儿童可以用他们自己的手指比画一下 A_1B_1 的长度，并将其移动到 A_2C_2 上。

（2b）跟2设置一样，但是儿童需要跟主试的起点相反。那就是，如果主试开始从 C_1 移动，儿童需要从 A_2 开始移动，反之亦然。

（3）跟上面的实验设置一样，但是 AB 的长度大于给儿童提供的标尺（线段长50cm）。

（4）跟上面的实验设置一样，但是 A_2 与 A_1 在其右边错开，并且 A_1C_1 和 A_2D_2 长度不一样。这里引入了两个变量：AB 的长度比所提供的标尺长或者短，以及儿童按照和主试一致或者相反的起点开始移动。

（5）使用三条线段 A_1D_1、A_2C_2 和 A_3D_3。起点 A_1、A_2 和 A_3 是错开的，并且不在一条直线上（比如，以 A_1 为参照的话，A_2 比 A_3 错开的距离更大一点）。A_1D_1 和 A_3D_3 的长度相等，A_2C_2 要短一些。变量与4一样。

（6）A_1C_1 和 A_2D_2 不一样长也不平行。以上的所有变量都会涉及。

不管条件的设置是什么样的，儿童可以随意使用一个木制的尺子（没有刻度），一个木棍（没有刻度），纸条（不带线段和方格），各种长度的线和一支铅笔。

根据已经发现的发展阶段，儿童的反应将根据以上六种条件来组织。在阶段1和

2A,儿童能够立刻解决问题1(但是不能完成1b)。换句话说,只要起点A_1和A_2是并列的,他们能够毫无困难地看到A_1B_1和A_2B_2是一样长的。一旦起点不是并列的,存在一定的错位,儿童就不能完成任务。他们不能够将A_1B_1的距离迁移到A_2C_2上,只是简单地将B_2和B_1对着,而不考虑两条线段的间隔。正如我们以前的实验中发现的一样(*Mouvement et vitesse*,第三章),只有改变终点的位置,儿童才能考虑到位置变化的问题。之后,在次级阶段2B,儿童凭直觉解决问题2(例如,只是看着两条线段),因此不能准确地完成测量,除非儿童通过试误来完成。在2B阶段的初期,儿童不能完成这个问题,但是最后他们的测量开始变得具有实证的意味,尽管完全运算的理解还没有出现。最后,在阶段3所有三种关系都能被儿童理解。

第二节 阶段1和亚阶段2A:终点决定了线段的长度

这些早期阶段的所有反应的特点是,儿童不能意识到一段距离的长短是起点和终点之间的间隔,而只能考虑到终点的问题(参阅第四章)。

蜜儿(4;6) 问题2:"如果你想要和我的小火车跑的距离(A_1B_1)一样,你应该怎么做?你从这里(A_2)出发要走到哪里才行?——*这里*(正对着B_1)。——那个和这个(A_1B_1)一样远吗?——*是的*。——给我展示一下我走的路程和你走的路程。——(儿童展示A_1B_1和A_2B_2。)——这两个路程哪一个长一点?——*那一个*(A_1B_1)。——是的,非常正确。现在让你的路程跟我的一样长。——*我不知道怎么做*。——你看,这次我只走很短的一小段(从A_1到A_2正对的位置),你在你的上面做同样长度的路程,一样长的。——*但是它已经在那了*。——(现在开始从问题1问起)现在你看我要从这里走到这里(A_1B_1)。你需要走到哪里,如果你要走跟我一样长的路程?——(改变了几次B_1的位置,蜜儿都能正确地将他的小车移动到相应的位置。)——(主试接着进行问题1b)现在我们要换一下游戏。我将要做这个(A_1C_1),我要向上走,但是你要向下走(指C_2A_2),但是你要走的和我一样长。现在呢,我从A_1到B_1。你呢,你要怎么做?——*这么远*(马上将B_2放到B_1下面)。——看着,这次我要走非常短的一段路程(B_1距离A_1非常近)。你呢,你应该怎么走同样段的路程?——*这里*(再次将B_2放到B_1下面,这导致A_1B_1和C_2B_2长短的差距非常大)。——我们两个谁走了一个长的路程?——*它们是一样长度的路程*。——那如果我们从同样的地点出发呢?——(指出A_2B_2与A_1B_1相等。)——非常正确。现在你和我的路程一样长。但是看着我接下来要做什么(移动一点A_2C_2,但是保持B_2和B_1的位置不变,使A_2B_2仍旧与A_1B_1相等)。现在两段距离仍旧一样长吗?——*不*。——哪一个更长?——*那一个*(A_2B_2与A_1B_1的位置现在是交错的)。——为什

么？——*因为那一个长一点*。——你怎么知道它更长一点？——*因为你把它解开来了*。——但是它们刚才是一样的，它们并没有改变。为什么一个突然比另一个变长了？——*因为……我不知道*。"最后，主试从C_1出发，向左走了一点，也就是在C_2的左上方一点："看，我走了这么远(C_1B_1)。你要走到哪儿才能跟我走的一样长？——*这里*(将B_2放到B_1下面)。——用你的手给我展示下咱们两个走的路程。——(正确地指出C_1B_1和C_2B_2。)——那么哪一个更长呢？——*那一个*(C_2B_2。根据主试暗示的建议做出回答)。——那你能走一个跟我小火车路程一样的距离吗？——*不能*。——为什么呢？——*因为我要拔掉这个钉子*(那个固定住绳子)。——好吧，你可以做你想做的事情。——(他改变了钉子的位置，将A_2C_2放置到A_1C_1正下方，然后叫道)*现在，我的路程更长了！*(表明他没有真的相信，尽管他自己已经用行动测量了)——现在你能跟我走一样长了吗？——*是的*(将B_2放到B_1下面)，*现在一样长了！*"

米克(5;6)　问题2，将B_2放到B_1下面："这两个路程一样长吗？——*是的*。——为什么？——*因为它走了另一个也走到的位置*。——但是看(向他展示如何使用他的手指测量两段路程)谁走的路更长一点？——*你*。——那好，你现在也走一样长的路程。——(他将他的珠子从B_1正下面的位置上移开，又马上移回来，说)*难道它不是一样长吗，我走多了*。(他将珠子放回到B_1正下面的位置，说他做好了)"问题1，将B_2放到B_1下面："为什么？——*这个路程跟你的一样长*(正确答案)。——那这样呢？(移动其中的一条绳子，但是珠子的位置不动，也就是回到问题2。)这两个长度一样吗？(主试用他的手指比画它们的长度)——*不*(他将B_2放回到B_1下面)——这样的话，谁走的路程长一点？——*两个是一样长的，因为我们在同样的点！*"主试试图用小棍测量两段路程，但是儿童只是关注到达的位置点。

派(6;3)　问题2："如果我走一段距离(A_1B_1)，你应该怎么做，走同样长的路程？——*这里*(在B_1下面)，*这是一样长的路程*。——如果我们想知道它们是一样长的，我们要怎么做呢？——*因为我们思考*。——怎么思考？——*因为如果它们不一样长，你就会将它们倒回来，然后另一个就会和其他的那个一样长了*。(他将珠子移回A_2以及A_2正上面的位置，发现这个点与A_1不吻合！)——*绿色的车不能跟黄色的车走一样的路程，因为黄色车的线更长一点*。(它们是一样长的，只是错开了)但是看着这两条线(A_1C_1和A_2C_2)，它们不是一样长吗？——*是的，但是一个比另一个远*。——好的，现在我走了这么远(A_1B_1)，如果要跟我走得一样长，你要走到哪？——*这里*(B_2在B_1下面)。——这个(A_1B_1)和这个(A_2B_2)一样长吗？——*是的*。——你怎么知道？——*因为我知道*。——你用这些(尺子和棍子)，看它们能不能帮助你测量。——(他把尺子放在B_1和它正下面在A_2C_2上的点，发现他的珠子不是在B_1正下面)*不是太一样，我需要把它推回去一点*(将珠子调整到B_1正下面)。——用你的手指给我，展示下我们两个走的路程。——(他展示了)——你觉得这两个路程一样长吗？——*不，这两个不一样长，因为它们*(终点A_1和A_2)*被推到*

这里了。——那好,现在我这么做(A_1在A_2下面),你怎么走一样长的路程?——这里,它们是一样的(因为A_2位置的珠子已经在B_1下面)。——但是我向前移动了我的珠子,你一点都没有移动。——是的,因为这条线(A_2C_2)比那条线更远。——现在,仔细听我说,你告诉我这两条线是一样长的?——是的。——那我们可以这么做(问题1)?——是的。——现在,如果我走这一段路程,你需要怎么走呢?——这里(正确)。——很好。现在我要将这些绳子放回原来的位置(问题2)。这还是正确的吗(绳子移动了,但是珠子的位置没有改变)?——不对。黄色的(B_1)必须退回来到这里(B_2上面)。——那现在两段路程一样长了吗?——不是的,因为两条线不一样。——但是你刚才告诉我它们是一样长的?——是的。——如果我把线摆放成这个样子呢(A_2C_2是倾斜的,问题6)?现在我走这么长(A_1B_1),你该怎么走呢?”——(他看着它们,将他的珠子放到B_2,用眼睛看的话,距离大概和A_1B_1相等。)——好的。但是怎么能说这是对的呢?它们确实是一样长的吗?—是的(仔细地研究它们)。但是你的火车需要走到这儿(在B_2上面,尽管A_1C_1和A_2C_2存在一定的夹角)。——为什么?——因为这样的话,两个路程就一样长了。——但是你刚才告诉我这两个路程是一样长的(A_1B_1和A_2B_2原来的位置),现在你把我的火车推到了这里(在B_2上面),这还是一样长的吗?——是的。——你怎么知道这是正确的?——我们用一把尺子量黄色的车和蓝色的车(在B_1和B_2之间放了一个尺子)。——那这样呢(将B_1放到原来的位置),这样子还行吗?——是的,但是你需要这样子放它们(B_2现在在B_1的下面,这样A_2B_2只有A_1B_1的五分之一!)。——如果我们测量一下呢?——(他依旧将尺子横着通过B_1和B_2。)——但是这两个是一样长的吗(A_1B_1和A_2B_2)?—是的,但是从另一个方面。——你说“从另一个方面”是什么意思?——因为这条线是这样的,这条线是这样的(指两条线之间的角度)。如果蓝色的车走到了这里(到点B_2跟C_1并列),黄色的需要走到它的终点(C_1)。——那意味着它们走了一样长的路程吗?——是的。”

梅(6;10) 比前面几个被试通过的阶段更高一点,他接近阶段2B。问题2:“如果我从这里走到这里(A_1C_1,整条绳子的长度),你要怎么走,使我们的路程一样长呢?——从这里到这里(A_2C_2)。——如果我这么走呢(C_1A_1)?——像这样(C_2A_2)。——非常好。现在如果我只走一小段呢(A_1B_1)?——这里(将B_2放在B_1下面)。——那是一样的长度吗?——是的(展示B_2和B_1是并列的)。——如果我走到这里呢(B_1现在和A_2并列)?——(研究它们并且犹豫。)你把钉子拿出来把绳子移动到尾部了(重新排列了绳子)。——但是我走了一小段路程(从A_1到与A_2并列的位置),你需要走和我一样长的距离。——(移动他的珠子偏离了A_2一点。)——那是一样长的吗?——不是的。——哪一个更长呢?——(他在A_2B_2和A_1B_1之间摇摆,前者延伸超过了B_1,后者明显更长。)那一个(A_1B_1)。——那么我们怎么做使这个变得一样长呢?——我们必须移动钉子(使终点之间完全并列)。”

问题1被正确解决,1b:“现在,我们要改变游戏的玩法。我从这里出发(A_1)向上走,走这么远(B_1)。你要从这里(C_2)往下走。你要走到哪里能跟我走的一样

长？——这里(B_2在B_1下面)。——我们两个谁的路程长一点？——*是一样的*。——用你的手给我展示一下谁走的多。——我(正确)。——是的，如果你想要和我走得一样长，你要怎么做呢？——*你走到这*(C_1)*并且我走到这儿*(A_2)。——听着我们都要走。我走了这些(A_1B_1)，你呢？——(在B_1下面停下来。)——谁走得多？——我。——但是你需要和我走的一样长。(实验的要求被重复了好几遍，每次都得到一样的反应。)现在如果我们把它放在这儿(B_2与C_2的距离与B_1距离A_1的距离一样)，对吗？——(犹豫)*是的*(接受建议)。——我们能用这些(标有刻度的尺子)测量它们是否正确吗？——(他拿着尺子测量，刻度20与终点C_2重合：刻度13与B_2重合。它将刻度13放到B_1上，毫无疑问尺子的终点与A_1重合，他说：*是的，它们一样长*。"最后问题2被重新引入，梅立刻将B_2放在B_1下面："你的路程和我的一样长吗？——*不是的，但是我不能走更远了，因为这条线*(A_2C_2)*在那条线的前面*(A_1C_1)。"

幼儿园儿童的反应可以归结成三个因素，这些因素与前几章研究估计运动的因素类似。它们之间的关系需要更详细地被阐释。三个因素如下：

(1)最初儿童对路程长短是否一致的判断仅简单地依赖于终点。

(2)他们不认为长度是一个相互联系的嵌套的间隔(或者部分)组成的系统。

(3)他们不能将同一长度使用两次，仅仅将测量工具作为一种鉴别排列或者终点之间是否吻合的工具。

(1)判断路程是否相等的问题比其他问题更清晰地阐述了，间隔和顺序或者长度和位置改变之间的矛盾。第三章报告了，距离是有限的给定顺序之间的(空的)间隔。初期阶段，使用固态物体对空的间隔的干涉，将会改变它的守恒性；在后期阶段，距离能够守恒，因为它们由部分的间隔组成，更主要的是，由运算操纵的位置顺序的改变逐渐参考静态的参照物体，位置的改变包括移动的物体和他们视野内的空的位置(empty sites)。然后，第四章表明，长度是有限的给定顺序之间的(填满的)间隔。长度可能是一个物体的边界，然后对这些进行对比。初期阶段，当终点的位置改变的时候，长度是不能守恒的，也就是当终点的顺序改变的时候。当部分长度能够组合成长度的整体时，长度开始变得守恒，以及当顺序和位置的改变可以通过系统中固定的成分进行参考的时候，固定的成分可能随时是空的或者实际存在的。最后，第五章和目前的实验情景中涉及的一定长度路程的移动，是一个物体连续的位置之间的间隔(或者一整个路程中的一部分)。因为路程的长度是到达终点位置的顺序的函数，对于路程的守恒只有在终点与起点相联系，并且两者都与一个参照系统和固定的位置相联系时才能达到。另外，起点和终点之间间隔必须能够由不同的部分组成，通过它们位置的顺序来确定，并通过改变这些顺序来改变它们。移动的路程的组成必须同时考虑间隔的分段和移动物体的连续位置。它是一个涉及两种运算(经验的、直觉的)方方面面的综合体，第三章到第五章也有类似阐述。

早期阶段的反应表明，首先，对于顺序熟悉的占优势的直觉阻碍了对分段或者间隔的组织。其次，对于终点的关注，以至于对于长度的判断不考虑起点的作用，更别说考虑起点和终点之间的间隔了。让被试在A_2C_2上做和A_1B_1"一样长的路程"，他们会将所有的珠子移动到B_1下面，不顾A_2和A_1之间的交错，也不顾A_2B_2和A_1B_1之间能够明显看出来的差别。对这些被试来说，路程的长度不是起点和终点之间的间隔。他们依据终点的位置来做判断，也就是珠子走了多"远"。

这种反应模式(在早期运动研究中反复出现的模式)不包含任何形式的测量，因为测量需要考虑到整体的每一个部分，A_2B_2和A_1B_1，而不仅仅是终点之间B_2和B_1的重合或者不重合。另外，这会导致数量水平的矛盾的判断，因为A_2B_2部分会被认为和整体A_1B_1是相等的。在安排问题2的时候，A_1B_1由两部分组成，一部分是从A_1到A_2上面的那一点，另一部分是跟A_2B_2是相当的。但事实上被试并不这样判断距离，而是根据终点的位置，在第四章以及这一章他们都根据这种标准来判断。并不是他们完全忽略了间距，而是他们不能从序列的关系和位置的改变中区分出间距。判断的失败来自于不能将起点和终点等同于相同重要的位置，以及对于线段组成部分的不充分的认识。

(2)主试在A_1C_1上移动他的珠子从A_1到B_1。结果，A_1C_1就被分割成两个部分或者两个部分的区间，a_1($=A_1B_1$)以及a_1'($=B_1C_1$)，整个路程可以用它们的和来表征$a_1+a_1'=b_1$。要求儿童在A_2C_2上找到一段相等的部分路程a_2($=A_2B_2$)，b_2代表了一个总的区间；他必须忽略区间a_2'($=B_2C_2$)。为了找到a_2，他必须了解反向的运算$b_2-a_2'=a_2$。或者至少他不仅能够将位置的次序(或改变)系统化，而且能够了解线段的组成部分。这两种成分是不同的，因为分段或者部分意味着区间，而次序和位置的改变意味着点。同时，它们又可以互相协调。儿童初期阶段的反应表明，他们只具有有限的关于这两种成分的直觉认识，并且不能协调两者。因为他们不能区分这两者，没有了两种成分的协调，两者都不能称之为完全。

儿童的确会如此判断区间：他们会对距离和长度进行估计，而距离和长度构成了嵌套的系列部分。他们的判断不会局限在终点的位置，正如第三章以及这一章中的各种描述。当要求儿童使用他们的手估计间距的时候，对间距的估计就产生了。密儿(4;6)，在这些情况中，承认A_2B_2比A_1B_1长一些，当B_1在B_2的正上方，而A_1在A_2前面的时候，尽管他对自己的这个判断不是很确定，直到我们将A_1和A_2放置重合的时候，他会大叫道"我的路程更长一点！"，好像忘了它刚刚在不久之前已经说过了一样。同样，在派和梅的情况中，尽管A_1C_1和A_2C_2之间存在一定的交错，他们都同意两条线段总体上是相等的(尽管梅修改了他的判断)，他们可以把这些判断纳入考虑的范围。尽管如此，即便儿童能够在终点A_1和A_2、C_1和C_2完全并列的情况下，轻松地考虑到间距，甚至大略地也能考虑到分段，但是这些考虑并不能帮助他们在这些终点存在交错的情况下，形成更系统的直觉思维。在这种情况下，他们关于次序的直觉会产生冲突，分段依旧没有与之进行区分，更别说对它们进行协调。交错的两条线段A_1C_1和A_2C_2比之前讲的两部分的分段a_1+

$a_1'=b_1$；$a_2+a_2'=b_2$，要求更复杂的分段。为了使a_1和a_2相等（例如，$A_1B_1=A_2B_2$），两个其他的部分需要被考虑到。它们是，首先，A_1C_1是从A_1到A_2正上面的对应的那个点，这段可以被称作O_2，因为这部分是$a_2(A_2B_2)$的前部；第二部分是A_2C_2是C_2到C_1正下面的对应的那个点，这部分可以被称作O_1，因为它是$a_1'(B_1C_1)$的后半部分。然后A_1和C_2之间所有的分段部分变成了：$a_1+a_1'+O_1=O_2+a_2+a_2'$。这个水平的儿童不能将$a_2$等同于$a_1$，以及它们相对应的剩余部分$a_2'$和$a_1'$，因为他们不能意识到距离的相等或者空的间距$O_1$和$O_2$之间的相等。换句话说，他们不能在这种交错的线段中比较距离的差别。为了达到这种分段，他们需要了解到所有这些点之间的次序，包括起点和终点。并且，在这个次序和位置改变的系统中，他们需要考虑到空的位置和被占据的空间。相反，如果没有拥有完整的对间距的分段，他们就不能获得有关次序的清晰的直觉思维。这两种直觉思维因此都是不完整的，因为它们不能互相协调，不能互相协调的原因是，它们甚至还没有从彼此区分开来。

（3）对两个路程A_1B_1和A_2B_2（或者a_1和a_2）的测量，并非仅仅要求对分段和位置次序的协调。它需要两者的综合或者运算的合并，而这种综合或者运算的合并是通过组成部分位置的改变来进行的，它们是否相等是通过能否重合来证实的。因此这个阶段的儿童忽略了测量也不能进行运算也就一点也不奇怪了。一些儿童，比如米克仅仅将尺子作为衡量B_1和B_2是否并列的工具（这也让我们想到了在第二章第三节中的儿童测量塔的高度仅仅将塔顶相连一样）。另外一些儿童，像梅纵向地使用尺子来测量A_1B_1，但是只包含了终点而不包括起点。

第三节　亚阶段2B：中间阶段的反应

2B阶段的儿童在统合次序的关系和位置的改变以及分段中表现出更高级的反应。他们开始能够同时考虑起点和终点，不再将距离等同于终点。他们也开始理解部分组成整体。这些相对应的发展都预示了测量的萌芽，使儿童能够进一步在数量水平上发展出对长度的运算概念。

接下来的是2B阶段的儿童反应，前两个儿童是在阶段2A和阶段2B之间的中间反应阶段。

尤德（6;7）　问题2：“如果要走和A_1B_1一样的路程，你要走到哪里？——（将珠子移动到B_1下面的那个点，然后又走远了一点，然后用尺子斜着放在B_1和B_2上。）——你为什么要这么做？——*因为这里*（C_1）*比那里*（C_2）*远，并且那个*（A_2）*没有那个*（A_1）*远，所以我把我的火车放到这里*（B_2）*而不是那里*（B_1*下面*）。——（主试将珠子从C_1移动到一个新的位置B_1。问题2b，被试要从A_2开始移动。）——（尤德将他

的珠子移动到B_1附近，但是比他如果从C_2开始移动的话要稍微短一点，然后他把尺子倾斜着放在C_1和C_2之间并且逐渐地移动尺子到珠子，并且试图不改变尺子的倾斜度。）——你为什么要做这个？——*为了测量长度*。——给我展示一下你走的路程和我走的路程。——（指出来C_1B_1和C_2B_2）*这个*（A_2B_2）*是一个长的路程，这个*（C_2B_2）*是一个短的路程。你的车走了一小部分*（C_1B_1），*留了一大部分*（A_1B_1），*所以我的车也要走一小部分*（C_2B_2）。*那是因为就像这个*（A_2）*没有*（A_1）*远*，（C_2）*比*（C_1）*近*。——（主试重新从C_1开始）但是你需要从另一边（A_2）开始走。刚才你没有明白，对吗？——（将珠子移动到A_2附近。）*因为你走了这么些*（C_1B_1），*我必须走这么多*（A_2B_2，用手指测量）。——那是对的吗？——*是的*。——你能更好地测量它吗？——*不能*。——（主试用一个小棍来测量，用两个手指标记C_1和B_1，并用这个测量去比对A_2B_2，尤德在一旁看着主试这么做）这是对的吗？——*不是的*。（试着自己测量，但是只标记B_1，并将这个去比对B_2，忽略了起点！）”

曼（6;11）　问题1被很快解决了。问题2：将他的珠子先移动到B_1下面，接着又往前推了一点，用两只手指着A_1B_1和A_2B_2，说：“*它们是一样长的*。——你能不能做一些确切的事情来确定这两个是一样长的呢？——*我能用这个小棍子测量*。（他拿了一根比A_1B_1短的小棍放到A_1和B_1两点之间，使两端都余一段来，然后他忽略了起点，用他的手去补尺子一端到B_1的距离。然后将这个棍子去测量A_2B_2，也忽略了起点，用他的手去补尺子一端到B_2的距离。）——这是对的吗？——*不是的，我必须把小车放到这儿*（B_1下面），*而不是这儿*（将车子随便放前面一点）。——是吗？——（这次使用了一个较长的小棍来测量A_1B_1，仍旧忽略A_1。将小棍放到线的旁边，把他的手指放到B_1下面在小棍上标记，并将这个标记去比对B_2，同样忽略A_2，并且说）*这次它是对的！*”

麦德（6;10）　问题3（两条线段相等但互相交错，且两条线段比较长，尺子太短不能完全测量路程）：“如果我的小车从这里走到那里（A_1B_1），你现在从这出发（A_2）要走到哪儿才能跟我走的路程一样长呢？——（检查A_1、C_1、A_2、C_2四个点，然后将他的小车放到B_1下面并向前移动了一小点。）——你为什么把它放到那里呢？——*我看见那个是长一点的*（A_1C_1和A_2C_2错开了一点），*所以我把我的向前移动了一点，因为我的路程到这里的话*（B_1下面）*是短的*（比A_1B_1）。——它们现在是一样长的吗？——（用手测量，刚开始垂直着放着量A_1C_1然后倾斜着去量A_1A_2和B_1B_2。）——*看起来好像是我的车走得更远一些，但是其实它们是一样长的，因为这个*（A_1）*从这里开始*（远的地发），*而那个*（A_2）*只是从这里开始*。——你能更准确地测量吗？——（用尺子测量B_2C_2，对两个端点进行标记，并将尺子放到A_1C_1上和这些点垂直对应的位置，因此一个端点的标记落在了B_1和C_1之间，而另外一个端点落在了C_1外面。他接着沿着尺子的边缘移动主试的珠子，又将它放回来）*这个*（端点C_2在尺子上的标记）*落在了这个*（C_1）*外面，那是因为这个*（C_2）*比这个*（C_1）*远一点，并且这个*（B_2）*也比*

这个(B_1)远一点。——是吗?——(用他的尺子测量垂直于A_2C_2并通过B_2,比较距离)看起来好像这个车(B_1)是在那个车(B_2)的后面,但是那是因为这里(从B_1到B_2)和那里(从C_1到C_2)是一样的。(为了证明他说的是正确的,试着用尺子测量B_2C_2,他将尺子放在B_2C_2上面,但是还是不能将他的测量应用于A_1C_1,而是垂直地移动尺子。)"

"这次我要从这里(C_1)开始走,你呢要从这里(A_2)开始走。现在我走了这么长(C_1B_1)。你要走到哪儿才能跟我的一样长呢?"——(用适当的精确性估计B_2的位置并用尺子来测量剩余的部分B_2C_2和B_1A_1。接着他试着直接测量C_1B_1和A_2B_2,但是发现尺子太短了,对剩余的部分做了个粗略的估计。)这个尺子,这里还有这么长(指出来差距)。"

问题2b(从C_1和A_2开始走) 估计B_2的位置了来移动珠子,然后用棍子测量B_1C_1,并准备测量A_2B_2,但是表现出犹豫。测量了B_1C_1,但是不知道接下来怎么在A_2C_2上测量:"你是怎么想的?——是将我的向前走还是向后退?——你应该从哪里开始测量?——你从那里开始,而我从这里开始走,因此我需要测这里(C_1B_1)和这里(A_2B_2。他成功地测量了)。——你能从这里(A_1)和这里(C_2)开始测量吗?——是的,你也可以那么看。——那这个呢?(A_3C_3组成一个更短的线,问题5)——是的。(测量B_2C_2来估计A_3B_3的距离,忽略了一个事实,那就是当两条线段A_1C_1和A_2C_2是一样长的时候,这么做是对的,但是当两条线段A_1C_1和A_3C_3是不一样长的时候,这么做是不对的)"

吉雅(7;2) 问题2:将B_2放在B_1下面,然后根据眼力移动它到看起来差不多是正确的位置,然后他用尺子测量A_2B_2和A_1B_1,并相应调整B_2。

问题3:"现在我走了这么长(A_1B_1),你要怎么走呢?——(估计了B_2的位置。)——你能确定吗?——(他将尺子的一端对齐A_1,用他的手指为另一端做标记,接着他重新测量了B_1发现尺子标记的长度能够跟A_1B_1吻合。但是当测量A_2B_2的时候,他只是将尺子的一端对齐A_2,而没有标记另一端,然后又将它放到B_2上,忽略了起点。事实上,他的第二次测量存在两个疑问,A_2X和YB_2。)——这是正确的吗?——是的,我已经测量那个了。——那如果我走回到这里(A_1)呢?你要走到哪里才能跟我走的距离一样?——(他测量了从A_1到B_2正上面对应的一个点的这部分和A_2B_2。)不是,这不对,这里太短了(忘记了两条线是错开的)。——现在,看着,我们要重新从这里和这里(A_1和A_2)出发,我走到这里(B_1),你要走到哪里呢?——(将他的珠子移动到B_2,然后正确地测量了A_1B_1和A_2B_2)这是对的。——很好,现在我们将要从这里和这里(A_1和C_2)出发。——(将他的珠子移动到B_2然后仍旧测量了A_1B_1和A_2B_2。)——但是你还记得我们从哪里出发的吗?——是的,这里和这里(A_1和C_2)。——他们(C_2B_2和A_2B_2)是一样的距离吗?——(犹豫,没有回答。)——那好,现在我们重新从这里开始走(A_1和A_2)。——(正确测量。)——那这样呢?(从

A_1和C_2)? ——(测量A_1B_1=20cm+4cm,然后转过来用尺子在C_2B_2上测量出来20cm+4cm。)"

米埃(7;4) 问题3:将B_2放到B_1下面,然后小心翼翼地向前移动:"我们怎么确切地知道哪个是准确的呢? ——*我可以使用这个尺子。*(他将尺子放在A_1C_1上,将A_1作为起点但是忽略了另一个端点;接下来他将尺子随便放在了另外一个点上,发现B_1与刻度6重合。他使用同样的测量方式来测量A_2C_2,并且使B_2能够跟刻度6重合!)"问题2(走的路程比尺子短):B_2定位的非常准确,正确地测量A_2B_2和A_1B_1,并以此来调整B_2。主试重新引入问题3(走的路程超过了尺子的长度):米埃开始的时候将B_2放到B_1下面,然后判断它差不多是正确的。像前面一样,他没有意识到第一次测量时尺子终点到达的位置的问题。"你怎么知道尺子要放到这里? ——*我一看就知道了。*——有没有更好的方式来测量呢? ——*有的,我可以把我的手放在线上,这样来提示我下次我把尺子放在什么地方。*(他修正了自己的错误,正确地调整了B_2的位置。)"问题2b:正确地测量A_1B_1=C_2B_2。问题3,再一次走了比尺子长度更长的距离:他将B_2放到他认为是正确的地方,然后测量A_1B_1(是尺子长度的两倍)和A_2B_2。"我们只测量一小段(B_1C_1)而不测量这段长的,能够得出一样的结果吗? ——*是的,因为这个和这个(A_1B_1和A_2B_2)是一样长的,所以它们也是一样的。*——那这两条线呢(A_1C_1和A_2C_2)? ——*是的,它们也是一样的。*"但是接下来走不同路程长度的时候,他仍旧测量A_1B_1。

这些处于中间阶段的儿童反应是很有意义的。尤德和曼没有其他儿童发展的水平高,他们甚至在直觉水平也没有达到转换(transitivity)。但是他们的反应相较于阶段2A,已经表现出了很大的进步。(1)他们能够考虑到起点,而不仅仅将注意力局限在终点。这意味着他们意识到了间距涉及了位置的改变,某种程度上它代表了次序的改变。(2)这种意识带来了他们进步所表现出的第二个特征,那就是可以开始对线段分段,能将线段的部分与整体相联系。例如尤德将C_1B_1和A_1B_1、C_2B_2和A_2B_2分别进行比较,然后将这四条线段进行分组比较。换句话说,他在两条路程以及剩余的路程之间建立了关系("你剩余了更长的路程")。起初,A_1B_1和A_2B_2的等价是通过定性的程序建立的。尺子是用来测量B_1和B_2之间A_1A_2和C_1C_2倾斜度的。因此A_1B_1和A_2B_2相等是因为是一个平行四边形的对边。测量在此时实际上还是不存在的。这种一一对应的方式正是关系逻辑上增值的萌芽(以及量化直觉的扩展的发端)。但是,(3)对于起点和终点这种位置的改变的认识,以及通过一些对于嵌套的直觉性领悟而进行的分段,都使他们能够在主试展示之后进行测量(尤德)或者甚至能够自发地进行测量(曼)。但是这两个被试都表现出,测量还是局限在只关注终点而不能考虑起点的不成熟阶段。这种特定的反应模式会在整个2B阶段持续下去。因此,对于位置改变和分段的综合运算比它们各自的协调更复杂。而作为这种综合的一个发端的测量,也还没有完全表现出来。尽管在一些只

需要单独考虑位置改变和分段，甚至是需要对两者进行质性交互处理的情况下，早期的反应模式依旧存在，但它们已经取得了重大的发展。发展程度好一点的被试，比如麦德、吉雅和米埃，通过试误可以进行正确的测量。但是尤德和曼不能对测量物体的位置改变和分段进行综合，麦德、吉雅和米埃展示这种综合是如何逐渐实现的。如此，他们的反应表现了这种发展所经历的过程，他们的成功反应可能正是因为对尤德和曼失败的地方中获得的学习。

麦德、吉雅和米埃的反应表明，他们完全能够在质性的水平上进行推理。在评估位置改变的时候，他们能够同时考虑起点和终点，同时，他们也清楚地认识到一整段路程可以是两个相邻部分的总和。但是这种认识是直觉性的，缺乏到达运算水平的精确性和概括性。因此，当要求他们去测量的时候，比如麦德，只注意到分段而忽略了位置的改变，而其他人比如吉雅和米埃则正好相反。只有在最后的询问阶段，所有的被试都做出了标准的测量，将两个机制综合起来。麦德对分段的关注令人印象深刻，就像尤德之前的表现一样。他将B_2放到B_1前面，用他的手来确定B_1B_2，A_1A_2和C_1C_2都是平行的。这种推理方式满足了位置改变和分段两者的共同要求。但是这种推理还处于质性水平，并且对于线段部分的理解也是在直觉水平。测量的时候，他只考虑到了分段而忽略了位置的改变。因此他测量B_2C_2而不是被他的手覆盖的部分A_2B_2，这表明，他能够意识到AB和BC都是嵌套在AC中的一部分。但是他并没有将他的尺子从B_1C_1水平移到B_2C_2，而将它看作是A_1C_1的一部分在B_2C_2上垂直移动。这种测量方式并不能实质性地解决存在的问题。尽管最后他也意识到了自己的困境，但却没办法让自己解脱，其实只需要将尺子沿着A_1C_1横着就行。相反的，他在分段这方面做进一步的考虑，却始终不能将其与位置的改变进行综合。只有在主试重新引入了比较简单的问题2时，麦德才获得了两者之间的综合，了解到了测量的内涵，尽管这种综合和了解仅局限在当前这个特定的问题之上。但是这种成就是比深入的试误要进步的。吉雅和米埃表现出了相反的困境。他们可以水平地移动他们的尺子与端点进行重合，这对问题的本质很关键，但是他们对相连的间距的求和是错误的，因为他们的分段缺乏一致性。他们忘记了标记每一次尺子测量的终点，结果接下来测量的部分很可能被重复测量了。因为在线段的不同部分之间没有明确的分界，每次变化测量的位置就变得很粗略，因此吉雅和米埃只考虑终点而没有考虑起点。当米埃意识到了需要清楚标记不同部分的界限的时候，他成功地综合了分段和位置的改变，也掌握了测量的关键(解决了问题3)。

因此，测量对我们来说看似很简单，但是测量艺术的起源是源于一个高度复杂的运算成分。儿童只有在能够同时将一个线段分成一些嵌套的部分并且能够在心理上或者实际上通过改变位置来对这些部分进行比较的时候，他们才能够理解测量。在这些运算融合之前，分段只能在质性水平上处理，因为还没有形成位置的改变的概念，这些因此也是质性的，因为它们没有被准确地应用到线段的不同部分上去。随着运算的综合(或者正如这个阶段表现的随着直觉的综合)任何两个长度可以用组成的单位或者不同

的部分来互相表征彼此。长度因此可以用一系列相等的能够相互表征的间距来表示，空间(space)则成了一个同质的量子(quantum)。中间阶段2B的反应正是这种状态出现的先兆，要到阶段3儿童才能完全达到这种状态，在阶段3运算思维能够对在这个阶段还是直觉性的概念进行平衡。

第四节　阶段3:运算的测量

在阶段2(阶段2B)的被试只有在经历了一些试误之后才能发现如何进行测量。他们也不能进行概括(例如，从问题2到问题3)。测量的功能还是处于次要的位置，主要体现在证实那些基于直觉水平形成的判断、视觉估计或者用手测量等。因此测量的成分在整个阶段2还是处于经验水平。在阶段3，测量变得系统性和运算性。后者的发展表现出两个阶段。阶段3A的被试在普通的测量中仅获得了质性的转变。当测量工具跟路程一样长或者比路程长的时候，他们可以成功地测量，但是当测量工具比路程短的时候，他们只是简单地用其他的工具来延长测量工具。在阶段3B，他们获得一个新的概念"一个单位"，能够将一个尺子进行迭代使用。

瑞(7;10)　代表了阶段3A。问题3:他一步步地将B_2移动超过B_1，说:"*我想它是对的。*"因为尺子太短了，他同时使用尺子和他的手来测量A_2B_2，当测量A_1B_1的时候，他用一个纸条来延长他的尺子，在检查A_2B_2长度的时候使用了同样的方式，就这样他成功地测量了所走的路程:"我们要走一个更长一点的路程(B_1距离C_1很近)。"被试想了一会儿，开始测量B_1C_1。但是他又重新思考了一下问题，然后开始用所有提供的工具(尺子、纸条和铅笔)一一排列起来用来测量A_1B_1。突然他放弃了这种复杂的方法，只是简单地用铅笔来测量剩余的部分B_1C_1和B_2C_2:"你为什么要这么做？——*因为这些不能测全路程(到C_1)。这里还剩一小段(B_1C_1)，铅笔就可以测量这段。*"

问题4，两条线不一样长，$A_1C_1 > A_2C_2$，并且让儿童自己发现这一事实:A_1B_1长度超过了A_2C_2的长度，因此根本不可能走跟A_1B_1一样长的距离。"你在那条线上(A_2C_2)走跟我一样长的距离。"——(瑞估计了一下B_2的位置，然后测量了A_1B_1，并且比较了剩余的线段B_1C_1和B_2C_2。他接着测量B_1C_1和B_2C_2，并据此来找B_2，之后他将纸条和铅笔等排起来测量A_1B_1和A_2B_2)*这段路(A_1B_1)比那段(A_2B_2)长。*——你能把它们走一样长吗？——*不能，那个(A_1B_1)比这条线(A_2C_2)长，这条线(A_1C_1)更长，所以我不能走一样长的路程。*——很好。现在我们将绳子变成他们原来的样子(问题3，两条绳子一样长)。——(他用一个纸条来延长的铅笔从而测量B_1C_1)——(主试增加了一条小的线段(问题5)并沿着A_1C_1移动他的小车)你在另外两条线上走出相等长度的路程。——(他测量了B_1C_1，然后将这个长度应用到B_2C_2上来，找到B_2，然后

测量了A_1B_1，将这个长度应用到上A_3B_3）——你为什么第一次这样子测量（测量剩余的部分B_1C_1和B_2C_2），而第二次这样子（真正的路程A_1B_1和A_3B_3）测量呢？——*因为这条线*（A_1C_1）*比那条*（A_3B_3）*长，这两条*（A_1C_1和A_2C_2）*是一样长的，但是那一个*（A_2C_2）*看起来更长，因为它的一端*（C_2）*都到了那边了，但是这端*（A_2）*比较短*。——那如果我从这里（C_1）出发，而你从哪里（C_2）出发呢？——（反应正确。）”

沃德（7;11） 是阶段3B的典型例子。问题2：沃德用棍子测量了A_1B_1，并将测量的长度与A_2B_2进行比较。“很好，现在如果我走这么长呢（问题3）？——*这个有一点难，但是我们有这个*（一个纸条）。（他用纸条来延长棍子，然后测量A_1B_1和A_2B_2。这是阶段3A的反应。）”——你能更简单地测量它们吗？——*可以，像这样*（只使用棍子，并用了两次，最后剩余的一部分他用手指测量了）。——如果我走这么远呢（非常接近C_1）？——*嗯，我再简单地测量*（测量剩余的部分）。——那如果我从这里（C_1）出发，而你从那里（A_2）出发呢？——（通过反复使用几次棍子，正确测量。）——你能这样测量吗（A_1B_1和C_2B_2）？——*可以，那也是对的*。——那这样呢（问题5）？——*你必须测量这个*（A_3B_3），*因为这条线更短*。”

彼得（8;7） 问题3：“*如果你走到了那*（A_1B_1），*我必须走到这*（A_2B_2。他先用手测量了距离，又用尺子来测量，使用了几次）。——如果我把（B_1）放的距离（C_1）很近呢？——（直接测量剩余的部分。）——为什么你只测量那一下部分？——*因为两条线是一样长的*。——那现在我从这里（A_1）出发，而你从那里（C_2）出发呢？——（测量了A_1B_1，发现它是17cm）*我不能从这里*（C_2）*从1开始，我必须从20开始。哦，不对，我必须将它反转*（将尺子反转）。*我从1开始然后到17结束*。”问题5：“（用尺子测量A_1B_1和A_3B_3的连续的部分。）——如果你测量这些呢（剩余的C_3B_3和C_1B_1）？——*不行，它们不是一样长的。这条线更短，所以你不能从终点开始测量*。”

处于水平3B的儿童的表现与前几个发展阶段的儿童有着显著的差别。他们更少地使用直觉的感知而更多地使用推理。后者的发展经历了从质性的对比到测量的运算的过程。当儿童到达这个最终的发展阶段时，前期反应中的问题也同时被修正了。因此最高级阶段的发展源自先前阶段并且还会反过来影响之前的反应。

在阶段2，被试通过眼睛的大致估量来移动他们的珠子，除非被特别要求要去测量，他们认为没有必要这么做（除了用手测量之外，参阅第二章）。测量，对于他们来说，只是一个核查。在阶段3，儿童只有在问题特别简单的时候才会用眼睛估量距离，有时会将它作为一个预期的反应。决定B_2位置的必要的手段现在是测量。在阶段3，儿童在测量A_2B_2之前，总会测量A_1B_1，这是他们需要复制的长度，但是在阶段2B，他们经常测量他们自己估计的A_2B_2，并将这个距离和A_1B_1作比较，来看它们之间的吻合程度。

此外，在阶段3，当被试面临一个新的问题的时候，他们能够立刻使用刚刚掌握的运算成分，但是在阶段2，每一个新的问题都需要无数的尝试才能有一个新的开始。

为了理清儿童对分段的认识程度，有关所走的路程A_1B_1（$=a_1$）和剩余的部分B_1C_1（=

a_1')之间关系的问题会被提问：被试能够使用嵌套的关系吗，$a_1+a_1'=b_1$？在阶段2B，那些通过测量B_1C_1来确定B_1位置的被试，这么做是因为发现从更近的C_1开始更容易。他们并没有将这种解决方式看作是对A_1B_1的间接测量。但是，在阶段3，儿童始终能够意识到：$a_1=b_1-a_1'$。处理方式的不同体现在他们对问题4和5的反应中，在这些问题中包括不一样长的两条线段。瑞的反应，尤其是彼得的与阶段2B的儿童(比如麦德在最后的问题中的回答)形成了鲜明的对比。

阶段3的儿童对位置改变的处理跟阶段2B的儿童的反应是不同的。比起先前的发展阶段，2B阶段已经能够同时考虑起点和终点的位置。因此，看到A_2在A_1外面，他们会把B_2移动到B_1外面。但是，他们只有在将小车放到B_1下面之后，看到两者之间的差距的时候，才会接着这么移动。这种靠观察的试误的行为在水平3已经没有了(除了瑞表现得有一点犹豫之外)，在水平3，起点和终点能够被同时协调。换句话说，被试能够克服主试和他自己的两条线段之间存在的交错，并立刻移动他的小车到相应的位置。

水平3出现的度量依赖于两部分成分的平衡：分段和位置的改变或次序。第一个阶段(阶段3A)，当测量的工具比要测量的距离长或者相等的时候，能够成功地掌握位置的改变。当测量的工具不够长的时候，许多的测量工具会被连接起来，以达到测量所需的长度，然后这个被接起来的总的长度会被用来测量需要测的长度。因此协调仍旧是质性的，这种协调加上一致关系的转换(transitivity in relations of congruence)足够得出：$A_1B_1=M$(或者M的一部分)，M(或者M的一部分)$=A_2B_2$，因此$A_1B_1=A_2B_2$。这种质性的部分不仅需要测量工具，而且需要在某种程度上将被测量的东西进行拆分，并且被试需要同时考虑每一部分距离的起点和终点。第二个阶段(阶段3B)的特征表现在，当一个测量工具不够长的时候，能够反复地使用这个测量工具。这种迭代(M，2M，3M等)组成了真正的度量运算。无论如何，阶段3的所有行为表现都比阶段2的行为有了明显的进步，这个阶段不会出现重复测量线段的某些部分，位置的改变可以用一个或者多个测量工具来表现，并且测量依赖于精确的参照点。这两部分的运算——对一个整体进行分段以及不同部分之间的应用，发生得是如此自然，要不是它们在发展的初期阶段没有出现，我们可能就不会注意到它们的存在。因为对于我们来说，对这两部分的运算已经成为习惯。我们需要注意的是阶段2B的麦德，他能够很好地分段，但是在将线段的一部分应用到另一部分的时候不能处理位置的变化，以及同样在阶段2B的吉雅和米埃，他们能有效地处理位置的改变，但是在不断改变测量工具位置的时候，不能精确地确定所测量的终点。这些行为表明，在水平3中看似简单的行为代表了最复杂的在分段和位置改变之间的协调(阶段3A)或综合(阶段3B)，通过这些它们达到平衡。

当没有给出一段长度的能够被感知到的各个部分时，分段不是自然发生的。在思想上改变位置顺序的关系同样也不是自然发生的，这些位置顺序支配着一系列可以被知觉到的嵌套的线段，以便这些线段之间可以互相借用，在目前的实验设置中，AC被珠子分成了两部分AB和BC。即使是这样，在阶段1和2A被试会忽略AC这个整体，也不

能把AB当做整体的一部分。但是如果将AC分成许多抽象的部分的时候，情况就不一样了，比如将一个尺子或者一个纸条分成很多连续的部分。起初这些部分和它们的总体AC是不可分割的，但是测量则是要改变它们的位置，通过一个等价的共同形式把它们用在其他的位置上。也就是说，被试必须不要将它们看作具体的A_1C_1，而是看作对A_1C_1、A_2C_2以及其他测量的共同抽象部分。这种概括需要提取各部分之间实质性的关联，这样它才能通用于所有的客体并且以后也有用。

这样测量逐渐剥去了质性特点的一部分，同样也摆脱了具体位置的改变，最终这部分可以被认为通用于所有的整体，因为位置改变本身已经被概括化了。这种“双重概括”分别在两个阶段起作用：阶段3A和3B。阶段3A对分段和位置的改变进行质性协调，阶段3B对分段和位置改变进行综合或整合运算，这就产生了一种新的运算，那就是欧几里得度量，它综合了分段和位置改变。

第五节　结论：分段和位置改变的协调与运算合并，协调以及合并通过单位迭代表现

对两种运算水平之间准确关系的探讨，有助于给本章以及这些工作的第二部分下合适的结论。无论如何，正如第二到第四章所做的，对阶段2B、3A和3B发展的关键行为表现顺序进行总结可能会有点复杂，但是进行这种总结是有必要的。

第二章讨论的对自发测量行为的研究，为后面第三章到第六章详细分析提供了框架。这几章的设计目的是，为了揭示长度和距离守恒中所涉及的加工过程，同时在更结构化的实验情景中详细地分析测量行为。不过第2章提出的模型足够解释后面几章所做的详细探查。在阶段2A，自发的测量局限在“手动的转换”，此时，客体之间的比较是通过使用手来完成的。在阶段2B，开始出现了普通测量的萌芽，被试自己的身体被用来作为被测量客体的中间形式。这种行为被叫作“身体转换”，这也表现出了直觉转换的开始。在接下来的中间反应阶段这种转换表现得更明显，当第三个客体，与被比较的两个客体尺寸类似，就可能被用作中间转换。在阶段3A，进行中间转换的客体可能比要比较的客体大，转换就变成了运算，这种运算是通过对“相等”（一致）的质性关系的准确把握进行的。这些都依赖于对分段和位置改变的协调。

上面所陈述的为第三、四章研究提供的发展顺序框架，有两点与之相关。首先，距离（空的间距）的守恒和加入新成分的影响，第二，长度（被填满的间距，filled intervals）和移动测试物体的影响。在两种调查中，阶段1和阶段2A不存在守恒，在阶段2B依稀能有一些守恒，在阶段3A守恒以运算的形式出现。这个阶段的实现依赖于在质性水平上对分段和位置改变的运算，这反过来也表明它们从移动客体的线性维度扩展到了固定的地点。但是这种协调没有达到测量的真正水平，因为这两种运算系统还是在质性水

平上进行区分,它们只有在互相补充的情况下才能进行协调。对次序(和位置改变)的运算支配了被用于测量客体及其端点的次序间的不对等的关系。间距支配了这些按次序排列的点之间对等的间隔。对测量单位的迭代在距离和长度的守恒中是不需要的,因为这相互补充的两种系统就足够了。

在第五章,长度守恒中质性的构建不止一次地出现,当直线被分成不同角度的线段,又一次,守恒在阶段3A出现,这里也是,对分段和位置改变的执行的协调没有涉及度量的整合。在第五章的第二部分测量被不止一次地引入,但是在第二章,使用相同的设置,测量是自发产生的,在第五章给被试提供准备好的卡片(是1单位、2单位或者3单位长度),主试甚至向被试一步步地展示如何测量路程。另外,前两步或者三步的展示中,主试将卡片作为度量的单位来使用。在第二章,相较于儿童自发的反应,这些工具给儿童带来了轻微的进步,在阶段2B的被试开始看到共同测量(common measure)(质性的转变)可能存在的作用,但是不能理解单位迭代。尽管他们能数出来主试演示时的“步”,但并不能注意到这些单位尺寸之间的差异。度量迭代直到阶段3才被掌握,比质量守恒平均晚了一年。尽管一开始的结果有些混乱,但是实验还是清晰地展示了,质性的简单的对分段和位置改变的协调运算和综合运算的差别,后者是真正的度量。

第六章中使用的技术方法,是对第二章非结构化的任务以及第五章中的模仿和建议方法的折中。第二章所展示的发展阶段得到了进一步的确证,对分段和位置改变的逐渐协调发生在整个阶段2B期间,但它始终是经验的,进步是通过试误实现的。由于实验条件的缘故,相较于自发测量的方法,这种方式可能会低估儿童到达某一水平的年龄。在阶段3A质性水平的运算协调出现了,被试能够使用比测量物体长或者一样长的工具来测量,当测量工具不够长的时候,也能将多种测量工具连接起来使用。在阶段3B表现出了使用测量单位迭代的综合运算。

单位测量的距离和长度的质性协调与综合度量存在什么样的差异呢?对次序和位置改变的运算决定了一条线上各个点之间不对等的关系,就是这些点的次序以及这些次序的改变。对分段的运算决定了嵌套的部分,就是带有次序的点之间间隔的对等关系。后者可能是一系列有序的物体,或者一个物体的有序边界。两个系统是互相补充但是存在差异的,都被用于虚空的位置、固定的参照部分以及运动的物体中。分段支配了距离和长度中的嵌套关系(部分–整体),而位置的改变支配了距离和长度中涉及的点以及这些点位置的改变。

只要这两种运算还处于单纯的互补阶段,以质性的运算群组与彼此区分,长度的各个部分则还会被看作是在整体的背景中不能被分解的固定部分,又或者当其位置改变的时候被看作是与整体背景完全脱离的部分。但是的确还存在着整体守恒的观念,因为发现有对各个部分长度内部进行加减。另外,如果知道长度A等于B,并且如果知道了$B=C$(质性的转换),那么A也等于C。但是如果几个部分组成一个整体,那么这几个部分之间就不会被用来做相互比较。因此整体的一部分就不能成为一个“单位”(unit),

是因为分段还不能对一个给定长度的连续部分之间的关系转换进行概化，同时也因为位置的改变也还不能对于各部分之间的比较进行概化。

度量单位的构建因此涉及两部分的概化。对于距离和长度的真正测量开始于被试认识到任何长度都能被分解成一系列的等距间距，因为它们可以被用作去度量彼此。概化的分段由此产生从而被用于测量，因为它使被试认识到一个单位就是一个整体的组成部分。例如，作为一个基本的普通组成部分，而无论这个整体是由多少个单位组成的。但是概化的分段只有在对位置的改变概化之后才能达到，因为前者暗示了单位在假设上可以去度量一个不定数量的整体。因此意识到将基本的单位用于度量一系列持续的位置变更，涉及分段和位置变更的整合运算。通过单位迭代实现的这个泛化是对这两种运算融合成为一个统一运算的结果。在阶段3B的被试可以连续几次使用测量的工具，实际上是对测量工具的长度进行两倍或者三倍地处理，第二次使用测量工具的时候，这个长度与上一个唯一的差别就在于位置的不同。对分段进行加法运算和对位置变更进行加法运算，这两种运算整合了，因为不同的部分之间并非完全一致的时候能被认为是等价的。它们各自之间存在的差异源自位置不同，但是这些持续的部分都被认为是一个单位。

算数的单位类似于对类别和对称关系的综合，比如，数字。但是与数字不同的是，长度不是运算思维的开始阶段，而是其完成阶段。这是因为一个度量的单位，是对一个连续整体的任意分解。因此，尽管对于测量的运算很大程度上与儿童数字构建的过程相平行，但是前者的精细化过程要远远地慢于后者，并且单位的迭代作为测量运算构建的支撑，在阶段3A的时候还仍旧是质性水平的。

杨晓辉译，朱莉琪审校

第三篇
直角坐标、角度和曲线

之前研究了在单维度时儿童测量和运算的发展，现在我们将考察包含二维和三维因素时，儿童测量运算的发展。将考察一组关于面积和体积的相关问题，因此在第四部分，被试被要求分割面积和体积，或增加面积或体积；当客体在不同形式上转换时，儿童在何种程度上可以在测量中考虑到守恒。但是这个研究前期需要经过对儿童初步的询问，通过初步的询问，将发现儿童通过测量直线形成平面边界和立方体的形状，而不是测量面积或立方体本身。

同时，我们将考虑儿童如何发现不同曲线的度量特性，这也将涉及二维和三维因素。第三部分致力于研究儿童对测量角度与曲线关系的认识。

第七章作为导言并揭示当让儿童在二维、三维空间中定位时的反应。当儿童可以使用直角坐标并与测量配合使用时，这部分的发展就完成了。第八章揭示了儿童进行一般角度测量的特性，并理解在三角形内部角度之和是一个常数。第九章关注曲线的度量特性并发现一些简单几何轨迹。最后，第十章，我们将考察初等“机械曲线(mechanical curves)”中的三种的表征。这些考查将我们的研究归结为在角和曲线领域“欧几里得概念”的起始(尽管欧几里得不承认机械曲线属于几何学)。

第七章　在三维空间内定位一个点[1]

观察了儿童通过测量起点和终点之间的距离，在直线上对点进行定位后，我们将进一步考察儿童被要求在二维、三维空间中定位时他们将如何反应。我们将得到两个重要结论：(1)儿童在二维或三维空间中使用直角坐标系的早晚；(2)如果儿童没有发展出坐标系统，那么他在二维或三维空间无法定位一个点。在我们对欧几里得空间建构的研究中，直角坐标系是至关重要的（见十三章和十四章），并再次与位置改变（第一章）、距离与长度的关系（第三章）和测量本身（第二章）这些问题相关联。在这里，直角坐标系的问题在测量术语中再次出现。

第一节　方法和结果概要

最简单的方法是让儿童测量某点到两条或三条直线交叉代表的二维、三维空间的距离，某点的位置是随机的。儿童被要求在两条或三条直线间测量（非一条直线）。然而，这个问题可以被视为对第六章问题的直接延续，很难看到新意。如果一个儿童可以从一条直线上的给定长度转换到另一条直线上，他就可以将两条线上的转换转移到更多直线上。另一方面，如果儿童不能在一组直线的情况下完成测量，那么继续让其完成更多条直线的任务是浪费时间。因此我们将看到儿童使用了一种技术，他必须建立起多条线来定位需要的点。换句话说，儿童必须选择点的坐标并测量坐标。这个困难如果与坐标系的测量建立联系就可以更清楚地被解释了。我们通过将平面或空间的边界作为轴线，让儿童定位其内部的点，降低问题的难度，特别是使用水平和垂直的轴线，如在第十三章学习的一样。

在二维、三维空间定位一个点，儿童被给予两张相同的平面白纸，第一张纸(S_1)放置在右手桌角上方，第二张纸(S_2)放置在左侧底部。S_1上有一个红色点(P_1)，在S_1纸的中心和桌角距离一半的位置处。主试让儿童在S_2上画出另外一个点(P_2)，要求P_2在S_2上的位置与P_1在S_1上的位置完全相同。如果位置相同，那么将S_1、S_2重叠放置，两个点也将重合。纸是半透明的，主试通过将纸张重叠来确定两个点的重合程度。与之前研

① 与Schaffrin-Kersten, Mme. Renate合作完成写作。

究相同，主试给儿童两个刻度尺、两个木棍、两个纸条和两根线绳，让儿童去定位P_2。接下来我们使用A_1、B_1、C_1和D_1分别代表S_1的四个角，左下方（A）、右下方（B）、右上方（C）和左上方（D），A_2、B_2、C_2和D_2分别对应S_2相同的位置。

在第六章中，小珠子是可以移动的，而且它的位置是通过测量它与初始位置的移动获得的。这里P_1是固定的点，因此儿童不知道怎么去测量和从哪里开始测量。这个情况提供了了解儿童如何解决需要二维测量问题自主反应的绝佳媒介。这个问题仅需要使用测量在一个空间定位一个点，而非测量整个空间。因此，这涉及直角坐标的逻辑乘法测量。在算术乘法应用于面积测量发展之前，我们仅分析逻辑系统应用于面积测量的起始点。因为儿童必须确定自己测量的方向，使用方形纸的边界作为轴线；这种观察使得我们可以了解儿童如何逐步（阶段性地）发展出使用坐标在二维空间进行测量。

如何在三维空间中确定一个点的技术和儿童解决这个问题的发展阶段在第七节中已经介绍过。

在第一阶段（直到4岁—4岁6个月）儿童不使用任何物品的阶段。儿童尝试使用任何测量，仅通过视觉估计在S_2上定位P_2。即使到了阶段2A，此情况仍然存在。尽管此时儿童使用尺子或木棍帮助感知，他们的判断仍基于视觉估计。这种估计可能是相当准确的，也可能包含逻辑错误。因此P_2经常被定位在S_2的位置，与P_1在S_1的位置相反。在阶段2B时，儿童开始测量。

无需说明，在线段测量时，儿童测量的不足和问题仍明显。而且儿童满足于仅测量一次，经常尺子被斜放在方形的一角或其他显著位置上。在这个亚阶段的开始，儿童并未打算将两维一起考虑。儿童仅只是找一个方便的出发点，选择C点是因为，它是BC和CD的唯一明确的一点，但他们很少考虑尺子的倾斜。[①]在相同的亚阶段后期，当应用相同的倾斜于S_2，受试者尽量保持尺子的倾斜与C_1、P_1的倾斜相同。这种形式的测量仍然是一个单维度的，但显示出开始意识到要包含两个维度。作为过渡，存在一个中间阶段在亚阶段2B和亚阶段3A之间。在第三阶段，儿童了解了需要结合两个维度的信息。问题的最终解决方案是用两个步骤实现。在亚阶段3A的开始，儿童开始一个单一的倾斜测量，但表现出重视测量时的尺子倾斜角度的意识。渐渐地，儿童区分出测量的倾斜并表达出来，是沿不同轴的两个独立的测量。然而，尽管这一发现是至关重要的，但它不会导致长度和宽度的直接协调。紧随其后的是大量的试误行为。因此，儿童经常尝试将斜线与水平或垂直线结合起来，后者被选中是因为它平行于矩形的边。另外一些儿童在所需的方向上画直线，但不知道如何把它们整合在一起，即没有在直线间加入直角。在阶段3B，两种测量最终协调。

这些阶段回应了在线性测量中已经建立了的一般概述。在阶段1、2A、2B和3A中（除了由于个体差异的不同），两者发展的过程在时间上完全并行。在阶段3B，两维度

---

① 在阶段2估计斜度的问题，详见第十一到十三章。

（也见三维度）测量与自发建立坐标达成协调（见第十三、十四章）。单维度测量在较早的时候就完成了。因此，线性测量在亚阶段3B就开始了（即，平均在8岁到8岁6个月之间）其余形式直到9岁或9岁6个月才能意识到，即达到亚阶段3B。然而，这些行为形式的同步表现是相当有趣的。

第二节　阶段1和亚阶段2A：视觉定位，不使用工具测量或不正确地使用工具

在阶段1和亚阶段2A，通过视觉估计定位P_2。它的高度通常是正确的，但它往往是在错误的一边。将两片纸张重叠，会发现错误和不准确，儿童不能推断出测量的必要性。在阶段1，儿童受限于视觉感知。在亚阶段2A，儿童同意尝试给予他们的物质材料，但他们用它只是作为一种感知的辅助而不是用于测量。

吉姆（4;4，阶段1）　“你能在另一张纸上画出一个小红点吗，要跟这个小红点在这张纸上的位置相同？如果我们把你的纸放在这张纸上，你画的点应该刚好在这里，在这个小红点的位置上。——*我做不到*（他把P_2画在矩形的右侧，像P_1一样，但较低，也较接近BC）。——让我们看看这是不是对的（重叠S_1和S_2）。——*不，我要把它*（P_2）*放在这儿*（再高一点）。——你看，这是更好的。（提供指导。）但它仍然是不太一样的地方。你可以用这个来看（将尺放在接近P_1的位置）？——不（把材料尺子放在一边，用眼睛估计后画出另一个点）。”

米克（5;6，亚阶段2A）　将尺子放在S_2长边的一半位置，稍微倾斜。然后他看了S_1上的P_1，做出对P_2的估计，它在正确的高度，但是尺子的左侧（P_1在S_1右边）。在S_1与S_2重合后，米克将P_2放在了右侧，再次把尺子放在了S_2的垂直的中间位置。他再次将两张纸重合，发现P_2仍然是不准确的。他做了第三次估计，而不使用尺子。最后，他把尺子从B到CD倾斜，大约中间的位置。但他还是根据视觉估计放置了P_2的位置，仍不准确。第五次和第六次尝试之后，都是类似的结果，他喊道：“*这是因为点*（P_1）*一直在移动*。”

马特（6;10）　估计了P_2的位置，然后将它放在右侧但过分接近BC。主试建议儿童使用提供的物体材料。马特将一个珠子先放在P_1上，然后在画P_2之前，将珠子放在S_2大约相同的地方。他仍然发现当两张纸重叠后，P_1、P_2两点没有重叠，但他仍放弃使用尺子和木棍：“*我不需要这些东西*。”他继续估计，此时实验者插言道：“试着用尺测量，不好吗？——（他开始将尺横放在S_1上，并略低于P_1，然后在S_2上将尺子放在较低一点。他再一次估计P_2的位置，并沿着尺子将P_2画在相同距离的位置上。但画的位置还不够高。）——尺子有帮助吗？——*是的，我测量得更好了*。

杰卡（6;11）　忽略了一个事实，S_2与S_1的位置不在一条直线上，他将P_2与P_1精

确对齐后，P_2将在S_2的底部，而P_1在S_1的上半部。并且，P_2是在S_2的左半侧。实验者将S_2与S_1重叠：“这样对吗？——*不对*(但第二次仍错了)。——那么现在呢？——*有点低了*(提高了一点位置)。——现在对吗？——*哦，我把它放在这儿*(将其挪到右侧)。——现在对了吗？——*可能太高了*。——你是否发现使用(物质)材料会容易一点？——*我想使用尺子来测量*(将尺子水平放置在P_2和P_1上，再一次，他将P_2放置在S_2的左半侧)。——现在对了吗？——*不，不对。我这样测量，因为不然就太低了*(他将尺子斜放，从C切分S_2，临近尺子的边缘对P_2做估计)。”

所有这些儿童都是对P_2进行视觉估计，无论他们是否使用任何的测量材料作为一个感知参考点。他们很可能同时采取两个维度的考虑，从其高度和其到S_2的垂直距离的关系定位P_2，但仍局限于视觉近似而非将相关的距离转换。然而，很明显，这些儿童可以进行两个维度的估计，尽管他们还意识不到。他们最成功的近似，是未分化的结果，而不是分析估计(即使容易出现反向对称错误等)。当他们试图通过两个维度关系分析来纠正这种整体判断的错误时，便开始徘徊在一个或另一个维度之间，但不能进行协调(见杰克)。

儿童发现，清晰表达出相关的直觉是很困难的，而他们在亚阶段2A使用知觉参照只是进一步印证了这种困难。多数儿童将尺子或木棒放在S_2上，如放在方形纸S_2上需要画出的P_2的位置上，而非放在S_1上的P_1位置上。米克和马特都将S_2分成两半，将尺子放在平行于方形的底边或高线位置上，但米克将P_2放在了尺子错误的一边，而马特放在了较低的位置。杰克仅将尺子水平放在P_1和P_2间，这些都是相同的反应，都是出现在询问开始时没有使用尺子的情况下。

在前面的章节中显示过这些结果，在这一水平的儿童不能正确地细分长度，当两个木棍交错时，儿童不能建立点的顺序之间的对应关系。在这里，再一次，即使在感知觉直觉领域也存在系统性的困难。儿童不能在两个维度情况下细分面积，不能协调相关的点，因为两个方形有相互交叉的关系。儿童的失败可能是由于他们不能协调两个维度，正如他们不能在涉及集群关系时进行运算的思维一样，更加无法去表达空间的直觉。

第三节　亚阶段2B：测量的开始，单维度测量

在阶段2B，儿童通过初步测量补充知觉的判断。一些初步测量使用自己的双手，另外一些则利用常用工具。本阶段儿童的缺陷类似于在长度测量中已经表现出的那样。另外，在S_2上定位P_2时，儿童将自己局限于单维度的测量。测量可能是水平的或倾斜的，但儿童没有注意尺子的角度。因此得不到一个明确的结果。

麦德(6;11)　其反应已经在第六章第三节中被记录过，他仔细地研究了S_1上的P_1。之后，他拿起了木棍，并测量了P_1到S_1(S_1的右上角)，将木棍的一端放在P_1上，用手指在S_1上标记。然后将这个测量应用到S_2上，但不是从B_1出发(右下方)，所以P_2插入在S_2上右下侧较低的位置。他继续检查C_1P_1和B_2P_2的对等性，通过将自己的手指分开(这种方法似乎对他来说更可信)，“如果我把这张纸(S_2)放在这张纸(S_1)，这两个点会接触上吗？——是的(他尝试这样做了，但两点并未重合，所以他开始转动S_2，使得两点重合)。这不对。我认为这不过是与你要求的边相同的地方(指出方形的右手边，并承认自己忽视了P_1的高度)。”然后他尝试对P_2进行估计，使用手指盖住点，然后用手测量C_1P_1。在画出P_2之前，他犹豫了，不知道从哪开始测量S_2。他尝试从C_2开始测量，但忽视了P_2更高的事实，尽管C_2P_2=C_1P_1。“这样对了吗，如果我们将这张纸重叠在那张纸上？——是的。——(S_2重叠在S_1上。)——哦，不。仍然不一样。”他继续进一步地尝试，麦德试图找到不同的参照点，他在S_1上用图钉订了一个小洞：“我将测量这个洞到点的距离。(他测量从洞到P_1的距离，使用尺子和手指对距离进行了测量记录。然后他将这段距离应用于S_2，他在S_2找到了一点对应的针孔，但他再一次忽视了尺子的斜度。)——这次对了吗？——(S_2与S_1重叠)不。我从这里出发(回到C_1P_1和C_2P_2，但仍没有考虑斜率)。——为什么你从这个角开始测量？——因为我不能用其他方式。——(实验者建议儿童将尺子水平放在S_1的P_1和BC之间)这种方式？——(他再次测量了倾斜的距离。)”

欧格(6;7)　对P_2进行了估计，并画出了P_2。然后，他拿起了木棍，把木棒放在P_1和P_2间，来验证自己的估计。这个程序让他感到满足，直到S_2被重叠在S_1上方。他开始测量P_1C_1(右上)，使用木棍和并用两根手指来标记这两处。在这次测量的转换中，他从C_2开始，但忽视了木棍的倾斜。当两张纸重叠后，他再次发现，“(P_2)太低了。——你可以做得更好吗？——(这次他仅用手指测量了C_1P_1和C_2P_2，在亚阶段2B儿童使用这种技术更有信心！)——你不打算使用任何东西吗？——(他拿出了尺子并测量了C_1P_1，是2到10，然后通过视觉估计并测量C_2P_2，是1到10。之后将P_2画在纸上，并完全满意。)——看(S_2覆盖了S_1)。——这次太高了。——你难道不认为我们应该用不同的方式测量(将尺子水平放置)？——(他研究了尺子的新位置，然后开始再次测量从C到发现点)到右侧太远了。——另外的方法呢？——(他将尺子水平放置，然后将其转回倾斜放置。)——它会像这样的(水平)？——是(测量从P_1到B_1C_1，然后画出P_2并测量P_2到B_2C_2，估计需要的高度。即使现在，他再次测量C_1P_1和C_2P_2)。——为什么你又开始这样做了呢？——为了看我是不是正确。——(S_2与S_1重叠。)——不正确。——我们做了全部的努力吗？——是的。”

蒙德(7;2)　通过估计画出P_2。“正确吗？——不正确。”给予儿童材料，他把尺子斜放在从A_2(左下)到P_2(估计的)间。“这样对吗？——不对。试着测量它会更好。(他把尺子水平放置在S_1上，从P_1到BC，然后再将其小心地转换到S_2上，试图保持对S_1测量数值的心理记录。然而，不仅是高度不准确，他还忘了长度。这个过程重复了多次，他没有一次测量高度)这没有用。”最后，他再次测量了A_1P_1和A_2P_2的倾斜距离，没有考虑斜度。

与之前水平相比,这些儿童显示出在感觉上直观的进步。他们估计的P_2是大致正确的,并考虑了垂直和水平维度。然而,在使用尺子(甚至用手)测量时,他们不再考虑这两个维度。为了实现这一目标,就需要分解和协调两个维度的测量,儿童无法达成(例如,麦德开始测量但不参考高度,相反欧格和蒙德对视觉估计更满意)。将在这个水平上的判断和测量对比,发现其与儿童的长度估计是平行的。儿童在进行细分和估计位置变化时,能够具有一定的准确性,但仅在直觉范围内。在测量上,他们未能协调两者。

在亚阶段2B上第二个反应的特点是,儿童试图用一把尺子作为S_1和S_2的中间项来控制自己判断的方式。事实上,在S_2上画出P_2之前,他们经常测量P_1在S_1上的位置。

尽管这两个进步的反应仍然是不完善的。在长度测量上的固有困难仍然存在。在本质上,这些是由于细分和位置变化的不协调导致的(参见欧格和蒙德)。然而,从一个面积测量的角度来看,这些反应表明,测量在起步阶段,首先是一维的。当需要在一个矩形区域定位一点,儿童仅关注了一段距离而非独立地进行垂直和水平测量。为了在第二次测量中重复它,一些测量从方形的一角开始,但忽视了尺子的斜度(参见麦德,欧格和蒙德,最初和最后的尝试),然而另外一些水平测量则忽视了P点的高度(蒙德中间的反应)。这些行为是明显的,其优点如下。

在这个水平的儿童缺乏协调的系统,即他们可能分别进行两个维度的测量。因此,当需要在一个平面上定位一个点,他们只进行一次测量。对水平和垂直的认知发展,尤其是,地形图格式的建构已经相当详尽地被考虑了,参见第十三和十四章。这些研究指出,参与协调两个维度的位置和距离的困难,说明了为什么这是一个较晚的成就。然而,目前的实验条件,这些解释是无效的,在这里相关的轴线已经通过两个方形的边界给出(儿童不需要测量自己的表征,如在第十四章)。另外,儿童反复被鼓励去测量,而他面对的问题是定位一个点而非确定数之间的相互关系。鉴于儿童表现出的在复制相关距离时感觉层面的直觉的一定准确性,他们考虑了两个维度,为什么他们测量失败了,表现出好像无法协调两个维度的测量?表面上看,这个问题似乎是一个需要两次测量平行于方形纸的高度和宽度的简单问题。

答案是,两维度测量合成的困难体现在,协调单维度的细分和位置改变。(从直觉的观点,这些问题比困难出现两次要更复杂。)在儿童长度测量的研究中,结果表明,在这一水平的儿童不能构建嵌套的部分系列,同时保持整体的不变性,同时用这种细分影响第三项的适当的位置变化。对顺序和位置的变化关系的细分进行统和,掌握它不像处理一个简单的直线问题。涉及两维度必然是比较困难的。问题不再出现在一个直观的、感性的层次(虽然在现阶段1,它没有通过感知解决),因为所有的关系可以在一个单一的"完形"中而被理解。但当儿童需要打破整体感知性而分开测量,儿童不能在缺少细分以及调整秩序和位置变化的系统时,在矩形定位一个点。细分的需要是,选择测量那条边的长,而非其他可能的从P到S任一点的直线。调整顺序和位置变化的系统意

味着，意识到矩形固定线上点的顺序和尺子位置的连续性。一个坐标系统，即便是定性的，也需要将空间顺序放置在几个要素之间的两个或更多的维度上，也需要在这些元素间部分区间的系统嵌套。由于细分和空间顺序意味着定性与自发的坐标系，进一步地要求这些测量使双运算更加不可或缺，因为测量被证明是包含在二者的合成中的。因此，儿童在这一水平最大的困难是，缺乏线性测量操作的合成。

现在这个在空间中定位一个点的任务似乎是遥不可及的：(1)离开定性的坐标系统无法定位测量，这反过来又意味着至少在两个维度的细分和位置变化的协调(而非操作的合成，参见第六章第五节)。(2)测量本身意味着双重的细分和定位双重系统调节变化的合成。这种合成的复制，产生的两个维度，当度量操作已掌握时就没有问题，测量不过是从一个维度到两个维度而已。但是在此水平，儿童仍通过试误和以他们的直觉测量而进步，重复使任务更加困难。

由于我们的儿童不能协调两次测量，他们满足于只测量一次，或者是水平的测量(因为水平测量比垂直测量简单)或者是从矩形的一角出发倾斜的测量。倾斜测量是更为常见的，而且似乎揭示出儿童有将两个维度结合的直觉，但不能协调两种测量：他们选择倾斜的角度，在水平和垂直间的中间部分。而这种直观洞察力的可能性不能被排除，因为并非是有意识的意图；因此，下个水平的儿童不再试图去转移尺子保持倾斜。然而，如果参考了从明确的一点开始测量的必要性来理解倾斜测量的优势将容易一些。这些角是矩形的水平和垂直边上唯一的点，这个阶段的儿童，水平和垂直的概念刚刚出现。因此儿童选择最上面的角作为参考点，就如同其他儿童在这个亚阶段所做的，画一条线穿过一个倾斜容器的角，来展示如果在水平放置该容器时水面的位置，这些仍是不成熟的。在测量中儿童使用的斜坡是没有意义的。儿童画出平行的倾斜的线，努力去预测相似的一个菱形转换(参见第十一章)，在面对系统方式倾斜时都出现了困难。

我们认为，在这个水平儿童的一个维度测量，表现出其忽视了倾斜和角度，包括由尺子和矩形边造成的角度。儿童测量是单维度的，只是因为他们还没有制定出一个坐标系统和不能协调二维测量。儿童掌握的第一个角度是直角，所以我们发现，在随后的阶段，孩子们一次测量高度，另一次测量宽度，并协调两次测量。

第四节 从亚阶段2B到亚阶段3A：二维测量的转换

之前阶段儿童被记录的反应是一系列的中间响应模式。儿童仍然从P_1到S_1一角进行测量，但当他们将尺子移动到S_2时，现在试图去保持尺子的倾斜。之后，他们结束单维度测量，分别测量水平和垂直距离。

迪兹(6;10) 开始估计P_2，但当将两张纸重叠后，发现结果不令人满意。然后

他把尺子从S_1的左上角穿过P_1，并把它小心翼翼地通过一系列短步骤挪到S_2，试图保持相同的斜率。然而，他并没有完全成功。“现在对了吗？——(S_2叠加在S_1)没有，还没有。(他又试了一次，有趣的是他不再把他的尺子放在D_1上，而是C_1D_1间的一点，这样更接近P_1上，仍没有垂直。他又一次试图不改变他的尺子倾斜而移动到S_2)”迪兹开始从斜测量移动到垂直测量。

科尔(5;8)　可以比较成功地两维度分解。他也开始为P_2的估计，当他发现这种方法不满意，他测量C_1P_1的距离(即从右上角)并将其应用于C_2P_2，不用担心尺子的斜率(即一个典型的亚阶段2B的反应)。但是当他看到这个方法还没有产生结果，他喊道：“哦，*那是因为它是这样的*(C_1P_1的斜率)与(C_2P_2的斜率)*是不同的*。”他又试图保持C_1P_1尺子的斜率不变而移动到S_2。当他失败时，他问：“*你做了什么?*”他再次测量了C_1P_1，他试图通过在尺子上标记最上边到达C_1D_1的点来确定斜率。(尺子是相当长的，上边缘到达C_1D_1，下边缘到达A_1B_1)。然后他把尺子放在C_2角上，寻找在C_2D_2上对应刚才标记的点。尽管如此，他在测量P_2时仍然是不成功的，所以他再度尝试，当尺子与A_1B_1交汇时，标记尺子上的点。失败时，他抱怨说：“*是你标记错了!*”实验者向他再次确认了一次。他又把他的尺子末端的放在C_1，现在他试图确保其斜率并复制，利用尺子沿其长度画出一条线！他看上去很认真地说：“*我也需要这样*。”加一排小钩子或箭头都指向P_1。“你为什么加入这些？——*确认线是沿着正确的方向，而点*(P_2)*也不会跑到这里或那里的*(线的两侧)。”他又发现自己失败了。他现在拿了两个刻度尺，水平放置尺子，测量P_1到S_1右侧垂直边(B_1C_1)的距离。

他将此距离应用到S_2上，但忽视了他的尺子高度。标记P_2时他喊道：“噢，这太高了。我要测量它的高度。”这一次他分别测量了高度和宽度，每次他的尺子末端都在P_1，但他未能确定这个点与C_1B_1和A_1B_1的交汇点。因此，当他将两种测量应用于S_2时，实际上他只是估计了P_2。最后他放弃了一切试图通过测量来画出P_2的努力，通过视觉估计画出了P_2。

瑞德(7;2)　开始使用视觉估计了P_2，然后把尺子放在P_1上，并差不多平行于B_1C_1的位置上。然后将距离应用到S_2上。他说，“*仍然不好，这有一点差距*(在高度上，即P_2和上边C_2D_2之间)。——有你可以使用的任何其他工具吗(展示物品)？——*哦，是的!*(他使用尺子、木棒和一条纸带，这样的组合可以将从P_1到C_1D_1的空间填满，尽管三者都是水平放置的。瑞德简单猜测了高度，然后将测量的木条应用到S_2上。)——但为什么你选这3件东西？——*这使它更厚*(显示它们的组合的宽度)。——尺子本身不好吗？——*不好，因为它不能远*(在高度上)。——我们可以用其他方法做吗(实验者轻轻移动尺子到垂直位置)？——*是的，像这样*(将三件物品并排放置，估计垂直的距离，从P_1到尺子的边缘)。——难道你不能只用尺子来做吗？——(他水平测量了从P_1到B_1C_1。)——但我们之前不是看到过这样做不行吗？——*哦，是的，它太低了。我这样做*(测量高度和水平距离)。”

这些过渡的反应，强调了两维度测量的前提。不同于迄今认为的那样，儿童经历了这样一个过程，发现单维度的测量不能确定在空间中一个随机点的位置，如果一个单一的测量用在一个随机点和一个给定点之间，例如一个矩形的角(而非边上的一个点，这

一问题必须儿童自己决定），然后测量线的斜率必须保持不变。迪兹几乎是立即地意识到了这个必要性，而科尔，他用于解决问题的第一次努力失败后，在讨论后构想出原则。问题是要如何保持恒定的倾斜？为了回答这个问题所进行的一系列的不成功的尝试，最终将导致下一个阶段：不是测量，在亚阶段2B，儿童分解了关系，发现两次测量必须互相协调。

在前面的例子中，最简单的办法是小步子地移动尺子，保持一致的倾斜，这可以被描述为一个试图通过使用位置变化而不细分来求解二维测量问题的办法。迪兹尝试通过几个简单的步骤，将他的尺子从S_1挪到S_2，而不改变其方向。

科尔的解决方案更有趣。他希望复制尺子的方向以及它的长度，他把前面的测量画在尺子上，像一个正确处理的指示，"这一边向上！"通过对要移动去的目标绘制基准线，他减少了错误，相比于其他儿童而言（参见第十三和十四章），他此时仍缺乏参照系统或坐标。测量所需的位置的变化，仍然脱离了他们所发生的空间环境。没有概括化的系统包括移动的物体、固定地点和确定的参考点。他甚至加上了一系列有方向的箭头，提出一种有自己道路标识的汽车而非在路上常见的那种。

然而，儿童可能首先尝试自己改变位置，甚至从空间背景中分离它们，他们发现自己被迫使用参考点，并在这样做，他们开始比较细分领域，后来分解他们的倾斜测量。因此，他们到达一种测量阶段，这意味着被识别的水平和垂直，或者，更普遍的说法是空间直角坐标。

迪兹的记录表明了切分和分解。尝试了复制尺子的斜度并失败后，他转变为接近垂直的方向，以实现在连续位置间更精准的平行度。

科尔耐心地努力维持斜度不变，最终达到二维测量的真正分离，但两次测量仍然是不协调的（即没有逻辑乘法的线性关系）。在定向箭头都失败后，科尔像迪兹一样，回到一维测量。不过迪兹测量的是垂直距离，而科尔测量水平距离。但不像在亚阶段2B开始时那样，科尔意识到C_1P_1的斜度的重要性，然后他测量P_1到矩形边的水平距离，还试图解决它的高度问题；他的失败仅因为忘记记录尺子上的参考点。瑞德开始就测量了水平距离，然后最终扩大他的测量"做得更厚"，最终到达一个位置，使其可以获得P_1的高度。

亚阶段2B从一维测量开始，它是倾斜的，仅仅因为儿童需要一个固定的参考点，并从矩形的角中寻找。现在儿童可以理解和超越在测量时维持斜度不变的需要。因为失败了，他们放弃了脱离空间环境改变位置的做法，并采用了一种基于矩形的边的参考系统，这意味着一个切分的开始。因此，不是在他们早期的尝试中使用一把尺子倾斜在倾斜的位置的单维度测量，而是他们用角度系统代替，意味着有两个测量，或像在瑞德的那样的情况下，产生了一个两维度测量。两者是互相垂直的，因为水平是衡量宽度，垂直是衡量高度。然而儿童还没有意识到在面积切分两维和垂直时，需要表现出两次测量，而这正是他们无法协调的。

第五节　亚阶段3A:二维测量的实证发现

在分析了第一阶段的初始倾斜测量的分解后,我们现在可以预测儿童最终发现二维测量,这是最初的试误行为的结果。

盖尔(7;8)　直接将尺子放在左下角测量从A到点P_1,但是发现无法保持他的尺子的斜度,他垂直测量从P_1到A_1B_1的距离,然后将这个测量转换到S_2上,还是忽略了横向间隔。再一次,他发现P_2无法被充分确定,因此他使用尺子几乎水平地测量固定的P_1到垂直边B_1C_1的距离,但不与边成直角。当将测量应用于S_2时,他发现仍不能定位P_2。他再次测量了垂直距离,检查自己的过程:“*是这样吗?* ——你应该做什么? ——*我必须测量这种方式*(水平)。*哦,我知道如何测量! 我要做这个*(水平)*和*(垂直)*找到的高度*。”他测量从P_1到B_1C_1的垂直距离,将其测量应用于S_2,并保持手指点在到达的位置上。然后他测量了从P_1到A_1B_1的高度,并将其应用到S_2上。为了连接这两次测量,他垂直向下小心地移动他的手指,直到他测量的高度水平,然后画出P_2。P_2与P_1重合了,他现在能看到他的程序是令人满意的。“怎么把一个点放在与另一点相同的位置(Q_1=一个新的点)? ——(他先测量了Q_1的高度和横向间距,然后成功地协调了两次测量。)”然而,看起来有些奇怪的是,当实验者画出另一点R_1,并天真地问:“你能就用一个测量吗?”他试图测量P_1R_1,并将其结果应用于S_2。

吉奥(7;11)　首先他通过估计画出了P_2,然后测量倾斜距离P_1C_1,把它应用到S_2上:“这是正确的吗(问题提出是在矩形重叠之前)? ——*不,因为这里是这样的*(指向P_1C_1的斜度),*在这里太窄*(指示角度$P_2C_2B_2$)。*这是错误的,因为它的坡度不同*。——你应该做什么? ——*我已经从边缘测量了*(开始从下部的B_1C_1到P_1做倾斜测量,当应用于S_2时,试图保持斜度不变)。”在画出P_2前他改变了注意,并重新开始测量P_1C_1的距离然后水平测量P_1到B_1C_1的距离。他将两次测量结果应用于S_2并画出P_2。“这回对了吗(矩形重合之后)? ——*不,它太低了,我要准确点*(他再次尝试)。——这次对了吗? ——*没有*。——为什么不试试其他方法? ——*好的,我可以水平测量到BC的距离,然后*(垂直到AB的距离)*会怎么样*。(他测量了水平距离,但没有标记到达的点。然后他测量了垂直距离,但最终又重复了他的水平测量时所犯的错误。然而,当他想定位P_2时,他忘记了他的参考点。)——这对吗? ——*不,它太高了,而且离角太近了*(C_2)。”他现在开始测量从CD到P_1的垂直距离,然后测量从P_1到BC的水平距离。将垂直距离应用于S_2,他用手指比画一条水平线,并穿过点将到达的位置。最终通过将P_1到BC的距离应用在刻画线路上,他画出了P_2。“这对了吗(原则是对的,但在执行时是不准确的)? ——*不,它太低了*。——为

什么你测量两次？——*为了得到这个和这个*（用手臂做出水平和垂直的姿势）。——这样测量是对的吗（实验者指出不同的，但都是可行的垂直测量对）？——*是的，这是相同的*（他再一次使用自己的方法并发现是对的）。——你需要两次测量吗？——*最好这样做*（倾斜测量 P_1 到 C_1），*因为这样容易记住数值*。——只用一次测量你能做对吗？——*不能，我需要两次。我一次在一边，另一次在另一边做。如果你善于计数，你最好做两次测量。*”

苏西（8;3） 直接问道：“*我可以测量吗？*”然后立即测量 P_1C_1（倾斜），和垂直测量 P_1 到上边 CD 的距离。然而当应用倾斜测量到 S_2 时，他发现是不充分的，再次测量了两次，然后用于 S_2。这次混合了他的测量。首先测量 P_1 到 C_1 的倾斜距离，然后 P_1 到 CD 的垂直距离，最后 P_1 到 BC 的水平距离。然后第一次试图将倾斜距离应用于 S_2，并维持尺子斜度不变，他还应用了其他的测量，通过一些试误，最终成功了。“你测量用了三种不同的方式。能只测量两次吗？——*我不知道*。——这样如何（倾斜和水平）？——*可能吧*。——或者这样如何（水平和垂直）？——*是，这样也可以。这是一样的*。——你想试试吗？——（他尝试使用倾斜和水平测量，但失败了，然后使用垂直和水平测量，他成功了）——这样更好吗？——*可能是吧*。”

像在早期水平的儿童那样，这些孩子们起初有一个倾斜的测量，但他们更快地发现保持尺子的倾斜度是困难的，并很快发现需要两个独立的测量。起初，他们采用一个斜的测量和另一个接近垂直或水平的测量。经过一段时间的试误，他们终于有了重要的发现，两次测量必须相互垂直，这标志着超越了亚阶段2B到达了阶段3。最后，儿童有意识地感知到两种测量需要互相垂直。因此吉尔灵光一闪，说：“哦，我知道如何测量！我要做这个（水平）和（垂直）。”

在亚阶段3B，如果没有试误，儿童不能立即协调两次测量。在亚阶段3A，儿童表现出试误的过程，经过对倾斜测量初步分解为两次非直角的测量，帮助儿童逐渐意识到直角的需要。当发现一次倾斜测量不充分后，盖尔增加了垂直测量。之后他进行了另外的接近水平的测量，但仍然与垂直测量或BC边不是直角关系。然后他才明白，他必须协调两次测量，明确认识到它们必须有正确的角度，它们必须互相平行于矩形的边。同样地，吉尔使用了水平测量和之前的倾斜测量。一段时间内他满足于这样的形成锐角的测量。经过大量的试验和错误，他复制 P_1 持续失败，导致他想到了直角坐标。与此不同，苏西试了三种测量，倾斜的、水平的和垂直的。最后他放弃了第一种。这种发现模式的变化明确地表明，直角是一个平衡。配对地测量并逐渐走向这个方向，尽管在开始时它们各有不同。这种平衡是怎样达成的？

有些被试，像苏西，通过成功的事实就说明了其普遍性。但盖尔在运用之前就理解它的原则，而其他人，像吉奥，似乎通过尝试才发现他们的做法是正确的（参见在对应测量之前，吉尔使用手指抓出水平线）。事实上，在这一水平儿童通过试误发现的原则是，

无论是试验或发现都与其自身行为相互独立。事实上,他们发现了协调自己行为的方法。更早的时候儿童试图通过保持倾途斜不变的单一的测量,仅改变位置而不细分来解决问题。由于儿童可以协调两者间为直角关系的两次测量,因此他们的成就是一个重要的发展。他们事实上已经在两个矩形中测得的长度间建立了对应关系。

垂直测量承认一个无穷级数的平行于矩形边,而水平测量提供了另外一个平行于底边和顶边的无穷级数。当盖尔将手指移动到两个测量的交叉处,他表现出意识到每种测量定义了一个相等的和平行线的无穷级数,而P_2只有用在一条线上的级数与另一条相垂直的线上级数相交时才能被确定。

因此选择直角坐标系,因为它确保两个维度的一一对应。这种协调原则被作为坐标轴的起点。在亚阶段3A的儿童已经意识到测量两维度的可能性,准备好去构建直角坐标系统。然而这仅仅是他们的外显行为揭示了这样一个系统。他们的反应显示出其行为仍然是前运算的,如同之前所述的每个儿童的情况:尽管每个儿童都意识到需要两次测量,并发现如何协调其直角关系,但在同一时间或其他时间,他们都断言,一个单一的测量是足够的,好像使用两次测量违背了更好的决策。这一点足够证明儿童在这个水平还没有内化两维度测量,而且缺少一种可以用来计划如何开始行动的操作格式。后者在下一亚阶段3B开始发生发展,这时儿童不需要指导可以发展出直角坐标系统(参见第十三、十四章)。

第六节　亚阶段3B:操作地掌握二维测量

不同于以往研究,在亚阶段3B的儿童立即就从矩形的一边测量了点的高度和横向距离。没有任何犹豫,已经准备好了解释他们的行为,因此出现了运算的特点。

佩尔(8;9)　立即测量了从P_1到顶边C_1D_1的距离,同时测量了它到B_1C_1的水平距离。两种测量都正确地复制在S_2上。“为什么你这样测量? ——*为了知道在哪里画上点,在这个方向和这个方向。*——如果你只用一次测量呢? ——*这是不可能的,太高或太低或太远(从B_2C_2)。*”

德博(9;2)　一拿起尺子就说:“*要测量高度和宽度*(他确实做的正确)。——你要需要两次测量吗? ——*是的,否则我会把我的点放得太低。*”

多姆(8;10)　实验者对其使用了一种替代技术用来进行反复核查。两张纸被放在桌子上。他们不在彼此延伸的方向。儿童看见一根火柴倾斜于矩形的边放在纸上。他的问题是,将另一根火柴放于另一张纸的对应位置上。[①]

---

① 这种技术得到的结果与第二至六章中描述的结果是完全平行的。视觉估计失败后,儿童由纸的一角开始单维度测量。

多姆说："哦，我得测量它。"他把尺子沿着第一张纸的竖边放置，然后用纸条水平放置在火柴的顶部与尺子匹配：这样他可以做两次互为直角的测量，使他可以确定火柴的上端点位置。实验者打断说："你可以离开纸条做测量吗？——可以。"他采取了以下只使用尺子的测量：(1)从火柴顶端到临近边的水平测量，(2)火柴顶部到连接其下端和纸张下边缘的水平线的垂直测量，(3)从火柴下端到纸张的下边缘的垂直测量，和(4)从火柴底端到纸的右边缘的水平测量(这条线作为第二测量参考)。四次测量一起形成一个垂直的直线系统。

这一阶段儿童的反应与亚阶段3A的儿童反应差异是很明显的。这些儿童开始时不做单维测量，也不是在试误阶段后才发现做第二次测量的需要。从一开始，他们就意识到做两维测量的逻辑必然性，并且他们的测量直接协调了两者的直角关系。如佩尔说道："(我需要)知道在这个方向和那个方向上点应该放在哪里。"早期的倾斜测量让位于直角坐标测量。后者之所以合适，因为它们是从双重一一对应的需要而来的。因此儿童在目前的行为是运算的。在给予实际经验前，儿童已经形成了结构化预期格式。这些是，(1)逻辑乘法格式即两尺寸对应于双维度的表格，即定性的参考系统；(2)度量相同的结构，即一个真正的坐标系统中的定量测量，如可以找到自己的位置。

第七节　总结：三维测量

人们无法不对三维测量与二维测量完全同步的事实印象深刻。这个同步具有重要心理意义。一维到二维测量间有一个轻微的滞后，差异只存在于相同水平的不同亚阶段中。但二维和三维维测量之间的时间滞后是不存在的。

然而，在早期阶段的实验中，两个火柴之间只有一个平行排列存在不足。在亚阶段3B，需要增加技术的复杂程度，即两对协调的测量。

两个或三个维度测量，取决于乘法的逻辑分组(细分结合在两个或三个不同方向的位置)。因此，一旦孩子掌握了这种乘法的空间关系分组，他可以像协调两个系列一样协调三个系列。然而，应该强调的是，两维和三维测量的心理平衡来自分组的事实。从直观的角度来看，在空间中定位一点似乎比在平面定位一点更难(面积和容量的测量是完全不同的，这些将在第四部分讨论)。

我们的调查方法如下：给儿童看两个相同的空箱子，一小段比较结实的线，钉子的位置，一个小珠子被固定到绳子的一端。儿童被要求确定珠子的位置，可参考盒子内部的边，这些边高于珠子的位置。另外一个箱子是空的，给儿童另一个珠子、两个刻度尺、纸条和木条、线，线长和硬度与模型一样，剪刀用于剪短绳子和图钉。要求儿童将手中珠子放到第二个箱子里与第一个箱子内的珠子完全相同的位置。

在阶段1和亚阶段2A,儿童不想测量相关的距离,仅通过眼睛判断。下面的例子是亚阶段2A的表现。

克莱德(5;6)　选择了一段比范例长的绳子,将珠子放到末端后,并将绳子订到与模型箱子相同的一边,尽管对应关系是不准确的:"你的珠子与我的位置相同吗? ——*不,它太长了,我剪短一些,剪短绳子*(他换了另一个绳子,仍是通过眼睛判断)。——这次对了吗? ——*是的*。——你怎么知道? ——*我猜的*。——是不是有可以用来测量的东西? ——*不*。——为什么不? ——*因为像这样*(指出高度)。"

在亚阶段2B,儿童使用一次或两次以上的测量,但都没有进行测量细分。

赛弗(7;6)　估计所需的线的长度,把线剪短,将它钉在盒子的适当的边上:"是这样吗? ——*不*。——(调整了珠子的高度并换了线,但这一次他把线钉在箱子错误的一边。)——这与我的完全一样吗? ——*哦,不*(把它放在正确的一面)。*它太长了一点*。——你应该做什么? ——*我要测量它*(用一条线对应于范例的线,然后将它钉在另一盒上,钉的位置是他判断的而不是尝试去测量的)。

这次对吗? ——*是的*。——有其他你应该测量的吗? ——*我不知道*。"

加尔(7;8)　再现范例非常详细,但完全靠眼睛,最后说:"*我的看起来比其他的大*。(然后试图调整,他通过肉眼测量线的高度。)——你把它放在相同的位置了吗? ——*不*。*我要测量它*(从绳子底端到箱子最近的边,然后钉在上面,与单维度测量相同)。——你确定现在对了吗? ——*是的,这次对了*。——没有其他的你可以测量的了吗? ——*哦,是的,另外一边*(再次测量,这次测量的是与之前选择的相反的一边,这两次测量是直线和其延长方向)。——你现在做了所有你该做的了吗? ——*是的*。——确定吗?"他再次开始,但仍忽视第三维度。

在阶段3,儿童最终在三维测量上达到成功,但只有在试误之后。

艾弗(8;3)　开始时通过肉眼复制范例。"这样对吗? ——*是的*。——这个与范例完全相同吗? ——(他测量了线,发现自己的线太短了,他改正了错误。)——现在对了吗? ——(测量了从线到他面对着的箱子左侧的距离,移动自己的线与之对应。之后他发现线到箱子临近面的距离与范例不同;做了第三次测量。然而,当应用到自己的箱子时,他将尺子放置出一个角度。)——现在对了吗? ——*不,还没有*(调整线的位置,尺子垂直于箱子的临近面)。"

最后,在水平亚阶段3B,儿童不需要试误就可以使用三次测量。

比亚(9;1)　直接拿尺子测量从线末端到箱子左侧面的距离并说:"我也可以

从另一边开始。"在箱子底部做出临时标记后，他测量从这个标记到右手面的距离。没有任何犹豫，他测量从线到临近面的距离，并与之前已知的测量结合，确定线应该钉在箱子的位置。只有这样，他才能测量线本身长度并将珠子放置到位。"现在对了吗？——*是的，就在这儿了。*"

以上反应与之前记录的完全一致。三维的测量与二维测量一样，展现出从阶段1到亚阶段3A的连续发展。最后它包含三个分开的部分。

(1)最早的反应是纯粹的感觉特征的。没有对空间和立体的细分。最早的测量(亚阶段2B)是一个纯粹的位置变化。被移动的对象是没有一个固定的空间环境作为参考的。方向和倾斜似乎是在绝对意义上的移动对象的属性。随后的分析让孩子建立一个有组织的参考系统，其中的关键点按二维或三维顺序排列。这些点间的距离被视为形成嵌套系列的组成部分，这些系列本身随发展进程越来越协调，这些定量运算处理位置的顺序和细分，导致一个包括协调性在内的两种运算的全面参考系统(见第六章第五节)。在二维或三维测量中，这个系统可以被描述为一个定性的坐标系统(参见第十三、十四章)。

(2)亚阶段2B的测量开始时是单维度测量(甚至还不充分的单维度测量)。这是由于儿童不能细分，且不能协调位置顺序的概念。因此，他们"转移"的不仅是距离还有倾斜。在随后的亚阶段的度量的发展是一个简单的过程，让孩子学会使用顺序固定的参考单位来移动他们的标准测量小棒(yardsticks)，同时更加系统地细分，应用于面积或体积和标准本身。这一发展过程最终使儿童掌握两个或三个维度的测量问题。新建成的测量格式是一个协调的直角坐标系统。因此，坐标系就不再是纯粹定性的，也是定量的了。面积或体积的测量是一个综合的分组，如线性测量(见第六章，第五节)。切分和位置变化不仅是协调的而且是互相补充的，它们合成为一个运算。结果，坐标系统不再仅仅是二维或三维上有序点和嵌套间距的系统，它变成了单位距离的两重或三重序列。平面和空间本身是可以转换成度量的量子。

(3)早期的协调和后期合成呈现了精确的矩形结构，因为一一对应的两个或三个维度的逻辑乘法，需要这样的结构，尽管是一个定性运算，这样的测量运算意味着在单位长度的位置上的系统变化。坐标轴的垂直安排源自对两组或三组一一对应的关系的定义需要，这将构成两个或三个维度。二维度或三维度的坐标系统，无论是定性或度量，都可以被看作是一个有双倍或三倍的条目的表格或网格，行、列和层都被设置在彼此成直角的位置。

李婷玉译，朱莉琪审校

第八章　角度测量

我们在最后一章中表明，在儿童可以测量定位在一个面积或一个体积的一点之前，他们需要发展一个一一对应的轴垂直的系统。换句话说，坐标轴取决于一一对应的原则。角的测量(由两条直线而非四条直线定义的平面部分)[①]取决于一对多的对应原则。我们在第十二章的研究中得出了类似的结果。在这一章节中，我们将解决角度和三角测量相关的相同问题。

角的测量有三个部分的研究。第一部分专门研究开放角度测量的发展(锐角和钝角)。第二部分论述了三角形测量。最后一部分是有关儿童如何逐渐发现三角形的角的特征度量性质的研究，他们可以安排一个半圆的图示，因此，三角形内角总和180°。

第一部分　测量角度

向儿童展示下面的图(见图1)两个互补角*ADC*和*CDB*，让儿童画出另一个完全一样的角。

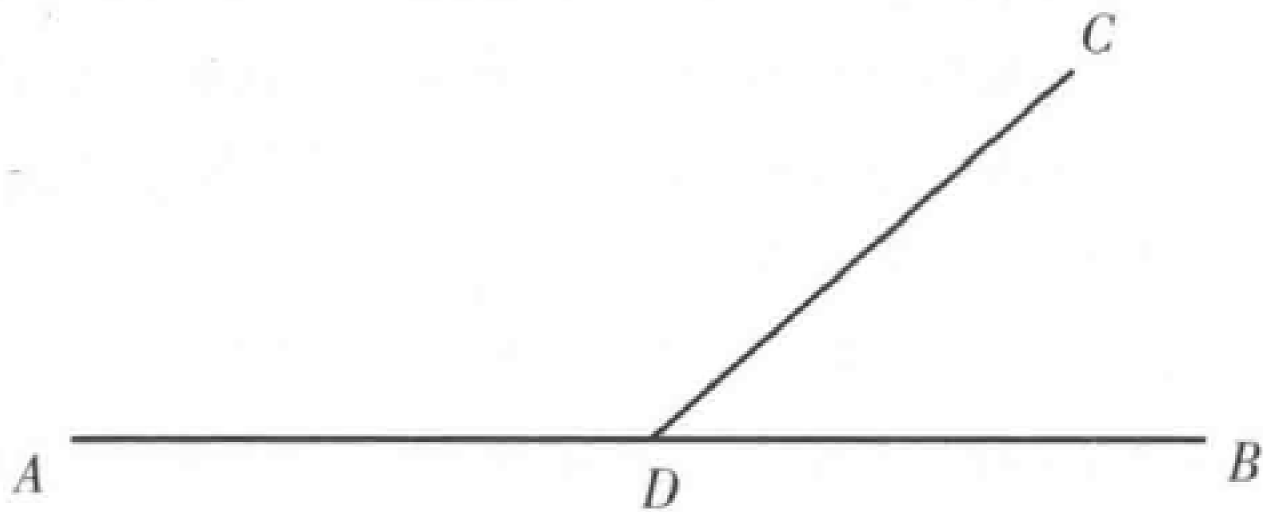


图 1

儿童不允许在画的时候看示范，但可以在他觉得不准确时随时研究和测量。

这个要求很容易满足，将范例置于儿童的身后。然后给儿童提供尺子、纸条、线、三角形纸板和圆规等，这些都可以用于测量。重复询问儿童三次，每次需要画的都是相似的。

在阶段1(4—5岁)和亚阶段2A(约6岁)，儿童通过视觉估计复制图画。没有尝试

① 路易斯·伯川德(Louis-Betrand)定义一个角度为两个半平面边界的重叠，而维罗纳人(Veronese)定义为一组包括边的射线[F.恩里克斯，数学大百科全书(Encycl.Math.)，111，1]。

去测量。在亚阶段2B儿童测量*AB*或*CD*,或同时测量两者。但这些都是一维测量(忽略了将*AB*细分为*AD*和*DB*,测量是不充分的)。没有尝试去测量角度的分离,没有考虑*CD*的斜率,仅从视觉上进行判断。亚阶段3A出现了两个进步:*AD*和*DB*被分开测量,儿童测量了*CD*的长度,试图保持尺子的坡度来复制它。在亚阶段3B,儿童最终测量了*AC*和*CB*来确定点*D*,并由此确定了*CD*的正确斜度。一部分儿童在亚阶段3B,几乎所有儿童在阶段4开始阶段,测量了*CK*的距离,*CK*是从*C*做垂线交于*AB*的线段。这一测量足以确定点*C*的位置,因此没有必要去找到*AC*和*CB*距离的交叉点。

第一节　亚阶段2A和2B:不测量角度

在阶段1和亚阶段2A的儿童,无法测量一个普通的直线,当需要测量*AB*和*CD*两线以及它们之间的角度时表现很差。即使在亚阶段2A,儿童的视觉判断仍处于优势,没有任何测量。

吉雅(6;5)　开始画出水平线*AB*和上方的线*CD*,几乎垂直于*AB*,都是通过肉眼判断:"对了吗?——*不,不够好*。——如果这里有你需要的东西,你可以从桌上拿取。——*不,我不需要任何东西*(他又开始画了,这次夹角太小了)。——难道使用尺子不是更好吗?——*不,我可以不用尺子画出直线*。——那测量呢?——*不,用尺子太难了*。"

尼德(6;6)　画出水平线*AB*和在*AB*间以锐角但接近点*A*的位置画出线*CD*。"这样对吗?——*不完全对*(他重新开始,画了个短点的*CD*,但没考虑他的斜度)。——(第二个范例)这回呢?——(他用类似的方式画出了一个大钝角*CDB*。)"

这些反应揭示出儿童在亚阶段2A(更何况是阶段1)不仅没有尝试去测量角度,还没有估计*CD*的斜率,似乎将这两点同时忽略了。然而,当前的发现完全符合第十一章(一个菱形的密切转换)的结论,和伍斯顿(Würsten)对倾斜感知的观察。

在下个亚阶段2B,儿童有两个明显的行为获得。亚阶段2是在儿童第一次能够直观地构建一个菱形时(参见第十一章),他们对密切关系转换的反应是中介(参见第十一章)。本阶段研究表明,尽管仍然是通过视觉估计,儿童意识到*CD*的坡度,并在绘画时将其考虑在内。同时开始测量线的长度。

德尔(7;3)　用手画出两条直线后,没有测量就拿出铅笔画出*AB*和*CD*。"是不是一样的?——*是*(但在仔细检查后,他改变主意,重新开始。这一次他用拇指和食指测量*AB*)。——我给过你测量可能需要的东西。——*我什么都不需要*(不过他

拿了一把尺子测量AB,把测量转换到自己的画上。但画CD时没有任何测量)。我做的是正确的,它仍然不对。"

马尔(7;4)　使用尺子画AB和CD,用尺子只是为了画直这些线。"好了吗?——没好。——你需要做的是对的吗?——我要测量(测量AB和CD)。它仍然是不一样的(角度太小)。我的时间太长了。——但你测量它,不是吗?——好,不是太长,但它太薄(即角度太窄)。——你能纠正它吗?——(他又测量了一次,又画了一次,改变了画CD时尺子的斜度。但这次角度太钝。)它不会成功的。我不知道为什么。——也许你犯了一个错误?——不,我测量得对。也许你画的图是错误的(!)"

伊尔(7;4)　看着范例说:"我需要尺子来做这个,这样才能把线画直(他确实这样做了,但没有用尺子测量。他之后发现他的复制是错误的,因此开始测量AB和CD,但仍旧忽视D的位置。)这真有意思。我测量的是对的,但仍然不对!——为什么不对?是不是还有其他你需要测量的地方?——不,我已经测量了这里(AB)和那里(CD),全部在这里了(!)"

吉斯(7;5)　没用尺子画出了自己的复制版,将D放得离A太近,角度太窄:"这对吗?——不对。——为什么不对?——(他重新画了一次,但犯了同样的错误。)——难道你不需要尺子吗?——我可以测量范例然后再画,他使用尺子(测量AB,然后复制了它)。不,这不对。我忘了它(CD)。(他开始测量CD,并将测量复制到自己的画上,但仍忽视了测量D在AB上的准确位置。)"

艾弗(7;5)　不经测量就复制了范例。"这样不对,因为我的太这样了(角度太窄)。——你能做得更好吗?——(改变角度。)不太好(他测量了AB和CD)。这不起作用。——为什么不?——我不知道。"

派(7;6)　先画出了线,然后测量它们:"这不对。——为什么?——因为我的线靠得太近了。——你能纠正吗?——是的。(派测量了AB并画出了D,但没测量D在AB上的位置。然后他测量了CD,未经过D点就将其长度复制。)——为什么你将点放在哪里(D)?——我做错了。——但你也许需要这个点?——不,我非常确信我不需要。"

雷(7;6)　测量AB但没测量AD。他估计了D的位置,并画出了D,然后测量CD并从D点复制其长度。"你为什么将点放在那?——为了知道从哪里画出这条线。但我的靠得太近了,因为尺子的原因。——好,那么纠正它吧。——(他再次尝试,仍旧失败了。)"

丹(7;7)　开始完全通过肉眼画出整个图形,然后测量了AB和CD:"这样对吗?——不,我测量错了(再次做出尝试)。——现在对了吗?——不,但我真不知道为什么不对。我仔细测量了。——难道没有别的你该测量的吗?——没有,只有两条线,我都测量过了。"

在这个水平的一维度测量与之前章节描述的情况相似。儿童使用手，或如果测量物体长度超过手时，使用常用测量工具。在这些限制内，他们的测量是相当精确的。但他们不能在运算性格式中分解一个区间(interval)，切分受到直观感知到的图形的限制。最后一点完全由所有被试测量*AB*和*CD*的方式来证明(*AB*和*CD*在他们自己的感知上是直线)，而没有一个人去测量*AD*或*DB*，这将使他能够确定*CD*接触*AB*的点*D*，即*CD*与*AB*连接的位置。相反的，这些儿童通过简单的视察就确定了*D*的位置。与仅画出*CD*而不是先确定*D*点位置不同，像派和雷，他们在画出*CD*前先估计出*D*的位置。

他们对入射角度的态度看起来非常特别。感知是相当准确的，如事实所示，这些儿童都批评自己的图纸。虽然他们可以在画完之后判断*CD*到*AD*的倾斜是否正确，但是他们不能复制模型的斜度，更别说测量斜度。

在亚阶段3，儿童试图去保持尺子移动时不变，从而将斜度从范例复制到自己画出的图形中(参见第七章，发现亚阶段2B的末期，当其需要在矩形内定位一个点时，儿童采用这一过程去进行一个倾斜的测量)。然而，这种方法虽然看似简单，却不太有效，这意味着儿童对倾斜线间平行概念的理解。之前关于儿童对空间概念的早期研究表明，这样的理解是在阶段3产生的。当然，在亚阶段3时，倾斜测量被直角坐标轴取代。这样的事实不奇怪，在亚阶段2B时，儿童似乎没有意识到再现坡度的可能，仅是从感知上模糊识别出两个倾斜线的差异。

由于同样的原因，他们无法测量角度，把角视为一个两边长度和它们的线性分离的两维度关系。虽然他们分别测量线*AB*和*CD*，却是严格的一维测量，他们甚至不考虑测量除了图中两条线外的其他任何东西。这些儿童自发地绘画，并经常是愉快地说："我这样做是正确的，它仍然不管用。"(德尔测量和再现了*AB*和*CD*的长度)，"它不对。我不知道为什么不对……我测量的对。也许你画的图是错的！"马尔发现他的角"太薄"，发现*CD*"不够长"，反映出自己的视觉智慧自我中心(view-intellectual egocentricity)，"这很有趣。我测量的对，但它仍然不对……我测了(*AB*，*CD*)，全部就是这样了。"(艾尔，这意味着角度的分离是不可衡量的！)最后说："只有两条线，我已经都测量了它们！"(丹)

丹的话有效地总结了亚阶段2B：*AC*，*BC*和从*C*垂直于*AB*，在图中的感知是不明显的，因此它们不存在！*AB*和*CD*的长度可以被说是存在的，但坡度和角度的分离不存在。因此，孩子在这个水平不能测量角度。当这些没有实际给出时，他们不能正视细分和改变位置，同时他们缺乏一个坐标系统，以及建立一个二维的一对多关系的能力。

第二节　亚阶段3A:儿童试图复制坡度,考虑了平行线但不能分开测量角度

在一维测量中,在亚阶段3A的儿童可以协调细分和位置变化。一个阶段的试误后导致测量开始。细分和位置改变的合成使得测量更快出现,即在之后亚阶段3B的开始时,或在8岁或8岁6个月时。在二维或三维测量中,我们发现一个过渡水平,在亚阶段2B和3A之间。在这个阶段,儿童使用两次分开测量代替单一倾斜测量来解决问题。在重复测量时,他们不改变尺子的斜度。在阶段3A,他们开始分解倾斜测量,通过试验和错误,发现以两个相互垂直的测量来进行更方便。

然而,在补角(supplementary angles)的情况下,发展的速度比在二维测量坐标是矩形的情况下慢。到目前为止的所有问题,实际上几乎完全可以用一维测量来解决。儿童不再通过视觉检索找到点*D*。细分更精确,所以他们或测量*AD*或*DB*或两者都测。但是,即使*CD*的起点是正确的,他们也不能通过合适的测量确定斜率,这需要测量*AC*和*CB*或垂直距离的线*CK*到*ADKB*的距离。相反,他们只是测量*CD*,在应用到自己的绘图时,尝试维持尺子斜度的不变。在阶段3,当要求儿童画一个与范例相同的三角形时(参加第十二章第三节),也会发生同一类型的反应。

海尔(7;10)　测量*AB*,并通过检验,在*AB*间插入点*D*,然后他测量*CD*,并移动尺子到自己的绘图上。“*这样不行。*——为什么不呢?——*因为我拿尺子的方式不对*(测量*AD*)。——为什么测量这个?——*因为,我想知道线从哪里开始*(*DC*。他画出了线,但仍旧与范例斜度不符合)。*不好*。(他再次尝试,试图不改变尺子的斜度。)*我测得不对,而且我移动尺子的时候出错了*。”

瑞文(8;3)　测量了*AB*和*AD*,“*做得更对了*。”然后他测量了*CD*,并将测量转换到自己的绘画中,同时试图保持自己尺子斜度不变。“*难道不对吗,我已经非常小心地挪动尺子保持它的斜度了,但我仍测量得不对*。”瑞文认为他在转换*CD*的斜率时比他在测量时更为准确!

利郎(8;5)　测量线*AB*,估计点*D*的位置。然后他测量*CD*,并说:“*这样不对*。”他仔细地研究了这个问题,并测量了*AD*、*DB*和*CD*。“*第一次画的不对,所以我想做得更好*。——那么现在呢?——*也许我挪动这个线*(*CD*)*做得不对。我不知道*。”

苏西(8;6)　测量了*AB*并估计点*D*。他测量*DC*并第一次画出图形。“*这不对*(他又开始了一次,测量了*AD*)。*这仍然不对*。——为什么不对?——*我挪动尺子做得不对*(指斜度)。”

罗斯(8;6)　同样的类似的方式开始,然后移动尺子到自己的绘画上,试图保持其斜度,“*向这边倾斜*。”

艾德(8;7) 开始时做法也是相似的,并发展出一个自己的方法,这表明他为了保持斜度不变而太过担忧。他在尺子上画出*CD*的开始点,好像后者可以作为转换角度的"转换者"。"*你为什么这样做?——因为我需要长度和斜率,而我不能得到它们。——为什么你需要斜度?——因为这个线(CD)不是垂直的,所以我要这样去做。*"

不像在亚阶段2B的儿童,这些儿童在绘制时不满足仅测量两条直线。他们意识到,*DC*只有在*D*点确定时,并且角度准确时,才能做出来。第一个任务对他们来说没问题,他们只需要测量*AD*或*DB*。但确定线的坡度是困难的。为了确定这一点,儿童需要测量*AC*或*BC*,或绘制从*C*出发垂直于*AB*上的点来实现角度分离。

这些孩子的年龄范围从7岁6个月到8岁7个月(仅限于上面的那些记录)是在亚阶段3A。换句话说,他们开始通过反复试误,发现一个、两个甚至三个维度的测量技术。然而这些孩子们仍困惑于角度测量的问题,仍然努力尝试或多或少成功地保持坡度。当问题是一个二维测量时,一个处于亚阶段2B和3A之间的儿童使用同样的程序(参加第七章第四节)。

一项平行研究能给当前问题带来一些启示。该研究中有些反应与儿童在第七章的行为有相似性。但有些反应是不同的,在年龄和发展水平的表现上存在差异。那个研究中儿童被要求重现一个矩形内部的一个点,从点到矩形角的斜线并未在图中给出,需要儿童自己引入。因为不能将其分解为水平和垂直距离,因此他做出倾斜测量,并将自己的尺子移动到临近的纸上,使用直观的半知觉(quasi-perceptual)的平行方式。然而在这里,*CD*已经连同其斜率都被给出。因此,不需要被试尝试重现斜度。但他处理的智慧格式(intellectual schemata)是什么?可以这样解释:儿童不能通过叠加等同角度,仅通过检验三角形的边是否平行来确定三角形是否相似(参见第十二章第一、三节);儿童最近掌握了直线的概念,表现在他们可以通过瞄准或保持恒定方向来建立直线(参加第六章),可以利用两线间的平行概念,不论这些线是倾斜或垂直还是水平的(参见第十一章)。因此,当重现*CD*的斜度时,这些儿童的行为受到平行概念的支配。儿童在这个水平不能通过直角坐标系确定斜度,并不能理解通过叠加,两个角度可能是相等的(在当前的实验中,他们被给予了直板三角形,用它可以测量*CD*的斜度,但儿童不会使用它)。因此,在移动过程中,儿童仅通过测量木棍给出的感知方向试图维持尺子的斜度,努力保持两线的平行。在亚阶段3A,当要求再现相似三角形时,其他儿童表现出相同的精确的方式(参见第十二章,第三节)。

为什么会这样?这些儿童不测量AC和BC的距离,这样可以知道角度*ADC*和*CDB*吗?答案是,他们没有将给出图形的角度同化(实际上所示图形故意地让其被视为角度测量的问题,但不强制必须采用这样的解决方案;我们因此未采用一个角度有两个补角的图形)。儿童所看到的是一个倾斜的线,一端与水平线相交于一点,不会看见两个角度需要被测量。兴趣蕴含在儿童的反应中,如果让其测量一个给出的角度,儿童的兴趣

就已经失去了。我们在这里看到的结果与涉及定量的角度阐述的发现一致。事实上,有两个补角的情况对当前问题的解决提供了帮助,补角可以解释被试处理目前的问题和解决两维度测量的时间滞后:在三角形测量中没有时间延后(第二部分)。

第三节　亚阶段3B:分别测量角度

在亚阶段3B,儿童可以通过叠加一个到在另一个上面来等同角度,可以建立不同大小三角形的定量相似性(参见《儿童的空间概念》)。在处理当前的问题时,他们将图形视为一个角度系统。因此他们测量AC和BC,确定两个补角的大小,并有时测量从C到AB垂直的点K到C间的距离。以下是在亚阶段3A和3B中间的第一次的验证。

盖尔(8;6)　开始没有测量,但对结果不满意。他因此测量AB和CD,并开始另一次绘制:"这对吗?——*不,我的是直的,而它是这样斜的*。"他测量AD和D点,试图保持要求的斜度不变来画制DC。再一次他研究了自己的绘图,并说:"*我必须知道这儿到这儿的距离(BC)*。"他发现一个唯一的C点位置,测量了AC和CB并改变DC。

派(8;10)　立即说:"*为了画图,我需要用一个三角形*(他拿了一个三角形纸板,试图将其应用于图中,但最终放弃了,因为发现它不符合角CDB)。*这是不对的,所以我不得不用两把尺子形成一个角度*。(他测量AB和DB,并画出它们。然后用一把尺子测量DC,另一把测量AC。因此他通过双重测量确定了角度ADC。)——你为什么用两把尺子?——*因为它很容易*。——你能用一把尺子吗?——*可以,但我为了确定点(C),要先测量这里(CD),然后那里(AC),因此用两个尺子更快*。"

劳尔(9;0)　测量了AB,在尺子上标记了D点位置,然后画出自己的基线ADB,根据尺子的标示画出CD的起始点(像艾德在阶段3A的做法一样,劳尔的行为是这个水平的残影)和一条线使之成为右侧角度。然而,当他发现他的角度画得太窄,他测量了垂直距离CK(K是从C点到AB垂直的垂足),并通过将这次测量与对DC测量的结合,确定点C的唯一位置。

米克(9;3)　测量AB、AD和CD后,画出第一个图:"*这是不好的。我要改变这条线(CD)。我要测量这个距离(AC)*。"他使这个测量与对DC的测量结合起来,正确确定了点C的位置。

杰克(9;5)　测量AB和AD然后画出AB线,标记点D。然后测量AC的距离,并临时标出点C的位置。在测量了CD后,他调整了DC和AC的位置,试图纠正斜率:"为什么你测量这个不存在的线(AC)?——*因为我需要这条线帮我找到它的斜度(DC)*。"

雷恩(9;8)　*“我需要那个线(AC)才能画线。——为什么？——因为我知道这条线(DC)从哪里开始，但知道它在哪里结束(C)。——你能测量它吗？——不能，因为测量它只能告诉我它多长，但我还是知道它的斜度为好。”*他测量AC和DC，并确定C点。

乐可(9;7)　测量了AB和AD，画出AB和D点，然后测量DC，并挪动尺子试图保持它的斜率不变(像在阶段3一样)：“*不，这是不一样的。——为什么不呢？——*(他研究了由于角度ADC所形成的AC的距离，并回答)*是因为我画的长度比范例大。*(他测量AC并纠正他的画。)——你为什么测量(AC)？——*为了知道这条线应该倾斜多远。我需要知道斜度是多少(DC)，并且为了做到这点，我要知道这里到那里有多远(AC和BC)。但我仅知道这个(AC)，因为我已经测量了这里(AD)和这里(DB)。*”换句话说，他测量了角度ADC并意识到这足够确定补角CDB。

威尔(9;10)　测量了AB和AD，画出AB，和点D。继续测量DC，但即使将测量进行了转换，他仍说道：“*哦，我需要这个长度(AC)和那个长度(CB)。——*为什么？——(他测量AC说)*我不需要知道(CB)。——*为什么？——*因为结果都是一样的*(调整AC和DC)。”

这些案例在亚阶段3A和3B之间(盖尔，劳尔和乐可)。这些孩子通过回想在第七章中别人如何分解一个斜度的测量，并将两次测量在分开的维度中进行的方式，有了自己的发现。光是平行性的概念是不充分的，他们不能维持斜度的恒定。儿童之后意识到，使用CD和AC或CB的结合(盖尔和乐可)或者使用垂直的CK(劳尔)，可以确定“这个斜度有多大”。其余的儿童不经历最初的试误就成功了，仅看了示例图形就立即同化出角度格式或者甚至是双角度格式(威尔和乐可，没有最初的试误过程)。他们意识到可以通过测量ADC的角间距，自主地确定了补角CDB。用威尔的话说，“因为它是一样的。”因此，由于图形被同化为角度系统，儿童自动识别出测量角间距的需要，这就是为什么他们测量那些最容易被重复的距离AC或BC。

将这些结果与我们所知道的关于相似三角形(参加第十三章)和关于二维或三维度测量(参加第七章，同上)进行比较是有启示意义的。后者是一个矩形的坐标问题，尽管这个重要的差异，与在这个水平的儿童的多种行为有紧密联系。首先，我们发现角度测量比在矩形平面空间定位一点需要较少的两维度运算。这并不取决于我们是否同意接受角度的两维度定义，如两个半平面重叠，其边作为边界。这仅仅是一个事实，尽管我可以使用单维度定义，如维罗纳人(Veronese)将角度定义为一些由共同顶点发出的射线，由两条边作为界限。对角度的测量仍旧意味着对其边的长度和边的距离的协调。这两个测量不能在相同维度的方向上进行，原因是他们足够形成由角的两边组成的空间(这将发生在无论我们选择哪个点来协调两次测量，因为我们关心的是建立边之间的距离，而不是边的距离本身)。虽然角的测量是一个二维的操作，它不受一一对应的原

则的控制,但它仍可表达为直角坐标系的行和列的矩阵。随着我们对这个水平亚阶段3B(参见第十二章,第一节)儿童发现三角形相似性原则的掌握方式的讨论,当一系列连续的平行线在一个角的两臂之间被画出时,它到顶点的距离也增加了。这些线到角边的比例的恒定性取决于一对多的对应,并非一一对应,因为每个连续的线将回应一个在单位上适当的距离,沿着一条或另一条边。这种一对多应对的协调格式的测量是在亚阶段3B达成的,而非之前。但是仍是当一对一或直角坐标系被掌握的时候。这两种不同的发展应该一致,使得运算智慧出现一个关键的转折点。

第四节　阶段4:使用直角来分别对角度进行测量

如果我们继续把问题给予超出亚阶段3B的儿童,问那些已经达到阶段4的儿童,将出现形式运算。我们发现,儿童倾向于拒绝分别测量角的 *AC* 或 *CB*,而是测量角 *ADC* 或者 *CDB*,喜欢画出从 *C* 点垂直 *ADKB* 的距离 *CK*。换句话说,儿童使用测量解决切线计算。我们试图确定为什么会这样。以下是在阶段4开始阶段儿童的范例,第一个例子是在两水平中间的儿童,他使用了两种方法。

罗尔(10;4)　测量了 *AB*,然后研究了 *DC* 并说:"*我不能复制这个线,因为它不直*(即垂直)。"他测量了 *AC* 和 *DC*,为了确定点 *C*,并通过测量 *CK* 核对他的结果。"对吗?——*对,但我将再做一次*(他又复制了一次,这次他仅测量了 *CK*,省略了 *AC*)。*这样就更容易了,我可以做得很快*。"

马尔(10;6)　测量了 *AB*、*D* 点,然后测量了 *CK* 和 *DC*。之后他画出 *DC*。"你确定这是对的吗?——*是的*。——难道你不该做其他的测量吗?——*嗯,我可以测量这个*(*DK* 在 *ADKB* 上的距离),*但因为这点*(*K*)*必须在同一行*(*C*)(即从 *C* 垂直于 *AB*),*我不需要*。"

米尔(10;8)　测量 *AB*、*AD* 和 *DC*,但他没有画出 *DC*,而是标记出一个临时的 *C* 点,然后从 *C* 点垂直于 *AB* 画出一条线(*CK*)。他测量这条线并发现与 *DC* 对应的垂直距离。"你为什么要那样做?——*我不知道在哪里画这条线*(*DC*)。*我知道从哪里开始*(*D*)*但不知道在哪里结束。这样我可以知道这一点*(*C*)*在这里*(*CK*),*所以我可以很容易做到的*。"

罗孚(10;7)　测量 *AB* 和 *AD*,然后测量垂直于 *AB* 的线 *DK'*　,*K'*　和 *C* 到达 *AB* 的高度是相同的,加上 *CK'*　的水平距离。然后他依次画出 *ADB*,*DK'*　和 *K'*　*C*。然后他发现 *DC* 的长度在自己的绘画和范例图画中长度相等,他发现这是真的。"为什么你需要这个点(*K'*　)?——*为了知道这两条线*(*DK'*　*和 CK'*　)*的中间交集*。——你是怎么发现的?——*我把这一点放在点*(*D*)*的上方,然后我发现从*(*D*)*到*(*K'*　)

和(K′)到(C)的距离。”

杰克(10;8) 测量AB、AD和一条从B点开始结束在K′ 点的垂直于AB的线。然后他测量CK′ (平行于AB),然后画出DC线。“你为什么要那样做? ——为了得到这一点(C),对。——有没有其他的方式可以做到这点? ——有的,我可以从这两边做都是同样的(即垂直于A)但它是完全相同的。”

孩子们自己解释了为什么他们选择通过从较短边做垂直来测量角度:“更简单”如罗尔提到的,这意味着他选择了一个惯例,在直角坐标系中而非随机地去测量角度。在亚阶段3B,儿童获得两种协调的理解;矩形轴使他们能够在有序的点间建立一一对应关系,并在两个或三个维度上找到这样的点之间的距离,而一对多的对应使他们构建相似三角形和使用边之间距离的测量作为对一个角度的测量。

在测量角度时,通过在其短边做垂直,这些儿童在直角坐标系统内有效地整合了一对多的对应。在不知道这个方法的时候,儿童在测量角度时,考虑了垂直的CK和边(正弦)或DK(切线)的关系。仅仅通过替代的算数乘法和逻辑协调的除法的替代和应用这些测量的距离,他们可以计算角度的正弦和正切。很自然地,他们满足于这些测量之间的定性的协调;换句话说,尽管包含了关系,用度量表示,进行一个逻辑乘法的过程中,无论是一一对应还是一多对应,他们的方法是定性的而不是定量的。然而,一个垂直测量的引入是非常重要的。鉴于目前的实验条件,垂直测量在阶段4不占主导地位,因为它比测量AC和BC要求更高的想象力建构。然而,劳尔的例子证明,垂直测量可以在亚阶段3B发生。下面的章节将表明,当儿童被要求测量一个三角形时,在亚阶段3B这种测量是相当普遍的。

第二部分 三角形的测量

三角形的测量似乎是比角度测量更基本的问题,因为它是一个封闭图形。儿童不再需要选择一个适当的测量去确定角度的分离。从在相关测量中一对多对应的必要性角度,其建立只有一个困难(孩子已经通过了试误阶段,在试误阶段儿童试图通过调整三边来建立三角形):发现三角形的高度是其基础。下面的观察已经明确,无论什么样的任务,无论是角度测量还是三角形测量,儿童的反应都按相同方式发展。尽管三角形的范例更容易复制,因为它直观的外形更为完整,但儿童仍面临同样的困难,在认知上的分解和重建距离上,因此经过相同的发展阶段。

我们使用的技术与第一次使用的非常相似。图2要求复制的三角形(只有一条连续的线ABC)放在儿童的背后。给儿童一张白纸,让儿童把三角形完全一样的复制出来。各种协助,如两侧都有刻度的米尺、棍棒和纸条提供给儿童。

儿童在阶段 1 和亚阶段 2A 不测量图形。他们只是通过肉眼将它复制。那些在亚阶段 2B 的儿童同时测量三边,即,他们的测量是一个维度的。因此,他们不能确定三角形的三边在何处相交,其角度也不准确。

在亚阶段 3A 的儿童通过保持尺子的方向不变,试图复制线的斜度。他们通过试误调整三边。在亚阶段 3B,儿童测量三角形的高,而且测量三边。最后,在阶段 4,他们建立了自己的(K'')超出了 ABC 的外在边界。

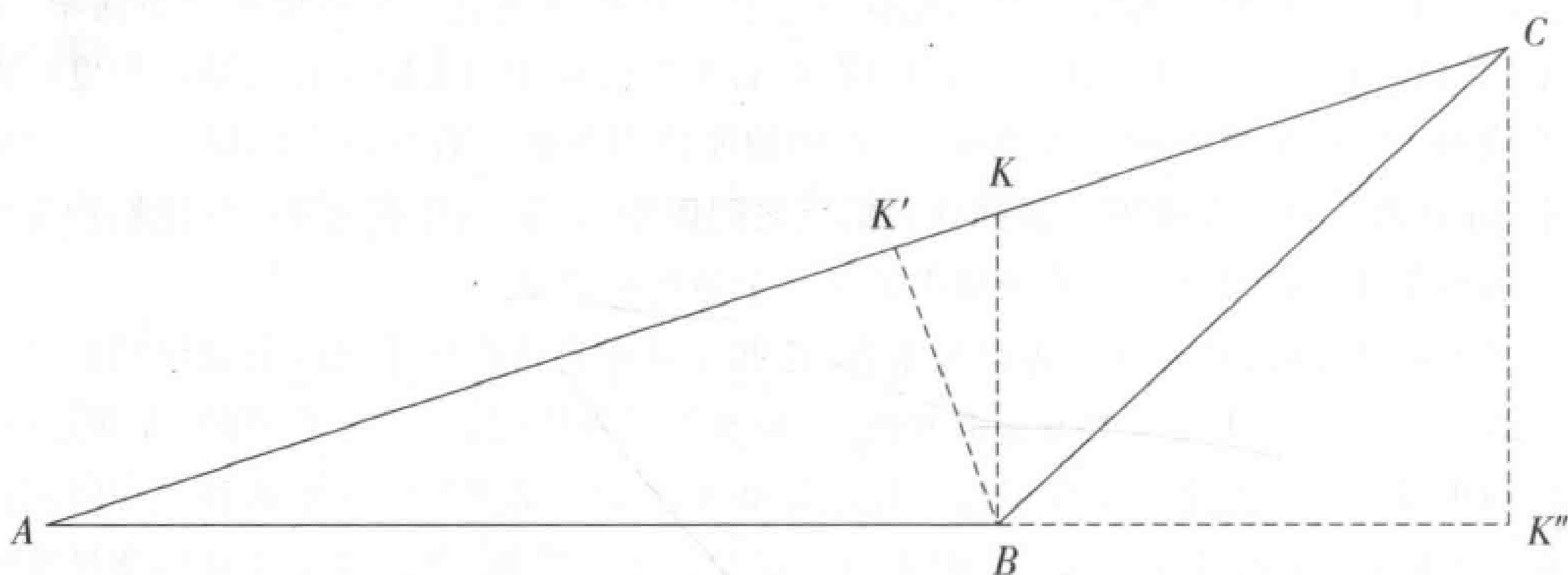


图 2

第五节　亚阶段 2A 和 2B:不进行测量或局限于线性测量的三面之间没有协调

开始的两个例子,是亚阶段 2A 的儿童:他们不试图测量。

塔尔(6;5)　不使用尺子就画出了三角形:"*这不太好*。——为什么?——*因为我开始做错了。我从这里开始*(*AB*。在第二次画的时候,他先画了 *BC*,再画了 *AB*)。*这仍不对。我知道应该从哪里开始了,这里*(这次,他从最上面的边 *AC* 开始。画出了一个三角形,但与范例图形完全不同)。*我都试过了,它还是不对*。——为什么不对?——*我不知道*。——难道用尺子不会做得更好吗?——*不,因为我画的线不是直的*(指的是三角形的周长),*而尺子是直的*。

韩(6;6)　在不测量的情况下画了两次三角形,并抱怨说:"*这不好*。——那么你可以怎么办使你画的图跟这个图一样呢?——*我再试一次*。(他再次尝试,仍然失败了,并说)*我不知道哪里不对*。"

这些儿童的最初反应是最有趣的。读者会记得,在阶段 1(即约 4 岁),儿童完全不

能复制三角形。他们的画是一个无法识别的封闭曲线圆圈(参见第二章)。但在亚阶段2A的孩子学会区分三角形、圆形、正方形和长方形。因此,在这种情况下,吉雅和韩画出了三角形。

这是我们可以预期的,因为他们都超过6岁了,因此接近亚阶段2A末期。但他们的成功也有局限,他们把所有的三角形都画成锐角的,而且大多数是等腰的。因此,从纯粹的定性的角度,他们都无法协调图形的分解(三边),和边的斜度。在处理*BC*时的失败是最显眼的。缺乏定性的协调,是一种细分和位置变化的合成,不能将其视为测量。更引人注目的是,塔尔拒绝使用尺子,是因为他看到是直线的,与三角形的轮廓矛盾。他不测量,而是告诉我们,所有测量的前提都是一维度的,因此无法适用于三角形!

在亚阶段2B存在明显的局限,当孩子们开始做一维度测量时,是直观的和不完全的,正如我们前面看到的。测量是不完全的,是因为细分和变化的位置之间的合成不完全,同时缺少两维度测量,儿童简单地只用一次测量,经常是倾斜测量。所以在再现补角时,他们测量边而非测量角度分离。在再现三角时,儿童测量连续的每个边,而不重现边的斜度并且不知道边在哪里相交。值得注意的是,在他们画图时,三条线不能相交。第一个例子中记录了德尔的反应,中间已经在第一章引述过。

德尔(7;3) 画三角形的时候先画了基线*AB*,然后画了*AC*和*BC*(画了一个锐角*C*):“*这不对。*——为什么?——*你从这里开始的*(*C*)。——为什么?——*因为这个线不直*,(*AC*)*不是直线*(即不是水平也不是垂直的,他又尝试并失败了)。——你能用其他方式来做吗?——*我不知道怎么做*。——假设你用尺子。——(他测量了*AB*、*AC*和*BC*,但现在*AC*和*BC*在重现时不相交)*我用尺子试过了,仍然不行*。——为什么不行?——*我不知道*。”他仍然尝试,并且当他画三角形时不测量三角形的边,边在*C*点不相交。

泰尔(7;4) 测量了*AC*并画出了它,然后是*CB*,最后是*AB*:“*这不对*(有个差距现在在*B*处)!*这个要更倾斜一点*(直的是*AC*,他又试了一次)。*我不知道为什么这不行。每次我都测量了所有的边。有什么出错了*(*AB*和*CB*在*B*点不相交)。*这条线*(*AB*)*太直了*(即水平),*所以不能跟那个相交*。——你测量了全部吗?——*是的,我测量了三条边,这就是全部*。”

马尔(7;4) 首先测量了*AB*,然后是*CB*和*AC*:“*这不对。这条线*(*AC*)*太短了*(它的长度是正确的,但它与*AB*不相交)。——为什么?——*我测量错了*(他现在先测量*AC*,然后是*CB*,然后他意识到如果他测量*AB*,那他的线就太长了,他仅画出了直线*BA*,而没有测量它)。——难道你不应该也测量这条线(*AB*)吗?——*不,这是条直线,我可以不需要测量*(!)——但为什么这条线比范例的线短?——*我不知道*。”

简恩(7;5) 测量了*AB*和*AC*:“*这不对*(他再次尝试。他从*AC*开始测量,然后

是AB最后是BC)。*这仍然不对,因为我先测的这里(AC*。他再次尝试,从BA开始),*这不对。这个线(BC)在我的图中太远了。——为什么? ——我不知道。我不应该从这儿开始(BA)。(他再次尝试从另一边开始)这仍然不对。我不知道为什么,但这不对。——你所有的都测量过了吗? ——是的,这是唯一的测量方式。*”

吉斯(7;5)　相似的试误:“*这不行。这是一样的。这不是我的错:我测量得对。*”

雷(7;6)　测量了AC和CB,然后说:“*这不对。这个线(AC)太长了,那个(CB)必须这样*(指着向后的斜度(backward slope),*重新开始测量*)。*这接近正确了。这不完全对,是因为我测量的不对。——你确定你测量的不对吗? ——是的,它太长了。因为我没仔细看数字。*”

艾弗(7;6)　测量了AC和CB,发现当他再现AC时,两者不能相交:“*这个线(AC)在我的图中太倾斜了。——好的,再试一次。——*(相同的结果。)*我不知道为什么,但这不行。我测量了所有的线,还是不行。这是你可以测量的唯一方式。*”这些反应与角度测量的问题是完全平行的,但有一个奇怪的假设是,测量必须以特定的顺序进行,好像他们的整体是不交互的或不相联系的!

如在角度测量的问题上,年幼儿童没有意识到边的斜度需要额外测量。他们认为通过简单地测量三边,三边会自动地交汇,他们很肯定这一信念,直到他们的经验证明,它缺乏根据。显然,他们已经忘记了他们之前在图形建构时的困难。3—5岁间的儿童学习画三角形,通过试误使边相交。在很长一段时间,他们继续画线,线斜度不正确因此不能交汇(参见第二章和第一章,在图形探索过程中的感知觉活动)。但是,在亚阶段2B,他们的感知觉和直观的力量,使得画出一个三角形是没问题的,并且不像亚阶段2A的儿童,他们可以成功地画一个钝角三角形。事实上,从六岁起,孩子们甚至可以在直观的水平准确地复制一个钻石形图案(参加第二章和第十一章)。

然而,当孩子试图通过测量边使画更精确,表现出他的三角形的概念是一个直观的整体,这个整体只要其中任何一部分进行单独的分析就被瓦解了:如果他单独测量每个边,这些边就不再相交!他对三角形的联结式直觉是,三角形由边组成,三边以一种牢固的方式互相关联、互相补充。三角形的两边没有固定的“斜度”,因为在他们的意识中,倾斜不能单独以移动属性的形式区别出来。在亚阶段2B,儿童没有较快地分离出三角形的一边来测量它,而是忽视了它的位置和完全集中于它的长度,其结果是直观的整体破坏。他缺乏对三线构成的顺序的理解和位置的变化协调细分能力。由于整体不是由移动性的和可逆的运算分组建构的,他们对三边斜度和它们的交点不能系统地协调。画一个三角形的问题可以特别揭示出这个方面:儿童不能理解为什么他们的努力是不成功的,可以从他们的评论中体现出来,“我不知道为什么它不行……我测量了所有边……这就是全部了。”雷说。艾弗是唯一提到线的斜度的人,但他没能发现其测量

方法太局限。

很多这样的儿童，他们发现无法通过测量三边成功复制三角形，最后双边不相交，想象一下，如果他们以不同的顺序执行相同的操作，他们会更成功。一个儿童从AB开始，结束于BC和AC之间的差距，他认为他应该从BC开始；但是当他试图这样做，他结束于AB和AC之间的差距，所以他又试了一次，从AC开始。当被问到为什么顺序是重要的，他像简恩一样回答："我不知道，但是我不应该从(BC)开始。"而事实上，他们认为测量顺序是重要的是可以理解的，再次指出了细分和位置改变的整合作为测量的必要前提。因为这两个概念的分化是不充分的，在这里没有整合。儿童认为如果按一个顺序测量三边会相交，但如果顺序改变就不会相交的信念，意味着位置变化间的混乱，位置变化不是可交换的和部分的总和，因此不能认识到两种分组是相关的。

第六节　亚阶段3A：通过试误测量倾斜和角度

儿童在阶段3处理复制补角的问题时，试图在应用测量到自己的绘画时(第二节)，保持他们的尺子在一个恒定的斜率。当复制一个三角形时，他们表现出相同的反应，无论是通过自身，还是如在下面的第一个例子中。更经常的是，他们通过试误，使边相交。这个任务与之前任务的本质区别是，在这里范例图形中的三边确实相交。对亚阶段3A末期的儿童，不再试图保持尺子的恒定斜度，只是通过试误调整三次测量。前三个例子是第一类。

瓦尔(8;6)　测量BC并试图重现他尺子的斜度，然后同对AC做同样的处理，水平画出AB，但BA和AC不相交："*这是不对的。也许我犯了一个错误：我没有测量正确。*(他再次尝试，以谨慎小心的态度，但仍然失败了)哦，*我一直忘记了，我必须正确测量它。*——这是你唯一可能犯错的地方吗，测量长度错了吗？——*是的，因为当我移动尺子的时候我对我的手非常小心*(即维持尺子的斜率)。"

贝德(8;3)　首先测量和复制了AC，然后是BC，最后是AB，每次都小心地维持尺子的斜度。在B有差距时："*我要把它像这样更倾斜*(范例图形的BC)。*我必须让它更倾斜。我要小心它是如何倾斜的。*"在之后的进一步的两次都不成功的尝试后，他又测量了CB，没有画出CB，而是临时地标出点B，同样地他测量了AB。然后他研究了临时点B间的距离，然后再次尝试，直到距离减小并最终消失。他建构了另一种新的画三角形的方法："你为什么这样做？——*这样画一个点是比较容易的，因为我可以纠正它，但线是很难纠正的。*"

朱拉(8;6)　按照顺序测量并复制了AC、BC和AB，试图保持它们的斜度。他也结束于一个差距："*不好。*"他尝试，失败，再尝试。他现在测量AC，用铅笔标记点

C的位置:“你为什么要那样做?——*让点的位置正确。我一定要让它倾斜正确,所以我得试试像这样去做。*”

这个发展过程与角度测量的问题所展现出的是相同的:长度测量(亚阶段2B)打破了图形被给出的直观整体性;因此,儿童必须重新将边组合起来,通过亚阶段2A有关联的直觉引入新的关系。因此,我们发现,他们现在注意斜度,这是最先考虑到平行的例子(瓦尔,在最初,贝德和朱拉)。然而,当这种方法失败时,他们又发现一个解决方案,通过试误,通过反复调整测量的两边找到三角形的顶点。下面被引述的儿童的例子只使用这个方法。他们先复制基线,然后调整剩余两边,直到发现一点,在那点两边完全交汇,且没有长度改变。

海尔(8;3)　首先测量和复制基线AB,然后测量AC和BC。通过测量,从A和B点分别尝试各种不同的斜度,最终发现它们相交的点C。“你为什么要那样做?——*因为这些线是倾斜的,这就意味着我必须让它们一样倾斜。*——有另一种方法来做这件事吗?——*没有。*”

索尔(8;8)　测量AB,并画出它;然后测量AC,画出点C;测量BC,画出另一个点C,说道:“这还不是很正确。”他继续将两点拉近,直到它们重合。给他另一个三角形,他用同样的方法进行了复制。“你为什么这样做?——*让它们正确地倾斜。我想让三角形正确。*——有没有别的方法做这件事?——*没有,我要测量线正确,然后确保它们按正确的方式倾斜。*”

吉尔(8;9)　绘制基准线AB,然后测量AC和BC并使这些测量交汇于点C。“你为什么这样做?——*因为线不是水平的。倾斜,所以我要看着它们,直到跟我的线倾斜地一样。*——你能不能用另一种方式来做?——*嗯,我可以复制线的样子(*表示其斜率*),但这样更准确。*”

瓦尔(9;0)　测量AB,“因为它是非常水平的。”然后测量AC和BC,并说:“*这让它们交汇在同一点会很难(*他一点一点地调整它们*)。*——你可以用另一种方法来做吗?也许是一个更简单的方法?——*不,因为这样是正确的。*——你确定吗?——*是的,因为这些线是非常不同的,我必须这样做。*”

我们注意到,协调关系的方式越来越精密。亚阶段3A的开始阶段标志着倾斜的意识出现,而最后,像瓦尔,他建构的困难是能预料到的。这预示着亚阶段3B。三边的测量结合调整实现了三角形,对应了在亚阶段3B角度分离的问题(第三节)。不同之处在于,在三角形情况下,需要调整的三条边在范例图形上是可见的、明显的。不能称这种行为是两维度测量的例子。这完全对应于首先进行的分解尝试(参见第七章亚阶段3A)。

第七节　亚阶段3B:对三角形高度的测量结合了它的三边

在前面的水平最高的儿童,如瓦尔所做的,可以对问题有预期,儿童在亚阶段3B可以立即分解三角形为垂直于一边的高度和每个边的长度。因此,所有相关的尺寸被确定在一个系统方式而不经过试误。

杰克(9;4)　测量基线AB,然后是BK,垂直于AB画出的线。测量AC,他将其穿过K点(AKC),然后简单地不经测量地加入CB:"你为什么需要这条线(BK)?——*因为,通过这样做,可以告诉我哪里可以放点(C)。*——如何做到的?——*因为我要做的是测量线(AC)。*——你不能测量它吗?——*不能,因为我不知道要倾斜多少。*"

吉尔(9;8)　测量并画出AB,然后测量垂直于AC的BK'。然后,测量AC,他调整它,使之与BK'形成直角。最后,他加入CB。"你为什么测量(BK')?——*为了知道在哪里画(V),因为这一点(K')必须在其(AC)上。*——你能不能用另一种方式来做?——*不能,因为仅测量线(三侧)是不足够的。*"

吉雅(9;9)　测量并画出基线AB,然后测量垂直于AB的BK并加入KA。然后他测量KC并把它画在AK的延长线上。最后他加入CB:"你为什么测量(BK)?——*为了知道宽度(即三角形的高)。*——为什么你测量(KC)?——*因为我需要这条线。另一半(AK)。我像这样做(将两个末端连接起来)。*——但你为什么必须测量(KC)?——*为了得到点(C)并和这个点(B)连起来。*"

尼德(9;11)　测量并画出AB,然后将K'画在范例图形上:"你为什么要那样做?——*为了知道的宽度。*——你需要吗?——*是的,三角形是歪的,如果我知道宽度,我可以让它的倾斜按照正确方式。*"

罗德(10;0)　立即问:"*我能测量距离(BK)吗?*——可以,为什么呢?——*因为不然我就不知道要画多高。*——为什么?——*哦,我可以测量它们多长,但我同样需要知道它们倾斜的程度,否则我画的就不会合适,因为那条线(AC)是倾斜的,所以我不知道把这一点(C)放在哪里。*——如果你画线(BK),你就可以肯定点(C)的位置对吗?——*是的。这一点(K)应该在线上(AC)。那么,如果我测量(AC)就全都知道了。*"

这些反应很有趣的原因有两个。首先，现在的儿童感觉到比一维度有更多的测量的需要，他们确实在早期的在一个矩形内定位一个点或角度测量的问题中感受过。通过测量三角形的高度以及其边，他们有效地通过预期运算格式协调他们的测量。这一格式提出一对多对应的广泛原则，它管理角度分离的测量。这些都出现在亚阶段3B，也是一一对应的第一次出现(参见第七章)。其次，我们注意到，在亚阶段3B的儿童测量高度来复制三角形。他们测量了到一边的垂直距离(更准确地说是到长边的垂直距离)。因此，两条线都可以用于正弦或正切的计算，*BK*对应角*CAB*，*BK′*对应角*ACB*。这些测量的使用表明了一个角度测量的一般意义的协调。然而，当问题是一个封闭图形时，在亚阶段3B，而不是下面一节将说到的阶段4，这种行为似乎有点早。

第八节　阶段4：在给出图形外侧画出垂直线条

尽管在三角形测量中，亚阶段3B儿童开始建立三角形的高。但是在阶段4，儿童自发引入之前没有出现的建构线。9—10岁的儿童在图中测量垂线(亚阶段3B)，但10—11岁儿童经常似乎更倾向于建立*K″*，在原图形之外的线，*K″*在*AB*的延长方向，在*C*垂直相交。这种建构并不主张一个与亚阶段3B不同的协调，但它表明了摆脱已经给出的感知限制，获得更大的自由，并且是形式思维的典型开端。

楼(10;7，参见第四节)　测量并复制*AB*，立即画出其延长线，指出点*K″*，并说："这一点必须在同一行。"他接着测量*BK″*，绘制出K″，去测量和绘制垂直线*K″C*，*AC*已经确定了不需要测量："为什么你测量(*CK″*)？——*它是高度，所以我需要它。*——为什么？——*为了让斜度正确。*"

加尔文(10;9)　直接测量*CK″*，说："*我要知道它的高度以便准确地复制它。*——为什么？——*因为如果我知道它的高度，我可以准确地画它。*——为什么？——*通过这一点(C)。*——你确定它是正确的？——*是的，因为这条线(K″C)与那条线(AK″)是直角，这就是我如何正确得到这点的。*"

麦德(10;11)　笑道："*没有一些更多的线，我就不能完全复制它。*——为什么？——*我得画一条线在那里和一条线在那里*(在示范图形上指出*BK″*和*K″C*)。——为什么？——*一旦有了这条线(K″C)，我就有了全部需要的，就可以非常容易地做到*(他测量了*AC*、*AB*和*K″C*，将*AB*延长到*K″*并复制)。——现在为什么你需要(*K″C*)？——*因为这是高度，通过知道高度，我就知道在哪里画点C。*"

麦德给出了关于管理建构线的原则的明确陈述：为了精确复制一个图形必须建构原本不存在的线！这一陈述包含一个完整的认识论的萌芽。简要地说，它显示了数学

运算是如何通过赋予它的附加属性丰富客体，这源于一个主体的协调行动，而不是直接从给定的对象得到。这个原则于整个从水平1到4的发展序列起作用，但其操作是无意识的，在行动和直觉水平，因为年幼的儿童将其自身建构投射于客体。另一方面，从思维形式上说，是意识到自身的建设性作用，因为发展的整个过程导致意识从行为分离。它标志着一个阶段，在这个阶段儿童获得了对自身思维过程的充分控制。

第九节　不规则多边形的测量

为了验证上述观点，我们要求为处于不同发展阶段的儿童展示一个不规则多边形并要求他们将其临摹出来。他们在学校学习中从未见过这个多边形，但是它可以被分解为数个三角形（图3）。尽管完全解答出来要花去更长的时间，但是解答方式与前面给出的任务是一致的，量取三角形或其补角。处于亚阶段2A的儿童不去测量，他们画出的图形与原图差别较大。

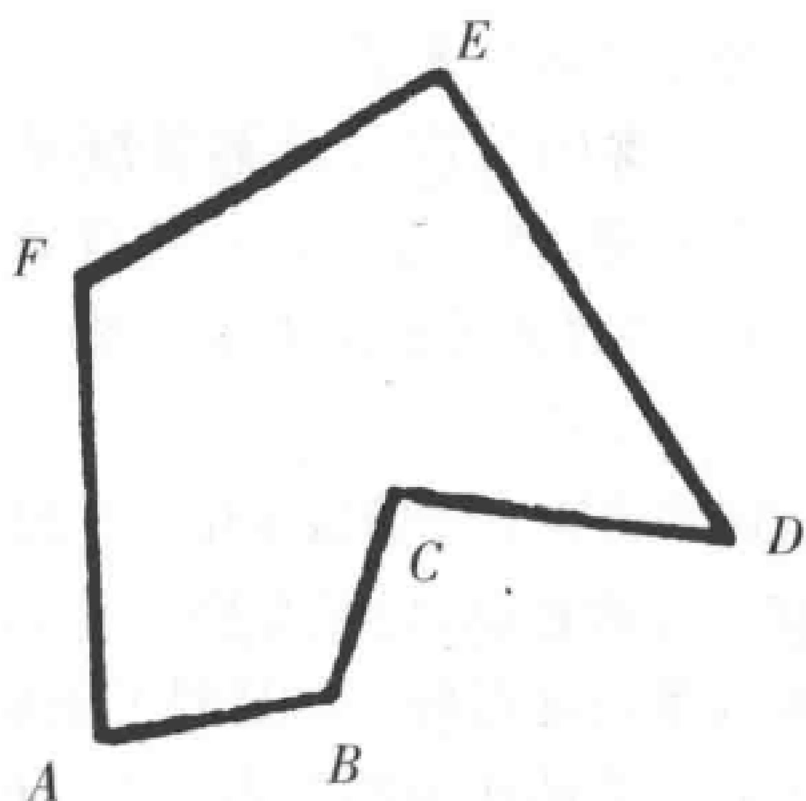


图3

里克（6;2）　按照AB、BC、CD、DE、EF和FA的顺序画图而没有进行测量："*画得不好。*——为什么？——*我开始就画错了*（他从A点开始画起，却按照逆时针的顺序来完成，以FA[①]边为结束）。*这也不好。我没法完成这个。画这个挺好玩儿的。我不知道应该怎么来画才对。*——你需要用尺子吗？——*不。*——你会测量吗？——*会*（使用尺子）。*不，这不管用，我不知道该怎么量。*"

处于亚阶段2B的儿童会量取每条线段的长度，但是却忽略了方向，以至于他们完成的图画最终都会有一个没有对准的缺口。

西姆（7;1）　先量了FA和FE，然后量取AB、BC、CD和DE。他笑着说："*这不管用。我量取了每条边，但还是画不出来。*——仔细看看这个图形。——*也许我量的方法不对*（再次尝试）。*不是，我这次已经够认真地了，每次量的时候我都把指头压在尺子上。*——那是哪里错了？——*也许我先量的线不对，应该先从这儿*（AB）*量起。*——为什么呢？——*它是一条直*（水平）*的线。*"

葛斯（7;2）　画法与西姆类似，但是到了最后他不再量取线段而是直接照着图片大致地画。"为什么你不再量了呢？——*当你测量的时候，只知道线条的长度，但*

① 原文为BA，推测应为FA，应是英译版错误。——编者注

还是不知道该把它们放在哪儿。我把它们放错了地儿,所以我不需要量这个。"

在处于下一亚阶段3A的儿童中出现了斜度的意识,他们以以下方式来保留图片中线条的斜度。

> 戴尔(8;3)　量取线条,在画图时保持着量取时尺子的斜度,这是因为:"*线条应该在同一个位置。*——你就不能量别的吗?——*不行。我已经把每条线都很认真地量过了,现在我要注意的是把它们放在正确的地方。*——这个你可以量吗?——*不行!你办不到。你只能注意它的倾斜程度,可能我在这儿出错了。"*
>
> 波尔(8;4)　"*为了能画得一模一样,我得量出每一条线,然后还得让它们倾斜程度也一样*(他进行尝试)。*这不对。或者是我量的时候量错了,或者是我移尺子的时候出偏差了。"*
>
> 雷(8;6)　画出的图形有个缺口,他说:"*我不知道该怎么做。但我知道我肯定没量错,挪尺子的时候也没出错。*——那么,你能做点别的什么吗?——*不,我不能,要照着画出线条的位置(倾斜程度)太难了。"*

这些答案对于阶段3开始时的儿童而言是非常个性化的,这一阶段儿童开始有了斜度和平行的意识,但是却仍然没法完成矩形或三角形的协调以及对于一对一或者一对多的线条斜度再现。但是到了亚阶段3B的儿童会将图形分解为三角形,然后量取了图片上并没有的线条的距离。不过他们的分解和重组在当前任务中是不够的,因为要解答出来这一问题还要量取图形外部的线条。

> 伊恩(9;10)　量取了*AB*、*AF*和*FB*来画出三角形*ABF*。他还测量了三角形*BCF*、*FEC*,但是却没有测量*CDE*,这是因为他只量了*CD*和*ED*,却没有量*BD*和*CE*。因此他没能把*D*点的位置准确画出来。
>
> 谢尔(9;11)　在伊恩量的线条之外还量了*CE*。由于没有线条BD,他画出了除三角形CDE以外的图形。"你有量出所有的距离吗?——*是的,已经没有别的点需要我连起来了。"*

最后,在阶段4,儿童可以顺利完成任务,他们不再漏掉处于图形外部的线条*BD*。

> 乔司(10;9)　迅速将图形分解为四个三角形,量取了包括*BD*点在内的所有点的间距:"你为什么要这样分解图形呢?——*这是为了知道该怎样组织线条。如果我画对了三角形,那整个图案也就对了,因为我把所有线条的长度和斜度都画对了。"*他成功完成了这一做图任务。
>
> 罗布(10;11)　将图片划分为数个三角形,同时还添加了两个辅助点,*AF*延长线上的点*K*帮助他画出了角*FKE*,*KE*延长线上的点*K'*帮助他画出了角*EK'D*。量出

了 EK'、FK 和 $K'D$ 后，三角形 $EK'D$ 保证了 ED 斜率正确，FKE 保证了 FE 斜率正确：“为什么你要这么做呢？——因为如果我要保证线条都能正确地倾斜的话，只量图片上的线条是不够的。——但是为什么你要加上图形里没有的点K'呢？——因为我必须加上它才能知道该怎么画线段DE。”

在处于不同阶段的儿童完成复制不规则多边形和三角形这两个不同的任务中，出现了引人注目的同步。在这一任务中，我们同样发现了处于阶段4——形式思维阶段的儿童，在重组线条上的自如。比起之前临摹一个角或者三角形的任务，测量意识的发展依赖于推理能力的发展这一事实，在临摹不规则多边形任务中得到了更加明确的体现。

第三部分　对角度和三角形测量的总结

如果测量体现了一种复杂的操作协调性，或者是一连串推理，不管是外显的还是内隐的，处于测量角度和三角形的不同发展阶段应当在度量推理的发展中存在着对应阶段，因为度量关系推理建立在对测量的理解的发展上。一个众所周知的关于三角形的角的公理是：三角形内角之和为180°，这一公理提供了一个分析整个基因序列的有趣技巧，借此技巧，结构测量成了关于度量关系的数学推理。在提出问题时，有意避免了类似“各角度之和”这样的表达。我们用了一个半圆这一可视或者说易于想象的说法，代替180°这一抽象的表达。

应用固定的表达方式，使我们向处于四五岁至十一二岁这样不同年龄段的儿童提出问题时，变得非常容易了。我们的目的是，分析不同发展水平的儿童在测量角度和三角形中的反应。我们要求儿童回答出，向他们展示的角或者三角形在被剪刀裁分并在一个半月形中重组后会是什么形状。儿童会看到这样或那样的它们组成半圆形的实例，这一问题是为了看儿童是否能回答出正确答案，即变成一个不同形状的三角形。

这其中，对应不同的被试，可以分别使用两个稍有不同的技巧。第一个技巧重点在于经验型发现和归纳，而第二个技巧更多体现了演绎和推理，更加依赖于对图形中角的抽象化。在第一个技巧中，向被试展示三个不同的直角三角形，它们大小不同，但是角已经被切分为不同的部分，这样一来它们便可以在半圆形中重组起来。我们先让被试挑选并替换一个三角形中的角来帮助他理解角的抽象性。之后把两个角并排放置在一起，让被试推测在这个基础之上再放上第三个角会是什么形状。他完成之后再将它们组成一个半圆。然后换一批直角三角形重复这一过程，之后是三个等边三角形（4cm，10cm 和 32.5cm），三个等腰三角形（底分别是 9cm，16cm，50cm，高分别为 2.5cm，4.7cm 和 14cm）以及三个不同的不等边三角形。出于实验需要，为了让实验者较为轻易地由一个

任务过渡到下一个任务，所有三角形的角已经被裁掉了，所以被试需要完成的任务就是去预测挨个排列重组后他们会得到什么形状。实验者偶尔会提出将三个角调换顺序，来看儿童是否能够意识到这种顺序的调换对结果不会产生影响。或者他会提出，从别的三角形上拿一个角来替换儿童正在重组的三角形的其中一个角。以观察儿童能否意识到，一个三角形的角与不同三角形中的两个角放在一起，未必能组成一个半圆。最后，向儿童展示一个非常细长的三角形，随着询问深入，三角形被不断拉长，用以观察儿童可以将自己的发现归纳到什么程度。

在第二个技巧中，向儿童展示一个与第二部分中出现过的类似的三角形，让儿童去想象三角形的"角"被放在一起时会是什么样子。三角形是完整的。在儿童做出回答后，向儿童展示另一个类似的三角形，该三角形的三个角已经都被裁下来，让儿童把三个角拼在一起。可能的话，让儿童在看到结果之前自己做出推理，并鼓励儿童说出各种答案直到自己依靠推理或者实际把角放在一起而发现答案。这一过程会用五个不同的三角形进行重复，这些三角形在形状上相去甚远，通过这一过程确定被试的归纳程度。

这些技术得出以下结果：在亚阶段2A的儿童无法将角抽象化，无法推出它们的和。对他们而言，原先的角是顶角，他们重组出的图形是"半圆"，二者完全不同。当考虑到角的重组时，他们集中于角的数量而忽略角的形状。即使在他们自己看到组成的半圆后，也无法回答出答案。他们甚至无法意识到调换角的顺序不会影响结果，即不存在守恒。这可能发生在将一个实验中发现的结果转移到另一个实验中，被试看似在归纳，但是这其实只是思维的经济性而非真正的组合。在亚阶段2B，儿童可以意识到顺序变化不影响组合结果。不过，儿童越进行推理，就越不会进行快速地归纳，因而他们对于不同的三角形也会组成180°就并不确信。在亚阶段3A，儿童开始进行归纳，并距离发现公理更进一步。但是相对于成人中演绎和归纳互为补充的过程，处于这一水平的儿童经常会出现矛盾，这是因为，在分析非常肤浅的情况下，归纳与分析并不是同等水平的。因此处于这一阶段的儿童给出的答案常显得不如阶段2的儿童准确。在亚阶段3B的儿童发现了公理，但是只是在逐步归纳的基础上，而阶段4的儿童发现的公理是普适且必然的。

第十节　阶段2：不能理解相关的关系

处于阶段1时，儿童并不知道他们看到的已经从第一个三角形上切下来的角可以组成一个半圆形。当他们发现这些角确实能组成半圆形时，也仍旧不能将这一发现归纳为答案。有时候，从一个三角形到另外一个三角形也会有答案的迁移，但这只是一种思维的方便、经济性，而并非是基于实际组合的归纳。甚至到了亚阶段2A，儿童仍不知道，一个三角形的角的组合顺序变化后，是否还能够组成一个半圆。

弗尔(5;6) 将三个已经从直角三角形上切下来的角拼在一起,并看到它们组成了半圆,但却仍然没能回答出问题:"如果我把这两个角放在一起(从第二个三角形上拿的),然后再把第三个角放在旁边,会拼成什么形状呢? ——*它们也会拼成一个半圆*。——那么如果我对那个三角形(另外一个更大一些的三角形)也做同样的事呢? ——(指向一个小于180° 的图形)为什么它会少一点呢? ——(没有回答。)——(实际操作。)——*哦! 是一样的!* ——现在如果把这边这个角放到那边,然后把那边的那个角放到这边呢? ——*图形会变得大一点*。——你确定? ——*不对,会是个半圆*。——为什么呢? ——*不对,它会更大一点*。——那么如果我们把这个图形(一个梯形)的角都放在一起会变成什么形状? ——*它们会拼成一个圆,因为有几个角很大*。——那这个图形(等边三角形)的三个角呢? ——*它们会拼成一个比半圆稍微大一点的图形*。——为什么? ——*这两个小角可以拼成一个半圆*。——(实际操作。)——*哦,不! 是个半圆!* ——那么如果我把两边的角换一下(像之前一样)呢? ——*变成一个倾斜的半圆……我不知道*。"

拉夫(5;8) 将三角形的两个角拼在一起:"假设我们把第三个角也拼在上面呢? ——*会拼成一个圆形*。——为什么? ——*那个角会拼在右半圆上*。(验证)*不对,只是圆的一部分,半个圆*。——那么那个三角形的角拼在一起呢? ——*它们会拼成圆的一部分,和这些角一样*。——如果我把这个图形的四个角(梯形)拼在一起呢? ——*它们也会拼成圆的一部分*。——看。——(实验)*哦,不对,是一整个圆*。——那么如果是这四个角呢(正方形的角)? ——*它们也会拼成一个圆*。——那这个图形(等腰三角形)的三个角呢? ——*一个半圆*。——为什么呢? ——*因为有三个小的角*。——(实验)如果我把这两个角换换呢(重新排列角的顺序)。——*它会变大一点*。

显然,即使被试在组合一个全新的三角形的角时说出"半圆"这个答案,他们的推测也只是一种思维的方便经济性而做的简单迁移。这种推测本身就是不确实的(例如:弗尔认为一个小的三角形会拼出"比半圆多一点的图形"),而且不止会迁移到三角形中,还会迁移到梯形中(弗尔)。鉴于孩子们认为"半圆"会随着角的顺序变化而变大或变小,这种迁移与发现一个必然的法则仍然相去甚远。

处于亚阶段2B时,儿童认同角重新排列仍然会组成半圆,但这是由于他们的直觉更为强烈,不轻易满足于简单的迁移,因而那么确定每个新的三角形的角都会组成180°。

利普(5;11) 将一个三角形的角拼在一起。"你将得到一个什么图形呢? ——*我不知道。这个*(比半圆大一点的图形)。——那么,看。——*是个半圆*。——那

么那两个图形呢(稍大些的三角形)？——*我认为它们会拼成这样*(比半圆小一点)。——那这个呢(他正在拼的直角三角形)？——*一个半圆*。——为什么呢？——*因为你看得见啊*。——那么如果我把这两个角换一下呢？——*还是半圆*。——那这个图形呢(梯形)？——*我不知道，这个*(半圆实验)。——那这个呢(等腰三角形)？——*一个圆，但不完整*(仍然大于180°)。——看。——(实验)哦*不对，是个半圆。*"

西(6;4)　发现第一个三角形拼成了："*半圆形*。——如果我们对这个(一个大直角三角形)做同样的事呢？——*一样。不对，要比半圆大点儿*。(实验)*不对，是半圆啊*。——那那个(小的直角三角形)呢？——*一个半圆……不对，多一点。*"……"如果我把这个角和那个角换一下地方呢？——*会变小一点，因为是在另一边*。——为什么？——*不对，应该还是一样的*。——那么这样呢(另外一种重新组合)？——*还是一样的。*"

瑞斯(6;10)　"假如我把这个三角形的角都切下来然后把它们拼在一起会是什么形状呢？——*它们会是个房子，因为这是个房子的屋顶*。——用那个来试一下(已经切下角)。——*它拼成了半个气球形*。——(另一个三角形)那么那个呢？——*另外一个房子的屋顶*。——试试看。——*哦！是另一个半个气球形*。——那么那个呢？——*会大一点儿*。"……

比起亚阶段2A来，有所进步。半圆形的答案并不会随着角的组合顺序发生变化(尽管西对这一点有所迟疑)，但是这个组合答案本身却并非是推广到了所有三角形的必然答案。当用第二种技巧实施实验时(例如瑞斯的情况)，角并没有被抽象化，儿童无法回答它们能拼成什么形状。

第十一节　亚阶段3A：开始推导关系

处于亚阶段3A时的答案更为有趣，因为这一阶段儿童开始试图去从细节上想象拼凑角的情形，不再满足于一个通用的预测。这一发展与之前在这一下水平下观测到的其他行为是相符的，尤其是他们对相似性的理解(参见第十二章第三节)，他们在测量三角形(本章第六节)上取得的部分成功以及大部分儿童对线条倾斜角度的关注。此外，实验者已经可以让儿童提前画出他们预想的图形(而非让他们指认已经画好的图形)，甚至可以让他们对每个预测都画一个新的图形。我们从而发现了其中表现出的来自当前角的具体组合与来自前面完成的组合的迁移之间的矛盾。这一矛盾在当前阶段没有得到解决。

查(7;3)　介于亚阶段2B和3A之间，他可以将角抽象化但是对于几何上的组合尚存在困难。他对于三个小三角形的第一个预测以底边为基础（像是三个屋顶）："*哦，它们拼不到一起*。*看*（他让三个角顶点相接，却没法让边重合在一起，因此图形看起来像三叶草）。——你看（实验者将头两个角拼在一起）。——*哦！像块蛋糕！*——现在你来放一下第三个角。——（画出后大于180°，他发现了自己的错误。）——那么那个图形呢（一个直角三角形）？——*有个大的角*（直角），*一个小的角，还有另一个小的角*（画出的图形小于180°，但是等腰直角三角形中他画出了180°）。——看（实验）。——*没错*。——那么那个呢（不等边三角形）？——（画出的图形小于180°）——看。——（实验）*是另一个半圆*。——那么那个呢（等边三角形）？——（画出的图形同样小于180°。）"这说明了他没有进行归纳。

伊夫(6;10)　"我把两个角拼在一起。如果我把第三个角也加上去会怎么样？——（画出三个角，图形大于180°。）——看。——（实验。）*哦！是个半圆*。——那么那个呢（一个大直角三角形，实验者将直角与一个锐角拼在一起）？如果我们把第三个角加上去会是什么形状？——*会斜过来*。（他画了个小于半圆的图形，并在看到实施后修正了他的画。）——那么那个呢（中等大小的三角形）？——（又画了比半圆小的图形，并再度发现了自己的错误）。——那个呢（小的等边三角形）？——*不会是直的*（小于180°）。——（实施。）——*哦！它也拼成了半圆形*。——那个呢（等边三角形）？——*我在看，在想……我还是这样想的：我在看这个和那个*（画出两个角，然后进行解释），*它们都是半圆！*（完成了归纳，但只是暂时的，接下来就不应用这个归纳结果了。）——如果我们把这个图形（菱形）的角都拼在一起呢？——*会更大一点。会是一个圆*。——完成了吗？——*拉掉了一点儿*（他画了个大约345°的角，然后在实验中发现了自己的错误）。——那这个呢（正方形）？——*是个圆*。——你确定？——*不到一个圆*。（实验）*不，就是一个圆*。——那个呢（长方形）？——*会变成一个圆*。——你确定？——*是的*。——那么那个呢（一个大的直角三角形）？——*一个比半圆小一点的图形*。——（实施。）——*哦，对！是个半圆*。——那个呢（不等边三角形）？——*一个半圆*。——*那个呢？——也是*。"

德雷(6;10)　应用了第二种技巧。他试图去想象将一个三角形一类的图形的三个角重新组合后会变成什么样子。向他展示已经被切下来的角之后，他准确地预测出会是一个半圆。"*也许像这样，但我不是很确定*（实验）。——是对的吗？——*那个会是什么形状呢*（直角三角形）？（画出一个大于180°的图形）——是对的吗？——*不是*。——那么那个呢（等边三角形）？——*我不知道*（画出一个大于180°的图形）。——（实验）*不对，又是个半圆*。"在下一个三角形（非常细长的不等边三角形）中他再度出错，但是到第五个三角形时，他画出了半圆形，并说："*总是一样的！*"

萨奥(6;11)　与他的偏小的年龄不相符的是，他很快就掌握了规律。简单地

迁移一个因素的同时,也有证据显示他应用了推理来作为补充。"(实验者拼起直角三角形的两个角)如果我把第三个拼上去呢?——*它会拼成这样*(画出一个大约170° 的图形)。——看。——*文物*(实验。)*哦不对!是个半圆*。——那那个呢(一个大的等边三角形)?——*比半圆小一点。哦不对,是个半圆,因为这个角虽然比那个三角形里的角小一点,但是另外一个角比那个三角形里的另外一个角大,它们抵消了*。——那么那个呢(不等边三角形)?——*是另一个半圆,因为这个角很大,但是那个角很小*。——那么那个呢(菱形)?——*一个圆形,因为它们都一样大*。——那个呢(等腰三角形)?——*一个半圆*。——如果我把这个角换成一个从别的图形那儿拿来的角呢?——*会比半圆大,因为那个角要大一点*。"

尼克(7;1)　"我把这两个角拼在一起。如果我再加上第三个角会是个什么形状?——*一个半圆*。——那个呢(有些类似的直角三角形)?——*比半圆小一点*。——为什么?——*因为那些角小一点*。——看。——(实验)*哦,不对!是个半圆*。——那那个呢(等边三角形)?——*比半圆小*。——为什么?——*因为它们小一点*。(实验)*哦!又是个半圆*。——如果我把这个角挪一下呢?——*它会小……不对,它不会变*。——那么那个图形呢(不等边三角形)?——*也是一个半圆形*。——那个呢(梯形)?——*一个圆,因为它们大*。——那那个呢(菱形)?——*一样*。——那个呢(直角三角形)?——*一个圆……哦,不是!是个半圆*。"

巴(8;0)　"(发现了第一个直角三角形拼成)*一个半圆*。——那个图形呢(小一点的相似形)?——*比半圆小一点,因为它们小一点*。——看一下这个角。——*这个大一点*。——那个呢?——*它大小中等*。——所以呢?——*也会拼成一个半圆*。——如果我把这个角挪动一下(把外围的角换位)呢?——*还会是一个半圆,因为你只是把它们挪了一下位置*。——那么那个呢(等边三角形)?——*会拼成一个半圆形*。——为什么?你这么说是因为你看到了两个,所以你认为这个也会是这样是吗?——*是的*。——那么那个(大的等腰三角形)也会拼成一个半圆吗?——*不会,因为那个角太大了*。——是吗?——(实验)*哦,是的,因为这两个角一样*。——那个呢(不等边三角形)?——*也是一个半圆*。"

克里(8;1)　最终归纳出了规律,每次都回答"*半圆*"。"那么那个图形(拉长的不等边三角形)?——*比半圆大一点*。"不过在这之后,他都回答正确了。

佩(8;10)　在看过了一个比较宽的等腰三角形后,成功归纳出了规律。"*不,它不会是半圆。因为最大的角和之前的不一样了*。——看。——(实验)*哦,是的。因为这个大,但是另外两个角小了*。"之后他的答案与此保持了一致。

由上述的记录反映的推理过程是非常有趣的。与处于阶段2的儿童不同,这些被试如此来推理这些角的组合。一如在第二个技巧中所表现出的样子,他们确实在想象那些练习中从未见过的角的组合结果时存在困难。然后他们基于实物来想象,例如一系列房顶,或者像三叶草那样的尖端对尖端(例如查),或者是一个不规则的形状,比如德

雷画出的重新组合角后的三角形。但是这些都是角重组后的结果或是与处于亚阶段2B的瑞斯想象的房顶一样的答案。当应用第一个技巧时,他们都是先看了一些正确组合的角之后,被要求预测其他的角会组成什么形状,他们的回答与阶段2的儿童存在很大不同。后者只计角的数量并将经验性的发现进行迁移,预期有三个角的图形会拼成半圆而四边形会拼成圆形。在这种做法中,他们在每个问题中都忽略角的大小,这是由于在比较相似或者不相似的三角形时,他们无法进行定量的比较。与此不同的是,处于亚阶段3A的儿童每次看到新的三角形都试图去比较这个角和过去的图形,即使他们已经看过了一个或一个以上图形的角组成一个180°的半圆。因为他们一直在比较角度,所以看似不如阶段2的儿童。这是由于他们不再去猜测答案,而是试图去不规避复杂问题地进行思考(比如,伊夫:"我在看,在想。"这是他拒绝简单迁移的明确表现)。

然而这一最初的思维建构也显现了明显的缺陷,这种缺陷与我们对亚阶段3A的已有认识是一致的(理解了斜度,有了平行的概念,但是还不理解三角形的相似中角度的相同;在测量三角形时,它的高并不被关注)。这些孩子并不认为这些组成三个三角形的角的大小是相互关联的:他们只简单地按照给出的条件把角相加,却并未意识到,当一个角变大的时候其他的角要相应地变小。因而当他们看到锐角、钝角或者直角三角形时,倾向于将注意力主要放在醒目的角上而忽略了其他的两个角。

第二个事实与上述表现作用相反。即对于之前展示的不同的三角形都组成了半圆这一发现的归纳。对于不同的角的专门研究与归纳的结果存在冲突,归纳的结果与这种分析没有关联。因此在亚阶段3A,儿童不满足于只预测半圆这个答案:他们试图去调整他们的预测。即每次都重新组合,而不是像阶段2一样对答案进行简单的迁移。也就是我们再次发现了三角形中的角的互补和互相依赖性的概念。为了向他们自己解释不同的预测,已给出三角形的角会拼成半圆形,而同时他们努力在之后给出的例子中更加有效率地给出答案,儿童开始将他们的注意力转移到之前并未注意的角上。然后他们发现当一个角大于之前图形中的对应角时,那些剩余的角会小一点。不过在这一水平中,三角形的角之间的互补关系还并未被完全总结出来,它只是个在一次次新旧三角形的不断比较中渐渐得出的发现。

对结果的解释有可能由于萨奥略显矛盾的情况而不同,因为萨奥看似像阶段2的孩子一样受到了快速迁移的一定影响,但是与阶段2的孩子不同的是,他发现了互补的规律。("因为这个角比那个三角形里的角小一点,但是那个角要大一点,所以他们抵消了。")[①]在其他孩子中,归纳过程可能是相当漫长的,并且可能会在遇到有一个非常小的角,所以在另外两个角看似直角的三角形时失去作用(在这种情况下儿童推断其和大于180°)。这一事实本身就是,儿童对于角的组合互补关系有所理解的证据,它仍然是归纳的而非演绎的。互补法则作为一个公理,在独立的一次次地对不同的三角形的角的比较中得出。他们还不知道一个拥有三个角的图形的内角之和不会超过180°,这是由于如果这样的话三角形会包含两个直角,它的两边就会平行而无法相交行成一个锐角。

① 参见相似三角形的分析。

直到阶段4我们才会发现儿童对于这一公理的意识。亚阶段3B与3A相比唯一的进步就是,归纳的答案几乎是非常迅速的,而并非循序渐进的。

第十二节　亚阶段3B:规则被概括化

与亚阶段3A相比,亚阶段3B的不同之处在于归纳过程在这一水平完成了,因此它更快地发挥了作用,且几乎不存在迟疑。如果提前看一下阶段4,我们会发现这一阶段仍然没有推论必然性的意识。因此在亚阶段3B上,儿童意识到了规则的普遍适用性,却没有意识到它的逻辑必然性。

盖姆(8;2)　一开始画出了三个角,但是却没能把它们拼合在一起。当学会怎样组合角之后,他预测到了三个角一起会组成"*一个半圆形*"。"对的,猜得对。那么这个呢(等边三角形)? ——(他画了三个角排在一起大于180° 的图形,但他说)*真的是个半圆,但是我没画好*。"他在之后的每个三角形中都将答案预测为半圆形,不过都是通过拼合的方式。

沙(9;3)　在发现第一个三角形的角拼成半圆后,仍然认为一个与前者完全不同的三角形会组成大于180° 的形状,他被锐角误导了。在做实验时,他说道:"*这和前面的一样。这里小一点,但是那里大一点。*"一个拥有两个比较大的等角和一个锐角的等腰三角形,也让他误答为大于180° ,因为他看这两个角非常接近直角(如同亚阶段3A)。然而,在这个例子实际操作后,他归纳出了结论:"*总是一个半圆形。*——那么那个呢(另一个更加细长的三角形)? ——*那个也是半圆形。*"

哈乌(9;3)　在失败两次之后,归纳出了规律:"*会拼成一个半圆。*——为什么? ——*这个角比那个角*(之前的三角形的)*小,但是那个大一点。*——那这个呢(一个很高的等腰三角形)? ——*那个要难一点,它会比半圆多一点。*——看(实验)。——*总是个半圆啊。*——那个呢(更尖锐的三角形)? ——*会是个半圆。*——那个呢(更尖锐的三角形)? ——*半圆。啊,不对,那两个角就能组成一个半圆了,比半圆多一点。不对,总是个半圆。*——为什么? ——*因为这个角*(顶角)*变得更小了。*"

奥格(9;8)　看到直角三角形的两个角拼在一起后,已经可以预测出加上第三个角后:"*会拼成一个半圆形。*——那么那个呢(更大一点的直角三角形)? ——*它会比半圆小一点,因为角要小一点。顶上的角虽然大了点,但是它们拼在一起还是会小一点。*(实验)*哦,不对,是个半圆。因为有一个直角,然后比前面的三角形小一半的这个角被那个角补上了。*——那么那个呢(小一点的直角三角形)? ——*和其他三角形一样:大的角相当于两个角,然后小的角都只有一半。*——那这个呢(小的等边三角形)? ——*也许它也是个半圆:因为都是一样的角*(即角的大小相

同)。——那个呢(一个细长的等腰三角形)? ——还是个半圆,这是因为这两个角里头有一个会比其他三角形里的角小一点,可以把顶上的角放进去。——那么这些三角形也会拼成半圆吗(向他展示剩余的三角形)? ——是的,它们都会这样。"

布罗(9;11) "如果把角挨个拼在一起你会得到一个什么图形呢? ——另外一个三角形。——把它们画出来。——(他把所有的角都画大了)一个圆。——拿着这些角然后亲自试试看。——是个半圆。——那这个三角形呢? ——(他改了自己的画好几次,然后说)半圆。——你是一开始就知道吗? ——是的。——那个呢? ——(他画出的图大于180° ,但是他说)半圆(修改图片)。——那个呢? ——我还不知道……半圆(极肯定)。——为什么? ——我很肯定!"

马尔(10;0) "会拼成一个半圆。——那个呢? ——它会稍微大一点,因为这个角大。(实验。)哦,不对! 因为别的角小了。——(梯形?)——一整个圆。——(菱形?)——另一个圆。——(一个小的不等边三角形?)——一个半圆,因为这个角像是圆的六分之一,其他的角把剩下的补上了。——那个呢(一个非常细长的等腰三角形)? ——比半圆大一点,因为这两个角就能拼成一个半圆了……哦,不对,它们不是直角,然后顶上的角把差的部分补上了。——假如我把边拉长到这么长呢(30cm)? ——还是个半圆。"

在亚阶段3A和3B之间有着完整的发展持续性,对于沙、哈乌来说,存在明显的疑虑,奥格存在一点疑虑。他们在遇到新的问题时,都会从与之前自己已经看到的图形相比较入手。但是这些孩子在两个方面进步了。首先,在询问过程中的某些阶段,他们为每个三角形的角建立了内部的关联性。也就是说,他们以一种互相补充的关系来看不同三角形的内角。因此奥格在比较过程中,为直角三角形的角赋值,然后为不等边三角形的角估值("这两个角里头有一个会比其他三角形里的角小一点,可以把顶上的角放进去。"也就是说最小的角与其他两角之间的差异相等)。这就引出了第二个进步。在当前三角形的角的组合和对过去图形的归纳上,不再像处于亚阶段3A时那样有冲突了。恰恰相反,儿童会认为所有三角形都会拼成半圆的归纳结果本身,会让其产生一种预期而引导他们完成一个新的问题。这一点在盖姆的记录中得到了清晰的体现,虽然他的推理仍旧是不明确的,在查和哈乌下结论时也有一定体现。在奥格、布罗和马尔的记录中,尽管他们存在短暂的疑虑,但对于法则的归纳已经是明确的了。

因此,比较一个三角形内部角的倾向,不会再像处于亚阶段3A时一样,与对之前问题的归纳倾向产生矛盾。他们现在是协调的,这一点从发现了公理"它们总是这样"可以看出。不过尽管这个法则已经被承认,它却还不是逻辑上必然的。目前这个阶段具有了通过角的叠加和协调角和三角形的度数来得出三角形之间相似性的能力。这种固定的操作方式为归纳提供了前提,而得出的广泛结论就是其最大成就。只有到了阶段4时,儿童才会开始意识到一个几何法则的逻辑性成因。

第十三节　阶段4:形式必然性

为亚阶段3B和阶段4设定一个法则,来将二者的界限划分清晰是困难的。我们不能期望所有10到12岁的孩子去证明所有定理(已经在学校学习过这样的问题的孩子不予考虑),这一点是毋庸置疑的。我们只能去探寻一个由“总是”变成“必然”的迹象,这个迹象说明由归纳逐步得出的法则被视为是由一种必然的原因所引发的。下面是几个例子,头两个孩子介于亚阶段3B和阶段4之间,而最后两个孩子,我们认为他们已经具有了进行逻辑证明的意识。

巴德(10;3)　“你能猜出这三个角拼在一起后会变成什么形状吗?——*一个半圆。*——那个呢(等边三角形)?——*四分之三个圆。哦,不对!是个半圆。*——那这个又小又胖的图形呢(钝角等腰三角形)?——*一个半圆。*——为什么呢?——*因为它有一个大的角和两个小的角。*——会有一个三角形它的角无法拼成一个半圆吗?——*不。不会的!*——那这个三角呢(大于180°)?——*它们可以,但是它们不是同一个三角形上的。*——这个图形呢(梯形)?——*一个圆,因为有两个直角,一个钝角和一个锐角。*——那这个呢(非常细长的等腰三角形)?——*一个半圆。*——如果我把它再拉长一点呢?——*它总是个半圆,角都是一样的,只是大小不一样*(对它们总和相等和相似性很困惑)。”

罗尔(10;9)　“(认为第一个三角形是)*一个半圆。*——为什么?——*我不知道。*——那个呢?——*另一个半圆。*——那个呢(锐角三角形)?——*还是个半圆。*——为什么?——*因为这里大一些*(底角),*这里小一些*(顶角)。——如果我们一直把它拉长呢?——*一直会是个半圆,因为这两个角*(底角)*不到直角,顶上的角会把不足的地方补上。*”

杰琪(11;4)　将三个角拼在一起:“*一个半圆。*——这是为什么?——*我说不出,是因为这些角比它们应有的大小要小一点,如果它们是直角……你需要四个;三个角会拼合在一起*(如果它们大于180°)。——那个呢?——*我想不出。*(准备拼角)*是另外一个半圆。我开始觉得它总会是半圆了。三个角你拼不出一个圆,因为你需要比直角大的角*(两个或者三个),*你需要四条线*(边)。——那个呢(钝角等腰三角形)?——*一个大的两个小的,又是一个半圆!我想再试试*(思考中)*用那个*(顶角更加大)。*没错,还是一样的,因为顶上有个很大的角。*——这个呢(锐角三角形)?——*还是个半圆!这两个角不到直角那么大,然后可以用顶上的角补足。两个直角会拼成一个半圆。*——如果我们把它拉长到触到房顶呢?——*它总是一样的,如果线条很直的话。*”

道博(11;10) *“一个半圆。——那么那个呢? ——如果从同一个三角形上拿下来三个角的话,它们总是一个半圆。——为什么? ——我说不上来。——那这些呢(背着他拼起来的三个角)? ——哦? ……但是它们不是同一个三角形上的角。——你怎么知道的? ——(指向一个直角和一个钝角。)”*

很显然这些孩子事先并不知道三角形内角和定理。但是他们独立发现了这一点,不管这些角如何分开,它们之和是固定的,这些孩子发现了这种关系的必然性。从记录中可以看出,他们是否认为这个规则是必然的,因为他们把一个三角形的内角看作了一套互补的图形,然后在此之上发现了这套组合中不能包含两个直角。不过处于亚阶段3B和阶段4之间的孩子表现并不那么好,不能明确认识到这一点,但是他(像这个水平的其他孩子一样)很快发现的,总和大于180°的三个角不可能来自于同一个三角形这一事实,在启发他的整体认识。罗尔韮分析锐角等腰三角形,并说出底角“不到直角”,而距离得出定理更近一步。杰琪意识到了,如果要拼多于两个直角的角的图形,就需要多一条边来闭合这个图形。他同样知道,如果一个锐角等腰三角形的底角都是直角,这两个角就已经可以拼成一个半圆,所以它不可能是三角形。有两条平行的边的话,这两个角就不再需要“一个顶上角来补足它们”。道博也一样,他意识到了总和大于180°的角不能来自于同一个三角形,因为它们包含了一个直角和一个钝角。

孩子们开始注意到这种关系必然性的方式,给予了他们认识直角坐标系(或者是一对一的乘法,参见第七章)和三角协调性(一对多乘法,参见第八章)一定提示。一个有三条边的图形的内角之和,总是等于两个直角之和(或一个半圆),而如果它们的和大于180°的话,这个图形必须有四条边,就会有四个内角,四个内角之和等于四个直角之和。这实质上就是孩子们表达并从中体现出的,他们对于一对一和一对多映射的联系与不同的认识。因此,如果边按照一对一的方式联系在一起,它们会变成一个长方形(或直角参照坐标系)。另外一个选择是把边按照二维模式联系在一起,把每个数值放置在不同的数轴上沿不同的方向分别变化,其中一个数值的增长就相当于两个数值共同增长(后者从顶点出发垂直反方向测量)。这种测量距离的方法产生了三角形。我们看到了在亚阶段3B和亚阶段1B,孩子们用两种垂直测量法以及由角的两边垂直距离去固定区域内的点或是确定三角形底和边的关系。垂直测量被用作解决一系列的问题,孩子们知道自己在解决长方形问题时,是在处理直角问题,而处理角和三角形的问题时,是在确定斜度。通过这种对于两种协调方式的理解,孩子们开始认识到在三角形中遇到的角之和会是矩形中的角之和的一半,因为后者是几组平行线按照一对一映射方式从两个方向延伸组合的图形或组合,而前者包含了斜边,意味着角的两边垂直距离的增大会伴随着与顶点距离的增大,所以这种映射不再是一对一的,而是一对多的。

在第三阶段中习得的推理能力的发展引出了以下问题。演绎成分的特性是什么,以及它是如何让儿童组织自己的思维去估算角度,并让他们相加后形成一个普遍法则,

即三角形内角之和是恒定的？这个问题是普遍的，毕竟有其他很多类似的由经验开始演变为必然推论的例子，仿佛儿童的行为由实验行为开始而延伸到了现实生活中。

如果被试所做的只是单纯地操纵给出的实物，然后提取并抽象其特征以在操作上组合，这很难说得通。但我们先前对于相似三角形(参见第十二章)的研究显示，一个角并不是一个已有的事物，也不是从已有的实际事物或者实际存在的图形上提取出的一部分。一个角是一个由向不同方向延伸的线和一个相同的顶点所组成的系统。它们这种间距渐渐变大的关系，实质上与一对多映射是一致的。角只在有直线存在的条件下才存在，因而就像直线一样，角也不是自然存在的。直线是一种诞生于特定知觉组织或是更高水平的关系，它诞生于指向或是维持一个已有的方向。它不是从物体中抽象出的，它是一个这些动作的结果。角也是在操作前就已经被建构在动作中了，它们不是像热量或重量那样从物体中提炼出的。

即使在知觉角时，被试的行为也存在于建构一对多映射关系中。因此对于知觉一个角的图形的研究，展现了被试在估算一个角时，比较了两条他随机选取的平行直线，一条靠近顶点，一条接近图形上线条的极限，由此两条边渐远的分离会按照比率在两条线之间或长或短，这个格式在任何情景中都会或多或少地具有动态性。在此时这种关系的起点最终采取了用一对多映射进行乘法运算分组的形式。因此无论怎样考虑角的维度，从知觉到思维操作，从视觉估计到成功测量，被试总会有实际的动作，这个动作有着一样的模式，但是却会越来越精确。

因此可以断定加上两个角或者量取一个角或是意识到在相似图片中意识到角的相等总是一步动作，因而是对不断试误或试验的认可。但是实验性的行为在应用到实际物体的物理属性的归纳时，只能有限地进行对应。对于当前的例子而言，不断尝试，进行实验以及归纳可以推演到被试对于物体的行为上，却不能推演到物体本身。因此儿童根据经验习得一个三角形的内角之和不会大于180°或者是“一个半圆”。但是这个经验是出于他们个人的行为而非物体本身。虽然这些行为确实让被试对物体有所了解，因为他们适应了，但是实际上物体只不过是行为的辅助。它被公理完全同化而没有任何反作用：它只在行为本身出现协调障碍时发挥适应作用。当被试成功建构了三角形和内角拼合为半圆之后，他对物体有了一定了解。他知道了存在由宏观实物相互影响所构建的物理空间，知道了还存在一个像是构建三角形和角一样而被这种相互关系构建出的几何空间。物理空间起初与动作空间是没有区别的，但是后者是从开始出现的，它不是决定几何空间的物体的属性，而是被试的动作计划中物体的模拟。

这就是为什么尽管儿童在建构和比较角时的动作开始是实验性的，其中包含了多次我们在早期阶段已经预料到的尝试行为，但是他们还不能得到一个可逆的操作组，像是一个充分且必要的广泛概括，超越了经验的泛化结论来进行答案协调。对于阶段4的操作组的详细说明，自证了从被试行为中提取出的要素必须在开始就出现。不止如此，推出角度会是个推论系统的动作，证明了行为不是随机的。它是来源于协调动作的

需要,这是一切智能活动的共同特点。我们在本章反复展示了建构一个角需要一种特定的协调,不管它是发生在什么水平,是在量的相近性水平,还是度量相等水平。一对多映射是最普遍的协调行为之一。它甚至先于一系列定量行为(比如相似性判断),并且它是一定先于度量量化(例如量取角或者是三角形,或者找到三角形内角之和)。不对称关系的一对多乘法属于八种逻辑思维组织方法,表现为一种非测量形式。[①]

李婷玉译,朱莉琪审校

① 见皮亚杰《类和数的关系》(1942, 第十章)。

第九章　几何轨迹的两个问题:直线和曲线[1]

通过考虑一些其他的形状,我们继续研究角的发展非常有意义,当儿童对欧几里得空间的理解足够详细时,他们就可以通过测量学会建构这些图形。我们考察的图形是轨迹,该图形所有的点具有共同的特征,并且不受图形之外的其他点的影响。轨迹的研究非常有意义,因为如果没有形成基于不断重复的行为或者操作的泛化,儿童便不能够建构这些图形。所以他必须认识到重复再现的规则,这个规则也是算数中几何推理的基础。在研究轨迹时,我们分析了一般推理问题,就像我们研究三角形角度总和一样。本章主要探究垂直、二等分角、圆等问题,因此本章放在角(第八章)和曲线(第十章)的章节之间。

第一节　方法和结果概要

研究两种关系:1)到点A和点B等距点的轨迹是一条垂直于线段AB中点的直线;2)从一个给定点出发,等距的点的轨迹是一个以该点为圆心的圆。

第二个问题介绍了曲线的测量。为了呈现这个问题,应尽可能地采用具体化的方法。要求儿童回答"一群小孩应该站在什么地方,从而使得他们到放玛瑙石弹珠(通常在玩弹珠时当作一个目标)的目标点A的距离都是一样的"。为了游戏的公平性,要求这群孩子到目标的距离都是精确相等的,但是不同的儿童可能在他们决定的需要的点的方式上具有或多或少的不同。

第一个问题可以从三个方法角度中的一个进行研究:1)我们假设一个孩子站在点A,一个孩子站在点B,那么我们应该把目标放在哪里,从而使目标到两个儿童的距离都相等。当儿童不能理解它的一般性时,需要进一步解释,例如需要孩子指出所有可能放置的地方。2)一棵树在点A处,另一棵树在点B处,那么你应该站在哪里,从而到两棵树的距离相等呢?[2] 3)对于最年幼的被试,主试站在或坐在桌子的远侧,让儿童拿上一些弹珠,然后让他们将弹珠放在离主试和自己相等距离的地方。这三个问题经常根据

---

① 与Mlle Ursula Galusser共同合作完成。

② 这个为类似于其他几个,可以用画画的形式展现出来。A和B处的树可以用十字架标记,要求儿童将几个男孩放在中间,通过在距离A和B距离相近的地方做标记。

需要进行重复，从而在尝试激发泛化之前引起自发的泛化。采用这种方式回答问题，要求儿童指出所有可能的位置。假如儿童说这些弹珠在一条线上，那么进一步询问这些点是否是可以摸得着的，这些线能够延长到多远。这些问题对应了《儿童的空间概念》第五章中解决连续性与无限性的概念的问题。

形成直线轨迹的问题，在年长儿童样本中表现出有趣的泛化。因而，并非限定这个问题只是到两个点等距，直线轨迹问题延伸至几个点等距离的形式，例如 A 和 A'，B 和 B'，C 和 C' 等，$ABCD$ 在一条直线上，$A'B'C'D'$ 在对应距离的另一条线上，两条线成直角。那么到 A 和 A'，B 和 B' 等距离相等的点的轨迹在二等分角线上。

不用说，不管什么问题，都要求儿童回答在他所描述的线之外，是否还存在其他的点符合我们的条件。这个检验对于确定儿童是否真正地理解问题非常重要。

接下来观察儿童的反应，阶段1，儿童还没有形成等距的概念。阶段2，出现等距的概念，但是直到阶段3A时，当轨迹的概念同样开始出现的时候，儿童才出现概念的泛化。

阶段1一直持续到4—5岁，甚至在一些个别案例中持续到5岁半。这为距离（第三章）概念的发展以及长度（第四章和第六章）概念的发展提供了有趣的类比。较小的幼儿将距离简单地看作空余的间距，而不是将其看作两点之间对称的关系。所以当物体放置在空余空间时，没有产生距离的守恒。等距概念在这个阶段还没有形成，一点儿也不奇怪，因为距离本身并不是一个稳定的概念。另外，长度的评价最初也是基于终点的，以至于两条线并列放置时被认为是相等的，两条线交错放置时被认为是不相等的。较小儿童不能在起点和终点之间建立联系。同时，这使得儿童不可能进行足够的等距判断，因为他们不能在几个游戏者到各自的目标长度之间建立联系。阶段1，我们发现的结果是，儿童不能理解点A和点B的中点是一个等距点，取而代之的是他们随机指出一个点，没有包括距离的考虑。有时他们尽可能画一条想象的线，表明这个点一定是在 A 和 B 之间的某个位置。对于圆而言，他们简单地将弹珠放置在点A的周围，而没有注意到任何的等距。

阶段2（平均5—7岁）通常划分为两个子阶段，两个子阶段对应于不同的轨迹建构水平。在圆的问题上，处于水平2A的个体不能测量到中心点的距离，而是将“孩子”排成一排或者是一个没有规律的圈，而没有发现每个点到点之间在中心上是对称的。至于直线的问题，他们找到了距 A、B 等距的中间点，这种知觉估计是相当准确的。除了这个特殊的问题，其他问题他们都不能够成功地解决。所以轨迹就被限制在单个点或者是一些临近的点上。有时儿童试着重复他们的行为，但是一般会忘记等距。当呈现了二等分角的问题时，儿童很难发现一个对应两点的中点位置。他们或者寻找两个单独点之间的中点，或者产生不规律的或许多弹珠间距随机的点。所以在这个水平上，一般不能够表现出进行逻辑操纵的能力，儿童看到符合条件的点不会超过1个。

另一方面，阶段2B时，泛化开始出现，尽管是通过行为的一些简单重复进行的，这

也是一种复制同化形式的实证方式,但还没有形成真正意义上的行为的重复。儿童在两个点之间发现等距的点,但是在这些之前会出现与之前水平相符的错误。另外,他们对轨迹有微弱的感觉,但是这种对于轨迹感知的获得需要通过扩展放置中心弹珠位置的方法,或者是通过在一条连续的线上以同样的方向一个接一个放置弹珠的方法。他们没有考虑参考中点,这些点是对称的。存在等距上的随机错误,这些看起来是由于他们过分强调在一个方向上连续,而忽略了返回起始点。

阶段3,最后的阶段,开始于7—8岁,儿童现在发现无穷个点符合等距的条件。这些点形成一条线或是连续的图形。然而,尽管这些点在数量上是无穷的同时是连续的,无穷性和连续性并没有出现在基于更加精练的点的性质的概念合成中,这种合成只是在形式思维阶段(11—12岁)开始出现。这个时候存在技术上简单的无限制的重复,产生从A到B(或者单独A)等距的连续的点。重复非常有意思,因为这是推理的基本形式,通过重复进行推理,这在具体运算阶段也出现了。儿童首先发现许多点是等距的。但是在做的过程中,他们发现每个新的点都是关于线AB的中点或者是点A对称的。这个发展是创新性的也是重要的。在许多次的重复之后,他们试图发现是否存在一个点离中心(或者是已经发现的点)足够远,仍然满足两个点之间等距的要求。如果发现这是正确的,他们便立即形成对于整条线的泛化。

第二节　阶段1:等距的概念没有形成

阶段1的儿童仅仅将弹珠放在给定点的周围,而并没有形成圆的形状,因为他们不能理解等距的概念。他们甚至不能将弹珠放在自己和实验者之间,因为他们的距离概念不是物体间的恒定关系,同时对于长度的判断并没有参考起始点。

瓦尔(4;2)　"将这个弹珠放在你和我之间,以至于它到你的距离和到我的距离一样长,然后我们把其他的弹珠放在它的周围。——(他将弹珠放在靠近自己的地方。)——但是你看,我们都要玩啊。它必须放在离你我都一样远的地方,否则对我们其中的一个人就太容易了。——(他把弹珠放在两个人之间,但是更靠近自己。)——它离你远吗?——*不,很近*。——离我很远吗?——*是的*。——好,把它放在离我们都一样近的地方。——(他将弹珠移动到靠近实验者。)——但是现在离你远吗?——*是的*。——好,把它放在离你我都一样近的地方。——(重新放在靠近自己的位置)……"

西尔(5;3)　"你把它放在……——(他把弹珠放在他的右边,比实验者更靠近自己,并且不在儿童和实验者之间),它是离你我一样远吗?——*它离你更远*。——很好,现在将它放在离你我一样远。——(他把它放在两者之间,但是非

常靠近自己)*现在更好了*(表明弹珠现在在他自己和实验者之间)。——但是它离你和我是一样远吗?——*不*(将它放在离自己更远的右边大概40cm,从而离实验者大概80cm)。——它现在离你我一样远吗?——*是的,一样远*(将弹珠移动到离自己更远但是仍然离实验者更远)。"

圆:"我将把玻璃弹珠放在这里。所有的小朋友(使用他的小伙伴的名字)将把他们的弹珠放在这里。但是他们必须都要离玻璃弹珠一样远。我们应该将它们放在哪里从而所有的弹珠都离玻璃弹珠一样远?——(他放第一个20cm远,第二个放在远端80cm远,第三个放在左边40cm,第四个放在右边40cm处,第五个离第一个15cm,第六个离第二个80cm,第七个放在左边大概1.3m远,第八个也在左边大概1.5m远,第九个和第十个更远。)——对吗?——*对呀,对所有的小朋友都很容易*。——为什么?——*因为*……——这个呢(第5个)?——*它最容易,因为它比较近,它直接到那儿*。——它到那里(第十个,2m)和到那里(第一个,20cm远)一样远吗?——*是的,它可以这样走*(指向从第十个到中点的直接路径)——那个呢(第六个)?为什么你放在那儿?——*因为那里有地方*(再次指向到中心没有阻碍的直线路径)。"

尼德(5;5) 圆:他将这些弹珠形成一个圈放置在A的周围,但是距离不同。第一个面对自己60cm远,第二个背对自己20cm远,第三个在右边50cm远,第四个在左边30cm远。第五、六、七、八个分别在这些点之间,但是到中心的距离不相等,第九、十个距离更远。"为什么第二个放在那儿呀?——*因为它在前面最好*。——为什么那个(第八个)在那儿呀?——*因为那儿有很大的空间*(在其他弹珠之间)。——第十个和其他的靠得近吗?——*不,不对*(把它放得更近一些)。——假如所有的孩子都互握着手,它们会形成什么形状呢?……"

"现在将这颗弹珠放在离你我一样远的地方,我们好来玩它。——(他把弹珠放在右边,远离实验者)——假如我们有许多的弹珠呢?——(开始将它们分散在自己和成人之间的桌子上而没有考虑到距离。)——这对吗?——*我现在知道了,它在我们之间*。(将一个弹珠精确地放在自己和实验者之间。)——我们能放更多的弹珠也让它们离你和我一样远吗?——*不能*。——这个能吗(左边一点儿但是等距的弹珠)?——*不能*。——它刚刚离我们一样远吗?——*不是*。"

轨迹的问题还不具有意义,这是因为儿童不能理解等距的概念。

可能这些儿童中的一个能够相对准确地找到两个点的中点。实验者开始说,"将你的弹珠放在我们之间一半距离的地方。"这可能没有问题,因为直线的中间是一个已经觉知了的概念。这不是由于智商所导致的问题,因为眼动和知觉调整是足够的。但是,当要求儿童在距离实验者和他们自己"同样远"的相等距离处找到一个(或多个)点时我们发现,阶段1的儿童并不认为这个情况最明显是在中心处满足的。对于尼德的记录

是典型的。他尝试每一种可信的解决方式,将弹珠以不同的距离分散开来,然后突然意识到中点是答案,哭着说:"哦,我现在明白了,它在我们之间!"不仅仅是知觉等距的限制使得他只能想到在"我们"之间的一个点是中点,而且也否认稍微在中点左边的点是等距的。这主要是由于尼德能够很好地对距离进行感知判断,但是对于距离没有知识的概念。这对于熟悉第三章给出的事实的人来说一点儿也不惊讶或者矛盾。

甚至对于圆的问题的回应也更加明显。因为儿童被要求将十个点放置在一个弹珠周围,儿童自然就将它们放在不同的方向,以至于最初的弹珠在不规则的圈的中央。一种假设是,一个圆的感知结构如此强烈从而产生了等距,甚至是在没有发现两个点之间的中点的情况下。但是西尔产生的不是一个圆,而是围绕中心随机聚合的点,不像有目标的打靶。他还认为,所有参加游戏的小朋友都有相等的机会来完成目标。假如他们面朝中央并且之间没有阻碍的话,就好像圆周上的点与中心没有关系,半径形成了皆有交叉的直线。因此,等距对于他而言就是所有可能的直线的路径的集合:他排除了一个人可能站在另一个人身后的位置的情况。这是因为他把距离看作为空余的空间(第三章),导致他认为等距就是不论长度,只需要没有障碍的路径。尼德同样也将点安排在围绕中央的圈上,同时他也放一个在前面,一个在后面,一个在左边,一个在右边,然后剩下的空间就是空的了。当问及当孩子们手拉手站在一起的时候会形成什么形状时,他不会想到圆形。就像西尔一样,当他摆放他的圆圈而忽略等距时,专心于弹珠与参加游戏的人之间的间距。总的来说,阶段1的孩子可能对于直线的中点相对熟悉,在感知范围中对圆形也相对熟悉,但是这些知识不能帮助他们发现等距点的轨迹。

第三节　阶段2:理解等距,逐渐发现轨迹

在研究阶段2时儿童做出的反应,我们可以顺着儿童如何通过距离的泛化来掌握"轨迹"的概念的过程一步一步往下探索,首先注意到给定的两个参考点之间的中点,或者是注意到对于只给定一个点的十字形的结构。在后面的案例中,假如孩子给出一对点的话,都可以隐约发现等距的足迹。首先以一个阶段2的子阶段为例,此时还没有形成泛化。

祖尔(4;6)　要求找出一个点离实验者和自己的距离相等,选择中点。"还有其他的点离你和我都一样远吗?——*没有*。——试着找出更多的来。——(他把弹珠靠近他发现的木桌表面的中点标记。)——这对吗?——*不对*。——还有其他的地方吗?……"

两棵树:他把第一个男孩放在中点,"还有其他的地方吗?——(将其他的随机放置。)——都对吗?——*没有*。"所以等距对祖尔而言就只在中点。其他的放置是

随意的，因为他们对于实验者的指导语只是顺从的一个手势，而缺乏完整的理解。

马尔(5;3) “现在我们都要玩那个弹珠，为了保持公平性，要将它放在离你和我都一样远的地方。——(他在实验者和自己之间画一条线。)——是那里吗？——(离他自己太近)哦，不，*在这里，这里才是对的。*——你怎么知道？——*它在中间。*——看，这里还有一些弹珠，你把它们放在离你和我都一样近的地方。——(它放了两个在之前弹珠的两边，然后碰了一下它。)——你能放下更多的吗？——*不能，没有空间了。*——这些点行吗？(两个点都离自己和实验者一样近，但是离中点有点远)——*不，因为它是这样的*(指示弹珠到玩游戏的人之间的线)，*而不是这样的*(游戏者之间的直线，他想了一会儿之后把开始的两颗弹珠拿走了，只剩下中点的一颗)，*这个是对的。*——*它在中间。*”

两棵树A和B：他在两棵树中间画一个点，并在每棵树和中间点之间再各画一个点。然后指出分割A和第一个标记点之间的距离，同时指出第二个说：“*它在中间。*”然后他指出从B到中间的距离，并且指向第三个点说：“*这也是在中间。*”最后他指向第一个点说：“*这个真的是中间。*——我们能放其他更多的弹珠，以至于他们离两棵树都一样远吗？——*不，已经没有其他的空间剩下了。*”

圆形：实验者在桌子中央放一个弹珠，然后告诉他，将男孩们放在弹珠周围，以至于它们离弹珠的距离相同。马尔将9个男孩放在中心的一边，几乎在一列直线上，另外6个男孩放在中心的另一边，几乎与之前的线平行。还加了几个放在中央的右边，与两条线的距离相等。“它们都与中央的点相等吗？——*是的，这个*(一列的中点)*更好，它直接接近。*”

卢克(5;9) 与马尔的水平相近，他把第一个弹珠放在自己和实验者的中间位置，第二个弹珠放在1/4处，第三个弹珠放在3/4处，“这样对吗？——*是的，这个*(第二个)*离我一样远，那个*(第三个)*离你一样远。*哦，不，错了。(他移走弹珠，把它们一个挨着一个放，间距大概15厘米远，将它们紧紧围绕在中点。)”让他将男孩们放在离两棵树的距离相等的地方，他将这段距离大概分为5个间距，但是倾向于靠近中点，因此距离树之间具有不同的距离。然后实验者放置了两列树，ABC、$A'B'C'$，对应成直角。告诉儿童，标记每一对树的相等距离的地方。他将第一个放在C和C'大概中间的位置，例如等角分线上。但是剩下的被放在了围绕在这一个点周围，7个点形成一个紧密的圆圈，就像第一个问题一样的解答方法。

圆：他将6个弹珠放在接近离中央相等的距离，但是没有意识到将它们形成一个圆，因为它们隔开了，之间的间距也故意保持相等。

赫尔(5;8)做得更好。除了中点，他发现超过两个等距的点，不管是对于中央位置，还是对于自己和实验者之间。但是他另外以相等的间距放了第四个和第五个弹珠，一个在自己的右边，一个在实验者的右边。不再有两个游戏者之间等距的点：“为什么你将他们(第二个和第三个)放在这儿？——*一个在左边，一个在右边，*

它们都是等距的。——这两个呢(第四个和第五个)? ——*它们的距离一样长,而且只有这一种方式还有地方。*"弹珠之间的间距最终比它们相对于游戏者之间的距离要占据优势。不断地重复在弹珠之间产生固定的间距,尽管这不是必要的,并且确定与轨迹的连续性矛盾。这种想法受到游戏者之间的间距以及放在中点的第一个弹珠的影响。

圆:开始不规则地放置在中央的周围,然后才开始接近相等的距离。

杰克(5;3)　比赫尔做得好,尽管他开始放一个在中点位置,然后放置另外的4个在中点的左边,有规则的间距但是靠得很近。然后他把一个放在右边。"假如你有更多的弹珠,你要放在哪里? ——*我要沿着这里*(指向中点的左边)。——但是它们必须是离你和我一样远。——*所有都沿着两边。*"从表面上看,这是一个有深远意义的泛化过程,但是接下来的询问证明了,他的回应只是他之前回答的固着的一个延伸,没有考虑到相对于游戏者的等距。本应该放在A和B之间等距点的弹珠,第1个、第4个、第5个并没有等距,尽管是在A和B之间(第四个离A更近,第5个离B更近)。

圆:前四个弹珠形成一个十字形(第二个比第一个更接近中央,但是这已经做得很好了)。但是第五个放在了两个弹珠之间并且更加远离中央,剩下的弹珠都以同样的方式和同样的间距放置以至于圆变成了椭圆。其他的弹珠放置得很不情愿,因为留下他自己,如果按照杰克自己的心意,会在第五个时就停止了。

李(5;7)　要求在两个游戏者之间放置等距的弹珠,一开始放置一个,靠近他自己,然后把它移到中间:"假如我给你更多的弹珠,让你放在离你和我都一样远的地方呢? ——*像这样*(他开始建构比如7531246这样的无意识的数字上的对称的序列)。"他对于两棵树的问题的解答也是同样的方式。李靠近阶段2B的水平。

关于圆的问题,弹珠宽松地放在圆心的周围,但是后来他提出来,用有规则的测量来保证等距。

卫(6;4)　像李一样的中级水平,他成功构建了6个离游戏者等距的序列,同时在形式上接近对称。但是当呈现两列游戏者时,ABC和$A'B'C'$形成一个直角[①],他仅仅标记了C和C'之间的一个点。然后他像卢克一样,将其他的放在这个点周围形成一个圆。实验者提示了一个较远的点,但是离配对点的距离都相等,他理解了:"*我知道了。*——好,继续。"但是他把弹珠放在等分角线的垂直线上,而不是沿着它放置。

接下来的例子属于子阶段2B,已经出现的进程进一步推进,最后对在轨迹上所有位置的等距点都能够进行概念的泛化。

① 问题在这里是以弹珠和游戏者呈现的,但是画的画是与之前采用的两列树的形式是一样的。

派(6;10)　开始就像阶段2A的儿童,他将四个弹珠以一条线放在自己和实验者之间:“假如你只有一个弹珠呢? ——*我要放在中间,这样对于我们而言都是对的*。——其他的怎么办? ——(这时他将弹珠以有规律的间距都放在中点的右边,但是离游戏者都是等距的。)——你可以放到多远啊? ——*这就像一个队伍一直到桌子的边缘,然后就足够远了*。”这样的描述清晰地说明泛化的开始。

关于两棵树的问题,弹珠最开始都放在离一棵树较近的地方,“它们都离两棵树足够远吗? ——*不,在中间最好*。——*其他的呢?* ——*很近*(把一些弹珠有规律地间隔放置)。——哦,你可以一直这样每次放得更远。”这里也表现出泛化的例证,尽管这次并没有对称,只是在单独的一边。

关于圆的问题,他以椭圆的形式将弹珠放在圆心周围,但是所有的弹珠都靠得很近。

杜布(6;8)　将男孩们放置在两棵树之间等距的位置:“*在中点*。——下一个呢? ——*在下面*(保持等距)。——再下一个呢? ——*在那个下面*。——然后下一个呢? ——*继续*(将一些弹珠等间距地放下,并且都很靠近)。——一直到多远啊? ——*到这张纸的最后*。——它们还是到两棵树之间的距离都一样长吗? ——*是的*。——假如我们有好几页纸呢? ——*我们可以继续放小孩*。”至此杜布接受了提示,但是他对于这个问题的泛化还只是在停留在一边。

查夫(6;0)　认为在两边都可以。开始,他将弹珠有规律地间隔放置在他和实验者之间。然后,在两棵树的试验中,他把一个弹珠放在中点,另一个在它下面,另一个在它上面,都保持等距。“假如我们放更多呢? ——(他继续在两边延续这些序列。)——我们能否在这些间距之间再放一些呢? ——(他开始这样做,然后说)*不可以,那可能碰到这些点,以至于看起来就像是一样的点*。”这里具有泛化和对称性,但是没有连续性。

皮勒(6;10)　对两棵树的问题,他也开始以相等的间距在A和B之间放置弹珠。然后使它们等距。调节它们之间的间距,并且在中间插入一些其他的弹珠。“假如你继续,会发生什么? ——*开始是一个一个的,后来就是一条线了*。——在这之后继续呢? ——*它会走得很长,但是没有那座山远*。”

关于圆的问题,他将6个放置正确,然后说:“他们将成为一个圆。”

依格(6;8)　关于两棵树的问题,他将一个标记在中间,然后说:“*我要将另一个放在他的旁边*(继续以不规则的间距)。——你要以什么样的形状结束呢? ——*一条线*。——能够到多远? ——*到桌子的边缘*。——然后一直到草地上? ——*是的*。——会更远吗? ——*会,一直到最后*。”这个例子通向了阶段3。

通过前面的例子,我们可以看到泛化的不断推进。我们的第一个被试祖尔,等距的概念只停留在中点上。依格明白了线的连续和无穷概念。尽管发展是连续的,但是阶

段2的两个子阶段之间存在一些停滞,只有在后一阶段我们发现"尝试-错误法"产生了自发的泛化。

第二阶段开始标志着等距的发现。这样的理解,在第三章和第四章中谈到的距离和长度发展的概念上有其源头。但是一个点到另两个点*A*和*B*等距的几何学轨迹是线*AB*的二等分垂直线,我们最小的被试只指出了中点。祖尔在实验者的提示下,在桌上放了更多的弹珠,但是这些弹珠放置的位置太随意(例如,他将一个弹珠放在桌子上的一个标记上),从而可以很明确地表明,对于他,等距点只能局限于中点。如果我们对于阶段1的反应牢记在心的话,一定会觉得这些是自然反应。等距的发现太靠后,概念本身太不稳定,以至于不能进行泛化。那么泛化随后如何出现呢?

概念的首次扩张表现在许多儿童的反应上,他们看起来认为中点包括数个位置,所以将一些弹珠放在靠近中点的位置。虽然这几乎不能够看成是泛化,但是这也是在向泛化移动。因此,马尔放了两个弹珠紧挨着中间的弹珠,卢克最终放了15个弹珠围绕在中央的周围。对于他们整体的行为的研究表明,这些反应的出现有两个原因。尽管两个原因互相影响,但是还是截然不同的。首先,儿童缺乏点的概念,对他们而言,中点不只是一个点而是一个区域,因此认为在一个点上可以放置许多弹珠。然后,他们移动弹珠(马尔),或者推动弹珠(马尔、卢克),让它们紧挨着。他们让弹珠彼此靠近的事实,让我们对背后的原因想一探究竟,因为当存在泛化的时候,弹珠的摆放位置最开始就是不变的。第二,儿童成功的行为可能会不断重复。这标志着泛化的第一步。被试发现中点到两棵树或者两个图形之间的距离相等,相信复制同样的长度,他能找到其他靠近的等距的点。由于重复最初动作的趋势缺乏操作性,儿童很快就复制他们发现的间隔,从中点开始,或者是从其中一棵树或一个图形开始。这种行为表明了真正的泛化,尽管他们忘记了点必须从A到B都等距。所以,马尔在解决树的问题时,以相同的间距放了许多的弹珠,尽管它们到树之间的距离完全不相等。它们叫作放在中间而不是真正的中点,这表明泛化真正存在,虽然在实现的过程中存在错误。卢克也做了同样的事情,同时也表现出错误泛化的共同例子,他放了三个弹珠在两个游戏者之间,分别是两游戏者之间1/4,1/2,3/4的距离。

接下来的一步在赫尔身上得到体现。他也重复最初的动作,但是赫尔意识到了真实泛化和错误泛化的差别。赫尔将第二个和第三个弹珠放在离第一个弹珠相等的距离,同时与两个游戏者之间等距。但是第四个和第五个弹珠放在离中点等距的地方,而与两个游戏者之间的距离不相等。就像马尔和卢克,赫尔也简单地重复了之前的动作,也意识到了间距,但是与马尔和卢克不同的是,他知道什么时候是正确的泛化(它正好离两个游戏者都等距),什么时候是错误的泛化(它是等距的,而且也只有这一个位置是等距的)。

在杰克身上,我们发现了直接的和正确的泛化,但是泛化是不完整的。他从根本上讲是在重复最初的动作,但是他可以预先考虑到弹珠和游戏者之间的等距,而不是先放

弹珠然后形成判断。这个过程是如何达成的？这仅仅发生在两个竞争者的问题上。当被问到关于两棵树的问题时，杰克的反应仅仅停留在更早的水平。他放置的点是有规律的，一个在中间，其他的到两棵树之间的距离不相等。所以泛化开始于动作的重复。在这个阶段，重复是普遍的，因为最初动作的最明显特征，就是不断被重复。在随后的阶段，这些特征可能消失，只留下等距的特征，所以重复最初的动作为后来完整的泛化和推理过程做准备。我们所有的年幼被试都重复了他们最初的动作，他们还在拥有的弹珠之间保持不变的间距，虽然在这个问题上并不需要对称，因为仅仅只需要在相关的游戏者之间保持等距就可以了。因为这个特征太过明显，他们通常会忘记等距。仅当被试能够在其他所有可以被重复的动作特征中，选择那些需要被泛化的特征的时候，泛化才真正发生。处于杰克水平的孩子，就可以在一些案例中做出选择，但是在另一些例子中不能，比如两棵树。因此等距的泛化意味着选择的预先行动，能够指导泛化的活动。

通过李，我们发现对于最初动作有选择的定向重复。行为的整体重复已经出现，李在相等的间距放置弹珠，然而这时出现了距离游戏者和树之间的等距。甚至更加明显的是，我们发现对中点的对称性的认识，标志着下一个子阶段开始。

在水平2B，主要有三个方向的发展：1）对称的泛化；2）泛化导致的无穷的概念（在二等分线的任一端）；3）也是最重要的，渐渐表现出连续性的泛化，开始逐渐减少弹珠间的或者点与点之间的间距，然后逐渐在间距的空间中插入其他弹珠。这些泛化的概念都是相关的，并且是逐渐进行的，所以在我们的试验中可以细致地跟踪他们的发展。

派最开始看起来属于水平2A，比李的水平落后些。所以派开始是不正确的，只完成了一边的摆放。另外他依然按照有规律地间距摆放弹珠。但是他表现出更好的洞察力，发现最终可以无限延长下去，直到桌子的边缘，随后每次都延长更远。最开始动作上的重复变成真正的重复。杜布达到了相似的水平，但是并没有最初的试误，并且泛化在一个方向上马上形成。查夫最开始能够完成对称，意味着在两个方向上都形成了泛化。查夫甚至更明显，当他开始按照规律的间距放置弹珠后，接着在间距中放置其他的弹珠，尽管没有完全连续性地放置。派从最开始相等的间距后，一步一步完成了连续性。最后，依格在没有相等间距的情况下表现出泛化，并且毫无困难地设想到了连续性和所有方向上无穷重复的可能性。

关于圆的问题的泛化也与此非常类似，只是在内容上不同而已。在水平2A阶段，最开始儿童使用相等的间距，但随后忘记了需要与中心之间保持等距（马尔和杰克的一部分）。一致性在这个阶段不能完成（卢克、杰克的十字架、李等），但是在阶段2B上逐渐掌握（从派到波尔）。

但是当轨迹是在直角的等角线上的时候（意味着两棵树的问题已经泛化了，同时开始处理两列树的问题），无论是水平2A还是2B都不能成功。所以比起卢克的解决方案，卫做得还不够。所有被试都将他们的弹珠围成一个圈，尽管后来卫将它们摆成一条

线,但是这条线依然与二等分线垂直。在直觉水平上,这个更难,因为它提出了逻辑乘法的问题。虽然加法和乘法的操作在难度上是相等的,但是在直觉上却不一样,因为加法很简单,只需要动作的不断重复。

当问题没有包括乘法关系,动作的重复最后在水平2A时变成了有选择性和导向性的。因为重复是累积的,而不是赘述的,它产生了一种特殊的泛化。重复后来便加倍发展,在任何点上都发现线的对称延伸,在间隙中放入弹珠保持连续性。所以在水平2B,儿童对于几何学轨迹有了实际的理解,只是在他们还没有掌握点的形式概念时,会感到有一定的困难(见《儿童的空间概念》第五章)。

轨迹的发现标志着,通过重复的一种推理类型的出现,同时也标志着重复具体运算阶段的到来(阶段三)。用一般的术语表达,重复推理通过以下形式进行,在一个给定的结构中,假如两个相邻的点满足相同的条件,那么这些条件将符合这个结构中的其他点。

这个论点在圆的问题(到给定点等距点的轨迹)以及直线的问题(到点A和点B等距点的轨迹)上进行了例证。需要注意的是,在水平2的儿童,当面临这些问题时,应该只需要很少的预实验程序。然后,通过重复发现一两个点,这些点实际上到点的距离相等或者到两点之间的距离相等,他们很快泛化这些等距点到包括所有的圆上的点和直线上的点(在他们具有准确的点概念之前的很长时间,例如,没有正式地识别连续性之前)。这表明,通过重现的基本规则的推理,随后自然而言发展循环或者动作的定向重复。

这个发现与认识论有一些关系。庞加莱(Poincaré)坚持认为,循环是一种非常特殊的推理,特别是对于数学而言。根据这个观点,这种类型的推理依赖于前瞻判断的完整综合体,特别依赖于纯数字的直觉。另一方面逻辑学家认为,重复是序列的自然产物,序列产生于"继承法则",继承的东西总是从一个条目向另一个条目转变。当前的研究支持后面的理论,只要儿童几乎能够用直接的或者有选择性的方式重现发现等距点的行为,他们就能在这种重复下不确定地继续,从而确定等距的保持。我们可能还需要认识到,重复的掌握没有表明在其他的连续体上有同样的灵活性。

可能会有这样的争论,这种行为是固着(perseveration)的一个例子,根源是节约思维资源,例如预测三角形角度之和(第八章)。可以用两个理由否定这种假设。首先,这些儿童完全不能够在没有试误的情况下进行概括归纳。只有正确的选择才能得到正确的解答。那些与几何学轨迹的详细阐述有关的最初动作的特征被保留了下来,而那些偶然性的,就像是两点之间间距相等的特征就被摒弃了。第二,存在很长时间的直觉试误的阶段,通过阶段2B末尾的发现导致了重述和推理的发现。这种获得是逐渐的,但是也非常快地达到操作性水平,因为在阶段3开始时,儿童能够在他们的最初回答中预料到答案的完整概要。

第四节　阶段3：对“轨迹”直接的和操作性的建构

在整个阶段3的过程中，包括水平3A，儿童从一个正确的预想开始，可以概括出等距的关系。毫无疑问，仍然有很多实验发现，那些特殊的轨迹有可能形成。但是从来不需要怀疑，发现的这些点有着某些共同的特征。大概在7岁或者8岁的时候，儿童可以掌握具体的操作以及那些可逆化过程。因此，儿童现在可以选择假设回答问题，并且相应地，采用预期的假设指导他们的行为。

皮雷（7;0）　关于树的问题：“*在中间*。——让我们放另一个小朋友。——*那里*（上面）。——其他的呢？——*那儿*（下面，没有其他更多的提示，他继续在两个方向上画一系列的点）。——我们能够到多远？——*直到这张纸的边缘*。——假如我带更多的纸呢？——*我们能够到达它的边缘*。”

两个竞争者：“*它们会形成一条线*（画一系列离散的点）。”

米克（7;3）　“我们想这些小弹珠离你和我一样远，我们应该把它们放在哪里？——*在中间*。——其他的呢？——*我们能够继续在更远的地方放它们*（放1、2、3、4在右边）。——我们能够到达多远？记住，它们必须总是在到达你和我相同的距离。——*这个世界的尽头*。——另一边呢？——*好*（放5，6，7）。*到达世界的另一边*。——假如我在一架飞机上往下看，我能看到什么？——*假如我把它们靠得很近的话，你能看到一堵笔直的墙*。”

两棵树：相同的回答，但是对称是直接的。实验者指着一个较远的点，问道，“那个点到两棵树之间的距离相等吗？——*好，看*（在点和树之间画线表明两根线是相等的）。”

实验者呈现两列呈90°角的树，均匀放置，“现在我们想所有的弹珠离这些每两棵树都相等（指明这些树是配对的）。——（他首先放两个点，一个在X上，一个在Y上，例如，$XC=YC'$。）——但是这些小朋友他们玩的是同一个弹珠，而不是两个。——*哦，好*（他放一个点，以至于离两棵配对的树的距离相等）。——我们能多放些吗？——*我能一直放下去*（在等角线上放了一系列的点）。——另一边呢（角的顶点由6棵树构成）？——（他放了一些弹珠）*好，无论这个小朋友转身走多远，我们都能很容易地将它们放在等距的位置*。”

圆：他首先在点A周围对称画出两条直线，然后大声说：“*哦，这不是相等距离的射击*，（然后他开始成对放置，等距并且对称放置在中点的两边，在放到第三对的时候停下了）*一个圆*。”

梅尔（7;3）的回答几乎是一致的，但是在开始的二到三个是错误的，对于两个

竞争者,他在中点的每一边放置3个弹珠:"*假如我给你许多弹珠呢?我能够得到一条长长的直线,就像这个世界一样长,假如我有许多弹珠的话。*"

两棵树:他再次回答说和世界尽头一样长。形成直角的两列树,每一列由8棵树组成。他首先放了一颗弹珠与第一棵和第二棵树之间距离相等,然后放置一颗与第二对树的距离相等,继续放置一颗弹珠与第三对树之间距离相等。然后他另外放了两个弹珠靠近最开始的两棵树而没有注意到等距,但是他自己发现移走了它们。"我们能够放更多的吗?——*不能*。——这里怎么样(在等角线上远处的一个点)?——*是的,当然可以,我们可以放更多的弹珠在这里*(指向等角线上部)。——那么在另一边呢?——*嗯,那边也是正确的,太好了。*"

圆:他开始时画出两条线,但是立即改正它们为一个圆。

恩特(7;9)　对于两棵树,立刻能够画出一列点,对称地放置在两棵树中点的两边。"会有更多的点吗?——*那里都是*(指向一条直线)。*你可以把它们放置在一条直线上,直到这张纸的边缘。*——假如这些是平的弹珠,我们可以把他们叠在一起,那么它们还和这两棵树之间的距离相等吗?——*是的,我们可以建一堵墙到天上。*"

呈直角的两列树,三颗弹珠沿着等角线放置:"假如我们从飞机上看它,它像什么?——*一条线直到这张纸的边缘*。——另一边呢?——*一样*。——有多远?——*你想要多远有多远*。"

米妮(8;2)　首先放置14个弹珠,都离中心点A的距离相等,然后说,假如这些孩子手拉手的话,它们会形成一个圆。

对于两个游戏者,他首先放置一些弹珠,然后得出它们会形成一条直线。对于两棵树,他有同样的回答。"那么他能继续到达更远吗?——*可以,他想到达多远就有多远。*"

呈直角的两列树,在一些小心尝试之后,他说:"*我所要做的是画一条直线,然后我就不会错了。*"

赫尔(8;6)　对于两棵树的问题,在一些小心尝试之后,他继续飞快地、没有停止地确保正确。"当保证离两棵树之间距离相等的情况下,你能到达多远?——*直到世界的尽头*。——有多少点你能放?——*它们形成一条直线。*"

对于圆,放置了一些点,然后注意到了:"*这是一个圆。*"

在这个阶段,所有的回答都是类似的。阶段四也是一样,只有一个孩子表现不同,他指出一个更加精炼的几何学上点的概念,在其他地方也提到了(《儿童的空间概念》第五章)。

金姆(11;9)　关于两棵树的问题,他注明了一些点,然后说,"*这是一条直线。*"对于两列直角的树,他测量了最开始的两个点,然后说,这在任何地方都是正确的,只要它是在两个不同的方向的一条直线。

我们注意到,从阶段3A开始,我们的被试对比阶段2的被试有着两处新的发展。首先,具有立即概括等距关系的能力,从而在一条直线上包括所有的点,看上去是连续的(在这个阶段,概念在多大程度上被理解还很难说)、无穷的。这个行为可能被叫作"重复的立即推理"。第二,发现了较简单问题的解答,他们扩展以及应用到了呈直角的两列树的问题上(在水平2B时还没有解决)。

第二个发展似乎表现出在操作结构上的一个转折点。假如儿童设置的到达A和A'点相等距离的点形成一条直线(研究逐渐发现,在水平2B时已经形成了),那么儿童能够处理点B和B',C和C'等同样的问题就不言而喻了。相同的直线能够满足所有的配对点的情况,那么必然能得出刚才的结论。然而这个问题在阶段2时并没有得到解决,主要是有两个原因。第一个障碍就是知觉方面,推理在这个阶段还不能进行操作。他们需要建构的线既不平行于列ABC,也不平行于列$A'B'C'$;而是在两列之间的等角线上,这就导致了更大的困难(参见《儿童的空间概念》第六章第一部分)。然而最基本的困难摆在面前,答案是一条线而不是三条线。它包括关系之间或者逻辑乘法之间的交互行为,因此这些年幼被试茫然不知。不能处理这些操作证明了,他们的答案仍然是靠直觉的,还没有完全操作化。阶段3,这个问题被非常容易地解决了,因为它经常被放在只有两棵树的问题之后。

但是同样地,这个阶段最重要的成就是通过重复进行推理,不再是冗长的试误的结果,而是采用形成预期系统的方式确保泛化。在系列中,儿童先简单地决定了一些点,然后迅速地总结出所有的点是在一个圆上或者一条直线上的,对于整个系列而言,能够将毗连的点都联系起来。这样的儿童仅仅是达到了具体运算阶段的水平,使得他们能够用测量决定哪些点到达点A的距离或者是到达点A和点B之间的距离相等。然而他们概括了这些系列上等距的所有的点能够形成一条直线或者一个圆,并且能够感觉到他们对于数学推理的内在需要。这是最重要的也是预想不到的研究结果。结果证明了,通过重复进行的推理是操作不断重复的结果,就像第三节中所讨论的,尽管重复本身是具体到数学操作的,因为对于逻辑重复的次数仅仅对应于同义反复。但是这也证明了那些能够重复的操作,不仅仅在水平上,同时在类型上也与经验的或者归纳性的直觉之间存在差异。尽管从历史角度看,操作是一个发展中直觉知识的终极状态,具有所有这些终极状态的可逆均衡特征。从心理学上讲,这个发现非常重要。本章所讲到的几何学轨迹的发现,是阐明从经验性的和直觉性的归纳到操作概括化的演绎直接转变的最好例子。终极状态是通过重复进行推理,这个辉煌的数学演绎模型是由数学家儒勒·昂利·庞加莱(H.Poincaré)详细说明过的[①]。

程南华译,朱莉琪审校

① 这个转变在这里比在三角形角的总和问题上发生得更早,在那个问题上,完整的掌握延迟到阶段4。

第十章　圆、机械曲线和复合曲线的表征①

在上一章中,我们明白了最简单的曲线(圆)是如何建构的。但是我们采用不止一种方法详细描述儿童如何理解这些形状,因为只有在最基本的运用中,儿童才能够获得轨迹的概念。为了更加深入地学习圆和其他更加复杂的曲线,我们需要运用一种比研究等距更加直接的运动直觉知识。特别是被称之为"机械曲线"的曲线。这些对于希腊人而言非常有名,但是却反常地被欧几里得几何学遗忘了,因为他们不能通过尺子和圆规画出来。在这一章,第三部分的最后一章,我们研究儿童如何学习理解以及建构圆、螺旋形和摆线。后两种曲线的研究为我们提供了更多的有益信息,使我们开始对圆的调查研究达到更深的层次,这些问题在形式运算阶段之前不能够被解决。因此该研究在几何学泛化领域对应于三角形的角之和的研究(第八章)。涉及螺旋和摆线的问题,需要儿童达到形式运算阶段的水平,因为它们包含两个参照系而不是一个。假如一个圆柱缓慢地围绕轴旋转,一只蚂蚁需要爬完全程,一直坚持,无论顶部还有多少比例的路程,整个的运动就可以描述为螺旋。相似地,假如我们将一个灯笼(lantern)或者是一个红色的圆盘(disc)依附在一个运动的车轮上,灯笼或者圆盘就描绘了一个摆线轨迹。儿童预测最终将呈现什么样的曲线,他必须心里同时结合蚂蚁的直线运动和圆柱的圆形运动,或者是红色圆盘的圆形运动和车轮的向前运动。在任何一个例子中,我们有两个同时发生的运动,每个运动都必须参照它自己的坐标系。为了刻画整体的运动,观察者必须确定一些点,然后从它们当中进行概括,就像在第九章中轨迹的例子一样,但是这个问题更加困难,因为它需要两个分离路径的综合。

第一节　方法和结果概要

询问儿童一些问题,这些问题彼此之间不是很相关,但是这些问题设计的初衷,是为了能够让实验者从儿童的回答中推理出,儿童到底能够建构曲线到什么程度,这些曲线起源于简单的旋转运动(圆)或者是来自于两个同时发生的运动的组合。

问题1　一个木制圆盘绕着它的轴旋转,圆盘用针别在一张纸上,大头针穿过它的中心。一支短铅笔固定在它圆周的一点上。让儿童预测当圆盘旋转的时候,铅笔将画

① 与 Mlles U. Galusser., J. Nicolas 和 N. Bellière 以及 M. R. Mallet 合作完成。

一个什么样的图形(例如,一个圆)。

这个实验可以有几个变式,比如铅笔固定在正方形或者三角形的一个角上,这些形状都绕着轴旋转。

问题2　圆盘竖立放置,在桌子上滚动,铅笔在一张垂直于桌子的纸上画出它的路径。当铅笔固定在a)圆周上的一个点,b)圆盘的中心,c)中心和圆周上点之间的任何一个点时,被试需要预测线的形状。这个问题就包括三种可能的摆线图形:a)一连串的环(图4),b)截去一段的环,c)以及直线(少数情况下)。

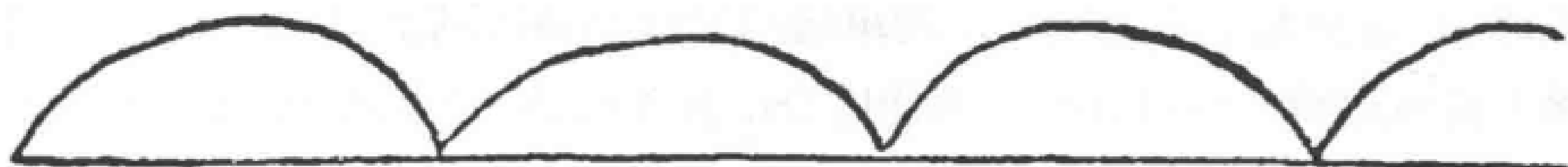


图4

问题3　一个木制的圆柱沿着它的轴水平方向滚动。告诉儿童一只蚂蚁正沿着滚筒爬行。蚂蚁爬行伴随着墨点,因此我们可以跟踪它在滚筒上的爬行路径。实际上,整个圆柱覆盖一张白纸,路径通过一只安装好的铅笔画出来,安装的铅笔使得它能够沿着滚动的滚筒的最上面部分往前运动。儿童必须预测蚂蚁的路径,a)当滚筒是不动的,铅笔向前运动(例如一条直线);b)当蚂蚁或者铅笔是不动的,而滚筒旋转(一个圆);c)当他们都同时运动(一个螺旋)。在最后的情况下,相对速度可以根据需要进行变化。

问题4　之前的问题有它的复杂性,被试不只是重建一种复合的运动,而要想象当纸打开之后或者在一个平面上展开之后,纸上面的图案看起来像什么[①]。虽然在实际中,分开这两个因素也是有可能的,但是它包括另一个问题,虽然这个问题更简单,但影响着复合运动的重新建构。被预测的形状是一系列的曲线,从直线到指数曲线,依赖于两个运动的相对速度。装置包括一块小的矩形木板,上面有一条平行于短边的凹槽,这块木板沿着长边移动,例如沿着长边的延长方向,一个玩具蜗牛沿着凹槽移动。蜗牛装备了一支铅笔。要求儿童预测蜗牛的路径。正确的预测应该是,当木板和蜗牛以同样的速度移动时,路径是一条斜线,但是相对速度可以随着情境需要进行变化。

问题5　在之前的蚂蚁在旋转式的圆柱上移动的问题中,儿童可能被问到假如蚂蚁沿着旋转轴移动,路径会是怎么样的。这个问题是为了确定,他是否意识到一条直线沿着滚轴移动还是一条直线,而且很特殊的是,这条直线是当它以自己的轴旋转时,保持不变的唯一一条线,这个命题可能与莱布尼茨给出的定义有些类似。然而,得到一个确切的答案非常困难,因为当一个儿童被问到思考这个管状装置的长度并且给出正确的回答时,他的反应可能不再是管状装置的静态表征了。

下面是对从阶段1(4—5岁)到阶段4(形式运算)的儿童对于这些问题的不同回答

① 对于这类问题的研究,读者可以参考《儿童的空间概念》,第十章。

进行的简单概括。

在整个阶段1,我们发现儿童不能想象运动的发生和发展。他们简单地做一个铅笔标记,可能是一个点,也可能是一个短横。经常能看到的是,他们在空闲的时候画画,而不是展现运动的路径。这可能是他们认为,这些点或者短横就是运动的最终结果,把它们作为到达的终点,但是并不能表征运动本身。

阶段2中的反应自然地分成了两个阶段A和B。阶段2A期间,儿童开始想象运动中物体描绘的曲线,但是对于问题1而言,他们不能区分由一个简单运动描绘的曲线和物体本身的轮廓。他们想象正方形在旋转的时候它的路径还是正方形等。问题2—4甚至更困难,在这里儿童不能区分由简单运动导致的曲线的类型(旋转圆盘产生的圆,蚂蚁和蜗牛向前运动产生的直线),不能区分由复合运动产生的曲线(对于圆盘的运动,蚂蚁或者蜗牛需要结合其他连接外部参照系统的运动,如车轮、圆柱、木板的运动)。所以,在回答问题2时,儿童这时通常画一个圆,或者是一连串的圆(通常是不连续的),而不是一条摆线。对于问题3,他们画了一条直线而不是一个螺旋线。对于问题4,一条垂线代替一条斜线。在子阶段2B,儿童能够区分,在简单的运动中,由物体描绘的曲线和它自身的静态轮廓。当包含的是复合运动的时候,儿童对于简单运动产生的曲线和复合运动产生的曲线之间的区分能力增加。回答问题1时,他们预测说绑定在一个随轴旋转物体上的铅笔,不管物体的形状是什么,画的都是圆。从问题2到问题4,我们在简单和复合运动之间发现了许多有趣的折中妥协策略。所以,尽管摆线经常表征为一系列的紧挨着的圆,这些可能会被画成椭圆,为了当圆盘相对于桌子的位置发生改变时,调整圆盘绕着自己的轴心的运动。螺旋线也经常表现为一条斜线,这也是一种妥协,在圆柱上的向前运动和圆柱自身的旋转运动之间的妥协。

阶段3(从7—8岁开始),儿童逐渐形成了正确的解答,尽管在这之前有多次的试误。对于许多问题而言,我们能够区分3A阶段和2阶段,但不是所有的回答都能足够区分,另外,阶段3B(开始于8—9岁),所有的问题都被正确解答,尽管在这之前依然有一些犹豫和错误。

阶段4(形式运算),从最开始就能够给出正确答案,没有明显的试误。偶尔我们发现,过早发育的被试在9岁的时候就能够完成,同时反过来,我们发现那些后进的被试,甚至在12岁以后依然对答案不是很确定。在控制试验中,相同的问题也存在于许多成人身上,在这里我们也发现,他们的解答有时也是不完美的。

第二节　阶段1:儿童甚至不能重构运动的圆形曲线

许多被试接受访谈,结果发现许多人处于阶段1末尾的较高水平。虽然不成功,但他们画的圆、正方形和三角形彼此是不一样的。他们被问到从1—4的一些问题,特别

强调了问题1。下面的这些例子表明了这些问题的最初难度。

雷恩(4;2) 主试在绑定一支铅笔到圆盘的外围之前,以它的轴心转动圆盘:"看,这支铅笔将要在纸上做标记,我们现在要转动这个轮子,你能画出来这支铅笔将要画的东西吗?——(他画了一个圆。)——(铅笔现在被移到中点)我现在要在中间弄一个洞,然后把铅笔插进这个洞里。当我转动轮子的时候这支铅笔将要画什么?——(画了另一个圆。)——看。——(对于他之前画的不对的图案,没有表现出惊讶。)——现在看。我要将我的铅笔放在这个角上(三角形)。然后我要像这样转动它(展示)。你画出来这支铅笔会画出的形状。——(他试着画一个三角形,但是不能封闭它)一个铃铛!——看,铅笔画的什么?——*它转了*。——(实验从另一个角重复)这一次图案看起来像什么?——*像这个*(三角形)——看。——*一个圈!*——现在假如我把铅笔放在另一个点上然后转动它,图案会是什么样子的呢?——(他再一次画了含糊的三角形形状。)"

给雷恩介绍蜗牛的问题(问题4),木板保持静止的情况。再一次,交流的问题很严重(儿童可能不太能够按照主试的意图画出图案)。"你看这个蜗牛,它被关闭在这些墙里,所以它只能像这样移动(展示。然后小男孩自己拿着这个小蜗牛在凹槽里来回地移动它)。你能画给我看它的路径吗?——*好的*(画了一个很小的黑色圆圈,而不是一条直线)。——你画的是什么?——*蜗牛*。——看(展示一条直线),你再试试。(接下来用一张新的白纸重复这个实验。你能画出来这个路线吗?——(他再一次画了蜗牛。)"

马尔(4;8) 旋转圆盘(问题与给雷恩的一样,但是主试在圆盘上画了一个小小的十字,用来固定铅笔),马尔画了一个十字架。"看。——(惊讶!)——(让圆盘旋转四分之一)告诉我十字架现在哪里?——(他正确地指出来。)——它是怎么从之前的位置到达这里的?——*不知道*。"……主试转向正方形:"告诉我,当我旋转这个一圈时(旋转正方形),我的铅笔会画出什么样的图形。——(画一个点。)——看(马尔明白它画出的是一个圆)。现在我转动一点点(转动四分之一)。你能画出我的铅笔刚才画的吗?——(他画了一小条线,不是很直。)——现在呢(一个完整的圆)?——(它画出一个正方形。)"对于蜗牛的问题,他首先画出一个小短横,然后也画了蜗牛本身。

有迹象表明,这些儿童不能形成任何运动曲线的表征。雷恩看了两遍铅笔在圆盘旋转时画的图案,但是他一直没有吸取任何的教训,一直非常冷静地画物体的本身(圆、三角形或者是蜗牛)。在水平2A,儿童可能给出相似的图案,想象着铅笔会画出圆的或者三角形的轮廓。但是这里的解释是不一样的。雷恩不能想象运动中的物体描绘的图案,这就是为什么他只是简单地画出物体本身。这个解释对于马尔也是正确的(画出一

个十字代表铅笔,随后是正方形和蜗牛),但是马尔在两方面表现出更多的洞察力:他画了一个点来表示铅笔的标记;更明显的是他画了两个短横,一个是对于滚动四分之一的正方形,一个是对于蜗牛的路线。这些短横是表征运动曲线的第一个尝试,同样地,它们预示着阶段2的开始。很难确定这些短横的含义。我们知道的是,儿童首次感知到了位置的改变(参见《儿童的运动和速度概念》及本书的第三章和第六章),使得我们相信这些短横是试图表征位置变化的结果,例如到达的点。但是,这些短横也有可能不只是象征性地对位置的表征。不管解释是什么,很清楚的是,运动的曲线在整个过程中没有进行表征。我们认为预见路线的能力超出了阶段1儿童的范围,原因不难寻找。我们知道,运动首先被感知的是位置的移动。儿童在静态环境下思考,集中他们的注意力于到达的点(有时候是离开的点)。他们倾向于忽略包括位置变化[①]的运动,这就是为什么他们的大脑中还没有产生运动的路线的想法。

第三节　亚阶段2A:儿童画出运动的路线,但是不能区分两种曲线

不像第1阶段,2A亚阶段的儿童能够形成运动路线的表征。即使他们不能在所有的情况下都完成,但是至少也能在主试安排的特定情况下完成,也就是当铅笔永久地记录下了它们的路线时。当铅笔固定在圆盘的边缘,他们在圆盘的路线中抓住了圆的概念,尽管是在直觉的水平上。但是当它固定到一个正方形或者一个三角形上,然后旋转,他们继续相信将会画出三角形和正方形。更不必说,在完成问题2—4时,他们不能区分复合和简单运动。

布(5;2)　问题1　圆:"当我转这个圆圈的时候,我的铅笔会画出什么样的记号出来呀(主试转动圆盘,笔尖离开纸张)?——一个*圈*(他画了一个圆)。——(主试移动铅笔到纸上然后转动圆盘)看,一个大的圈!现在我要在圆盘的中心和边缘之间放铅笔(把铅笔固定在靠近中心,用一个十字架作为标记)。现在它将画出什么样的图案?——*它也会画出一个十字架*。——(演示。)——*哦,一个小圆圈!*"

旋转的正方形:"假如我将铅笔放在这个点上(角),然后像这样转动它(演示旋转的运动)。——*一个正方形*。——假如我将铅笔固定在这个点和中点之间呢?——*一个很小的圆*。——(演示。布注意到它是正确的。)——假如我把它放回到这个点呢?——*一个正方形*。"

① 这个儿童,就像Aristotle一样,不是以事情的状态考虑运动,而是以静止状态到另一个状态的转变考虑运动。

问题2 摆线："当我想这样转动车轮的时候(示范整个运动的过程，采用参考的标记而不是铅笔)，会画出什么样的图案？——*一个圆圈*。——再看一次(重复之前的运动)。——(他在离第一个1厘米的地方，画了第二个圆圈。)——但是告诉我，这个小的、蓝色的点，是如何从你的第一个圆圈到达你的第二个圆圈的？——*它一直这样滚着*(然后他在一个线上画了两个更多的圈)。"

问题3螺旋：只有圆柱旋转时，它预见了轨迹是一个圆，直线运动时是"一条线"。当主试给他看两个运动结合起来，试图激发一个反应时他回应："*在每一边有一条线*。"并且画出一系列的平行的直线。

克里(5;3) 问题1 圆："*它画出一个圈*(在看到铅笔的轨迹之前)。——为什么？——*因为那里有一个圈*。——假如我将我的铅笔放在正方形的角落的一个洞里(主试旋转正方形，但是之前没有插入铅笔)，铅笔这次会画出什么呢？——*它会画出一个正方形，但是我不会画正方形*(但是尽管如此，他画了一个正方形)。——看(演示)。——哦，不，一个圈。——现在假如我将铅笔放在这个点，会发生什么？——(他画了另一个正方形。)"

问题2摆线，主试旋转竖立的圆盘，铅笔不在纸上："*它将画一个圆*。——但是这个车轮一直在转。——(他现在画了两个圆，之间有一定的距离，代表车轮在开始和最后的运动)——那它怎么从这儿到这儿呢？——(他在两个圆之间画了一系列的圆圈)"见图5。

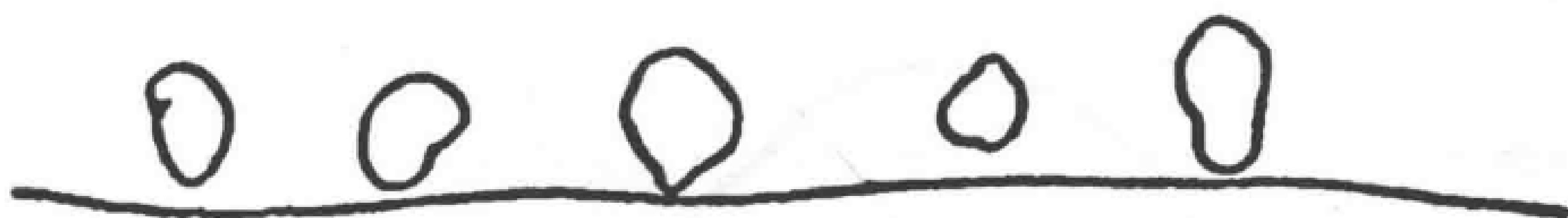


图5

米克(5;2) 问题1 圆："看，假如我转动这个圈(演示这个运动)，你认为铅笔将画出什么？——*一些图案*(他不完整地画出一个圆，所以很清楚地表明，他是试图画出运动的路线而不是物体本身)。——看(进行试验)。——(他画了一个圆。)"

正方形："现在这个铅笔会画出什么(没有铅笔进行演示)？——(他画了一个正方形。)——看(进行试验)。——*一个圈！*——为什么？——*因为*……——但是为什么这个会画出一个圆？——*不知道*。"

问题4蜗牛："当它前进时会得到什么样的图案？——(它画了一个水平的直线。)——现在，假如它爬行的时候，我移动木板，那么路线是什么？——*直线*(画了相同的线)。——但是假如当它直着向前进时，我这样拉木板，将会发生什么，是不是还会得到同样的标记路线呢？——*是的*。——好，当我移动木板，而不移动蜗牛时，木板的路线是什么？——*像这样*(再次画出相同的线)。"

胡尔(5;2) 问题1 圆："*它将画出一个车轮*(画出一个圆)。——那么假如铅

笔离中间很近呢？——*一个车轮*(在之前的圆中间画一个更小的圆。所以两个路线之间的封闭拓扑关系很准确地被预见到了。但是，接下来的访谈让我们更清楚地看到圆的缩小还没有被感知到)——假如我将它放在更靠近中间呢？——*它会更大*(画了第三个圆，比第二个更大)。——另一个男生告诉我。它应该是更小的，他错了吗？——*没有*。”

问题2　摆线：一个简单的圆。

尔(5;6)　问题1　圆：“*一个圆圈*。”正方形(这个问题推迟到访谈的最后，以排除固着效应)：“当我转动这个铅笔时，铅笔会留下什么样的图案？——*一个正方形*。——看(演示)。——*哦！一个圆*。——为什么不是正方形呢？——*不知道*。”

问题2　摆线，这个问题首先要求儿童回答铅笔在圆盘中心的情况：“当我转动这个车轮，在中心的小点会画出什么？——*也是一个圆*。——现在仔细看，当它向前移动时，它还画出一个圆吗(移动车轮，但是没有铅笔的标记)？——*一个点*。——但是它不是正在移动？——(犹豫)*好，一个圆，然后*……——看(演示)。——*正在画一条线*。——为什么？——*因为铅笔没有转动*。——现在我要将铅笔放在这儿(在圆周上)。——*它将会画一个圆*。——看(演示运动，但是没有图案)。——(他画了一个粗糙的圆，紧接着一条类似针线的线来表明向前的运动。)(图6)。——你画出来沿着桌子滚动时铅笔画的图案(旋转车轮)。——(他画了三个隔开的圆。)”

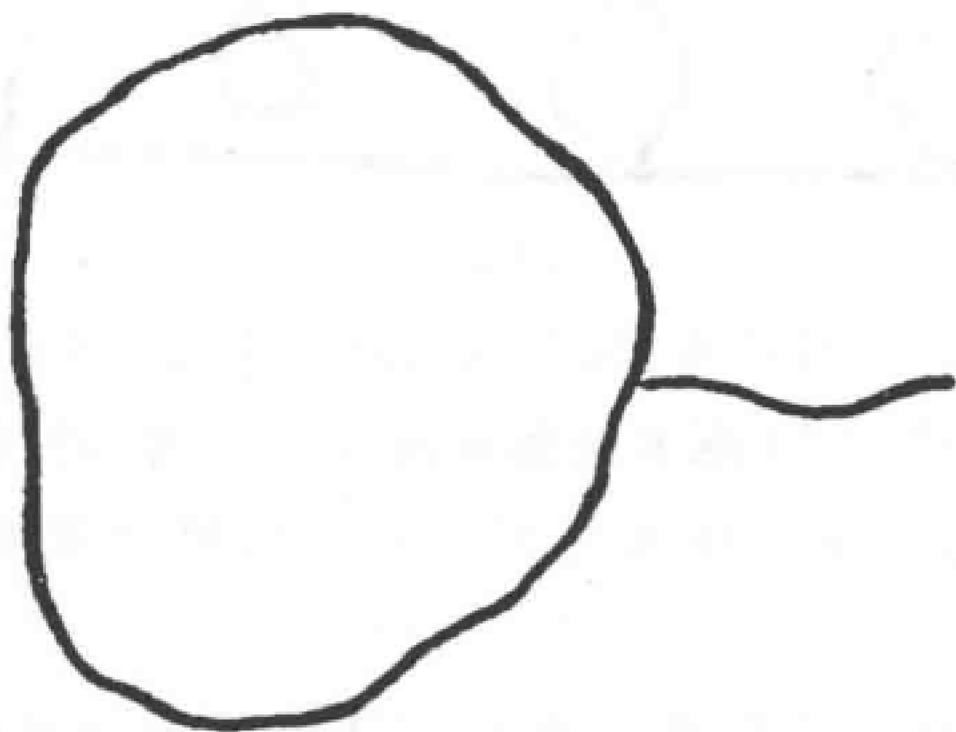


图6

问题3　螺旋：“你看我在这个(静止的)圆柱上移动铅笔，铅笔会画出什么？——*会画出一个栏杆*(画了一条直线)。——现在我们转动它(发起一个螺旋运动)？——*现在会画一个圆*(把圆柱画成长方形将一个小的圆放在中间)。”

穆勒(6;4)　问题1　圆：“我的铅笔会画出什么？——*一个圆*。——假如我将它放在中间和外围之间呢？——*还是一个圆*。——是更小还是更大？——*相同的圆，相同的大小*。——那么假如我将它正好放在中心呢？——*一个小圆，更小*(画了一个小圆而不是一点)。”正方形(这个问题放在访谈的最后)：“假如我像这样转动

它会怎样？——*一个正方形*。”

问题2　摆线：“*会是一个圆*。——但是铅笔画出来的路线是什么样的呢？看(没有铅笔轨迹进行演示)。——*嗯，另一个圆*(画了第二个圆，两者之间没有间隙)。——假如我放在车轮的中心呢？——*还是一个圆*。——当我放在离中心和木板都一半的位置呢？——*还是一个圆*。”

问题3　螺旋，将铅笔放在某一位置，旋转圆柱：“*会是一个圆*(正确)。——现在铅笔移动了(圆柱静止)。——*会是一条线*。——对的，现在这次我将它们都运动起来(有铅笔轨迹进行演示)，现在它会是什么？——*像这样的一条线*。——就像当圆柱一点儿也没有移动时一样？——*是的*。”

佩格(5;3)　比其他的被试在理解摆线上表现更好。问题1圆：“*将得到一个圆*。——在中心呢？——*一个小圆*。——为什么更小？——……——假如我放在边缘和中心之间一半的地方呢？——*它会比最后一个更大，但是比第一个更小*。——你答得非常正确，告诉我为什么……”正方形(访谈末尾)：“铅笔轨迹看起来像什么？——*一个正方形*。——假如我将铅笔放在中心和边缘之间呢？——*一个小圆*。——假如放在正中间呢？——*一个很小的圆*。——在这里呢？——*一个正方形*。”

问题2　摆线：“当我将铅笔固定在车轮的边缘时，铅笔会画出什么样的图案？——(他画了一系列紧挨着的圆。)——那么当我将铅笔放在正中间呢？——(更小的、紧挨着的圆)*更小的圆*。——放在边缘呢？——*像这样*(更大的圆紧挨着)。——看(演示)。你回答对了吗？——*对了*。”

问题3　螺旋，对于静止的铅笔和运动的圆柱，他画了一个圆；对于运动的铅笔和静止的圆柱以及运动的圆柱，他都画了一条直线：“是否当铅笔向前运动，圆柱静止也是一样的？——*是的*。”

吉雅(5;10)　也是表现较好的被试。问题1　正方形(在开始时询问是为了证实结果)：“当铅笔随着那个东西旋转的时候，铅笔的路线是什么(没有铅笔轨迹进行演示)。——*一个正方形*。——那么假如我将它放在中心呢？——*一个更小的圆*。——看(演示)。——*哦，一个圆！*——当我将它放得更靠近些呢？——*它会画出另一个圆*。——现在这个呢(一个三角形，铅笔固定在一个角的顶点上)。——*一个圆*。——假如我放在离中心很近的地方呢？——*一个更小的圆*。”

问题2　摆线：“*一个圆*。——假如我将我的铅笔放在中心呢？——*一条线*(掌握了这个建构)。”

问题4　蜗牛：“*一横*。——现在假如像我这样拉木板呢？——*还是一横*。——只是和之前的一样吗？——(犹豫)*不，更小*(表明区分能力的开始)。”

这些案例，相比之前的阶段1的有着明显的进步，因为他们试图画一个物体运动的路线而不是物体本身。仅有的例外就是布画的小的十字架，是之前阶段的残余反应。

对于剩下的案例,他们可以理解,假如一支铅笔固定在移动的物体上,可以用一条线来描绘运动的曲线。当多次重复圆盘的不完整的旋转时,米克画的残缺的圆是非常清晰的案例。同样地来说另一个事实,表现更好的儿童能够预见到,一支铅笔越靠近旋转物体的中心比靠近它的边缘一定会得到一个更短的路线。他们的回答更加清晰地表明,这些曲线试图描绘运动的路线而不是静止的物体,描述静止的物体是阶段1的儿童的做法。

简单的圆的运动所增加的困难主要是,儿童需要从物体运动描述的曲线中分离出旋转物体的轮廓。假如这个物体是一个圆,没有问题。但是当一个正方形围着轴线转动,儿童就不能理解,位于正方形一个角上的铅笔依然画出的是圆的路线。甚至当被试知道正方形处于运动中,看着铅笔的运动(在看到纸上的标记之前),也不能消除轨迹必须是一个正方形的印象,因为物体是一个正方形。为了理解他们失败的原因,我们必须回去参考他们在这个水平时,当被要求解决轨迹问题时(第九章)的回答。正确的回答需要理解物体(比如正方形)围着轴旋转,然后这个物体上的任何点(比如一个角上)的轨迹一定会是一个圆。但是这个理解需要内隐地或者外显地意识到,移动点到中心的距离是恒定的。换句话说,它揭示了对一个轨迹的认识,是基于中心到所有旋转中的点,即所描绘曲线上的点,之间都是等距的。之前的研究表明,轨迹以及等距的概念,一般在水平2A时还没有形成,同时在精确度上完全缺失。旋转运动的经验对于理解轨迹来说是不可替代的,因为除非到旋转轴之间距离等距,运动本身并不一定会被看作圆。然而我们不难发现,儿童会认为运动的路线会与正方形的轮廓类似。错误反映了在旋转运动和依据轮廓之间的一些混淆因素。因为没有等距的守恒,我们发现,在问题1对于旋转问题的回答中,出现了一个系统性的问题,这个问题在整个子阶段2A中重复出现。额外的证据可以看到,大多数儿童不能理解实验的结果,甚至当他们看到了也不能理解。所以克里看到铅笔放在正方形的一个角上画出一个圆,但是当主试在另一个角上插入铅笔之前,他还是会画出一个正方形。米克和尔看到铅笔的轨迹是圆,但是当问到原因时却不能回答。只有吉雅,注意到了正方形的旋转产生一个圆,成功将这个结果迁移到三角形的问题上。

因为距离与参照的中心没有关系,旋转运动的曲线与旋转的轴无关。因此对运动的表征不够,甚至当运动很简单的时候也一样。必然地,包含旋转(摆线和螺旋)甚至由两个直线(问题4)组成的复合运动也很难进行表征。在所有的案例中,我们发现,儿童将整个复合运动或者自运动归类为一个运动和相同的曲线。另外甚至对于某个子运动而言,这也经常不是一个完整的表征。

在摆线运动的例子中,儿童不能抗拒旋转的车轮一定会产生一个圆的概念,因为车轮本身就是圆的。向前进的动作被简单地描绘为几个圆,一些是有间距的,一些是紧挨着的。第一个圆代表第一个位置,然后剩下的圆代表接下来的运动进程中的位置。(克里最开始只画了两个圆,代表离开和到达的位置,同时在这些圆之间插入更多的圆之

前，需要对他进行更多的敦促）这个反应与阶段1类似：一部分运动的点没有被重视！这种相对的退步是由于，复合运动产生的难度更大。对于一个复合运动中的简单运动，虽然所有的被试正确地表现出，车轮绕着轴心转的曲线是圆的，但是几乎没有人意识到中心描绘的是一条直线，例如简单地替换（除吉雅之外，吉雅的能力接近阶段2B）。穆勒认为路线"依然是一个圆"，而佩格画了一连串的紧挨的小圆，这些小圆基本上不会出错，尽管比他对边缘上的点画的圆要小很多。

在问题3中，被试意识到当圆柱静止的时候，蚂蚁的运动是一条直线，同样地，当圆柱旋转时，静止的铅笔会画出圆的轨迹。当这两个运动结合起来，他们就不能回答了。一些儿童将蚂蚁在运动圆柱上的轨迹认为是一条直线，其他的儿童认为是平行的几条线，这些都可以看作直线轨迹的后续片段。虽然复合运动都是直线性的，但是问题4也不能得出复合运动的有指向性的回答。不管木板是静止的，还是沿着运动木板的方向拉木板，儿童都画了相同的蜗牛的路径，而完全忽视了方向上的改变。有些人甚至对蜗牛的简单运动，木板的简单运动以及两个一起的复合运动都画了同样的线（例如，米克画了三条平行的线都接近相同的长度）。由于不能确定斜线的斜率以及缺少直角坐标系，再一次提醒了我们这个阶段所特有的局限性。

所有的结果都依靠两个因素，很明显这两个因素关系紧密。首先，儿童不能形成相关运动的表征，而这依赖于两个简单运动的复合[1]。基于摆线、螺旋以及斜线运动（问题2—4）的三个问题以这样一种方式呈现，儿童都意识到每个问题都包含两个运动：车轮的旋转运动和沿着桌面前进运动，蚂蚁的运动和圆柱的旋转，蜗牛的垂直运动和凹槽木板的沿长边运动。但是甚至单纯从运动学的观点看，这些子运动没有在儿童大脑中形成一个复合运动，并且完全独立于它们的几何学等价性。在我们之前的相关运动的研究中，只考虑运动学方面，也发现了相似的结果。不管从相同的方向或者相反的方向拉木板，被试都表示蜗牛沿着木板爬行。在这个水平上，评估时间和距离时，他们不能理解两个开始于同样的点朝向同样方向的运动如何能结合在一起。然而这个问题还是相对简单的，因为在这里两个运动是异质的而不是同质的，也不在同一个方向上。那么车轮前进，圆柱旋转以及木板的运动都是绝对的运动，而圆盘悬挂在外轮上以及蚂蚁和蜗牛的那些运动都是相对的。因此得出正确答案的第一个障碍就是运动学。但是这个障碍又发源于几何学。

相对运动可以看作是两个基本运动的结果，但是这个概念揭示了两个参考系。一个参考系是支撑运动的内部，另一个就是静止领域。因此复合运动的曲线在没有内部和外部的参照系统时不能进行建构。结合两个参照系是一个二阶操作，以形式思考为前提。阶段2，年幼儿童甚至还不能通过有组织的参照点，以及稳定的间距在一维或多维上建构一个坐标系。从对于旋转运动的表征很明显地看出，他们甚至都不能掌握简

① 这个观点在之前的著作中有提到：《儿童的运动和速度概念》，第四章。

单运动的曲线。他们缺少清晰的距离的概念以及调整距离的能力。因此他们不能识别等距,这是建构这些曲线的基础。所以任何清晰的复合或者机械曲线的概念都远远超出他们的认知范围。因此在运动学上表征能力的局限性和在几何学思维上平行的局限性紧密地联系在一起。

第四节　亚阶段2B:区分简单运动和复合运动的首次尝试

水平2B具有两个新的进步。圆的路径现在开始能够被正确表示,能够从旋转物体中区分出来。另外,对复合运动的曲线比之前稍微能够更好地区分。

鲁特(5;1)　处在水平2A和2B之间。主试在圆盘的边缘以及正方形的边角上画一个十字形用于问题1。鲁特依次画了许多的十字架,并且在两个实验中最后都逐渐画出了一个圆。

问题2　摆线。开始他画了一个圆,然后他画了一些拉长的圆,因为它看到车轮上的红点还在向前移动,并且希望在绕轴旋转与摆线运动之间做一个区分。

尼尔(5;4)　问题1　圆:"*一个圆*。——那么假如我将铅笔放在中心呢?——*一条直线*。"正方形:"假如把铅笔放在这个角上,然后转动正方形,它会画出怎样的图案?——*一个正方形*。——你真的是这么想的吗?——*不,它会像这样画线*(画正方形,最后看起来像一颗钻石)。——看(仍然旋转正方形,不让铅笔在纸上做标记)。——*不,它会一直画一个正方形*。(停顿,他在思考)*哦!不,一个圆*(在没有看到铅笔轨迹的情况下)。——为什么是一个圆?——*因为它一直保持转动,这跟它一直不动的时候是不一样的*。"

问题2　摆线:"*一个圆*。——你再看一遍它向前移动。——*不,我还是认为会是*。——*一个圆*(一个水平2A的反应)。"

问题3　螺旋,在铅笔还没起作用的时候,他画了一个圆,当铅笔向前运动而圆柱静止时,他画了一条直线,两者的回应都是正确的:"好的,这次我们要让它们一起运动。假如向前运动铅笔的同时转动圆柱,会得到什么?——(他画了一系列的小圆,如图7所示。)"

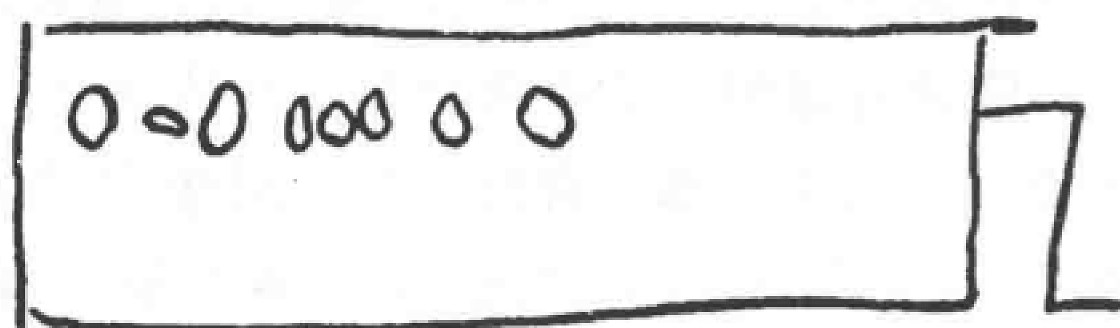


图7

泽尔(5;4)　问题1　正方形："*这将会是一个小点。*——但是假如我不停地转动正方形呢？——(他画了更多的点，然后哭了)一个*圆*(用他的手进行演示)。*因为你正在转动它，然后就会画出一个圆*。——那么假如我将铅笔放在靠近中点的位置呢？——*一个更小的圆*。"

圆："假如我用这个圆呢？——*可能它会像这样画一个圆*。——那假如我将铅笔就放在正中间呢？——*一个圆或者一个点*。"

问题2　摆线："假如我向前滚动车轮，铅笔会画出什么样的图案？——*一条线*(直线)。——为什么？——*因为车轮直着往前滚*(思索车轮在桌子上的路径)。——看(转动车轮，没有在纸上留下痕迹)。——*嗯，像这样*(一个椭圆)。——那么假如我将铅笔穿过中心呢？——*也一样*(还是一个椭圆)。"(见图8)。

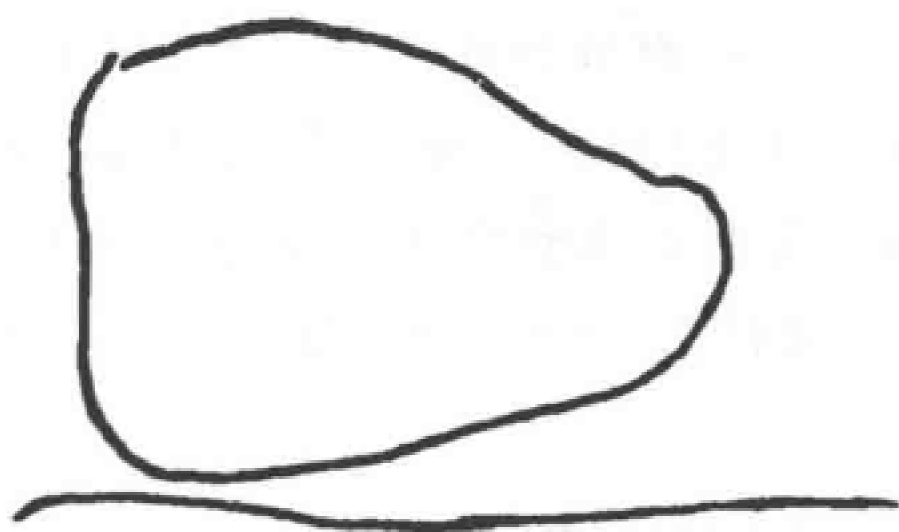


图8

彭拉(5;5)　与之前的被试的回答类似。当车轮绕着自己的轴心转动时，他正确地回答了一个圆。当车轮向前沿着桌子运动时，他画了一条直线。然后，当他研究红色点时，他开始在底部画了一个凸形曲线，但是在画到顶点时，短暂地停了一会儿。"那么然后？——……——*再看一遍*。"他很仔细地看着这个装置，然后画了一个相似的弧线，但是继续画上了轻微的向下的曲线，以一条短的水平线结束。这个图案具有很清晰的意图，来整合圆和直线的运动，同时彭拉只能简单地一边一边地画，因为它不能结合它们来形成一条摆线。问题3(螺旋)的回答在一条直线的水平上。

罗斯(5;6)　表现出部分成功和部分失败的倒退模式。对于问题2(摆线)，他简单地画了一个圆，但是对于螺旋(问题3)，他首先画了一条线平行于圆柱的一边(将其作为矩形看)，然后画了一条斜对角线穿过矩形。

马克(5;6)　问题1　正方形："*铅笔会画一个正方形*(他自己旋转卡片，铅笔离开纸)*不，它会画一个圆，因为它是以一个圆的形式转动的*。"圆："当我转动这个圆时，铅笔会画什么图案？——*一个圆，不是一个正方形*(害怕被物体的形状欺骗)。——为什么不是一个正方形？——*不，它是一个圆*。"

问题2　摆线，一连串连续的圆。

问题4　蜗牛，对蜗牛的路径画了一条垂直的线，对于木块的路径，他直接在第一条线上继续画了一条水平线。当两个运动结合起来时，他没有犹豫："*它会这样*

画。"然后他画了一条长长的弧线，好像木板的运动不再会引起蜗牛的运动在它之前进程上的波动！

莱依(6;4)　问题1　圆："一个小圆。——那当我将铅笔放在边缘和中心之间呢？——一个更小的圆。——那放在正中间呢？——一个很小的圆。"

正方形："一个圆，或者是一个正方形。——(主试演示运动，没有铅笔在纸上画。)——不，它还是一个圆。"

问题2　摆线："铅笔每次都画一个小点。车轮一直在转，它碰到桌子时也画一个点(用三个很大的点，以有规律的间距画了一条直线，来表明铅笔碰到桌子的点)。——看(移动装置没有在纸上标记)。——(再次用一个很大的记号画了一条直线，然后画了一个大圆，说)这像车轮，只是更大些。(然后他画了一个更大的圆，展开，沿着圆的水平直径上以一定的间距标记了三个大的点，然后将之前他画的图案都连接成一个图案)。——那假如我将它放在车轮的中间，铅笔会画出什么样的图案呢？——它将直着过去(例如一条直线)，你看，洞在中间，所以它是一条直线。——那假如我将它放在边缘和中间的某个位置呢？——它不会一直都是直线。——那假如在空中旋转呢？——一个圆。——如果在桌上呢？——你画不出来它。"

问题3　螺旋，他只画了一条直线。

柏拉(6;6)　问题1　正方形："它会画一个椭圆(他画了一个标准的椭圆)。——那假如我将铅笔放在中间和外围之间的某个位置呢？——它是一个圆。——假如我将它放在边缘(一边上的中点而不是角上，如同最开始的一样)？——它是一个正方形。——看(演示)。——哦，一个圆！——现在看这个(将铅笔固定在一个角上)。——哦，它还是一个圆！"

三角形："(铅笔放在边缘)它会是什么？——一个长方形(画了一个标准的长方形)。——假如我将它放在中间和边缘之间的某个位置呢？——它是一个半圆。——假如放在点上呢？——一个椭圆(见图9)。——那像这里呢(在图案上的另外一个点)？——我想是一个正方形。——看(展示给他在每个位置上铅笔所画出来的轨迹)。——哦，一个圆！另一个圆！一个圆！"

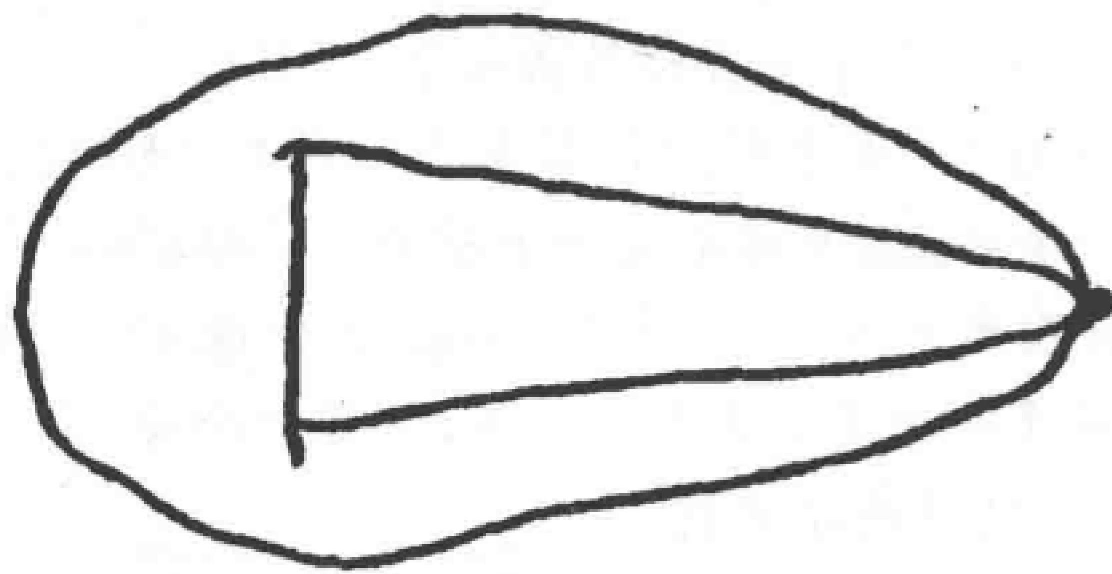


图9

圆："*它是一个椭圆。*——假如我将铅笔放在中心呢？——*一个小的圆。*"

问题2　摆线："*所有的都是圆*(画了一系列的圆，见图10)。——假如我将它放在边缘和中心的中间某位置呢？——*它会是一些更小的圆……不！更大的圆。*"



图10

问题4　蜗牛：当蜗牛自己单独运动时，他画了一条垂直的线，当木板运动而蜗牛保持静止时，画了一条水平线。当两个运动结合起来他画了一条斜线(虽然他的方向是不正确的)。

泽比(6;6)　问题1　正方形："*一个圆。*"当铅笔镶嵌在靠近中心的位置，他在一个正方形里画了一个圆。"*因为它还在转动。*"但是当铅笔固定在四个角的其中一个上的时候："*它是一个圆*"。

问题2　摆线：一系列紧挨着的圆。

问题4　蜗牛的运动，用一条垂线表示，木板的运动是一条水平线。复合运动最开始用另一条水平线表示："*因为木板运动了，所以蜗牛不得不移动到另一条轨迹上*(例如水平的)。——但是都在同一时间运动。——*然后它画了一个十字*(画了一条长的水平线和一条短的垂直线，两条线中心交叉)。"

尼德(6;6)　问题1　正方形："*它是一个正方形。*"

五个月以后，她首先画了一条弧线，并且继续画了一些，最后以椭圆的形状完成整个环形："*这是一个圆。*——假如我将铅笔放在这儿呢(在另一个角上)？——*然后它会画出一个正方形，不，一个圆。*——你确定？——*这是一个圆。因为其他的情况是一个圆。*——但是铅笔不在同一个位置啊？是吗？——*我想它还是一个圆*(很长时间的停顿)。——(主试在没有在纸上留下痕迹的情况下旋转装置。)——*是的，我确定它就是一个圆。*"

问题2　摆线：一系列的紧挨着的小圆。5个月以后她画了一连串连续的开口向上的半圆(例如，一条摆线曲线，但是开口向上)，然后她画了一些间隔的点，并且最终画了一系列的不完整的短线，她将它们连接起来形成了两条平行的直线。

问题3　螺旋。对于圆柱，她画了一个矩形，一条长长的线穿过矩形的中间，与它的长边平行，同时在这条线上还画了一系列的小的不连续的圆。换句话说，她试着表示出相邻的所有的运动而不是合成它们："*但是我做的是同时运行的两个运动，图案像烟雾*(画一系列的直线大致平行，紧挨在一起，很显然，她认为当这些旋转运动与视网膜融合一样快时，这些运动已经被融合了)。"

问题5　“想象一个蚂蚁从这个小洞里进去，然后从另一端的中点出来(沿着旋转的轴心)。——*它是直线*。——假如我转动圆柱呢？——*这个蚂蚁也同样转*(在一条相当显著的曲线上画了一只蚂蚁)。”

问题4　一条垂直线代表蜗牛的路线，一条水平线代表木板的路线。当运动复合的时候，她回应说：“*它开始是沿着直线走，但是后来它以圆的路线走*(首先画了一条波浪线，然后是一条直线，最后以一条向下的曲线结束)。*我知道它是怎么工作的，它走了一个半圆*(首先画了一条弧线，然后恢复到垂线，弯向较低的一端)。”

梅(6;6)和哈尔(6岁8个月)　问题4：蜗牛的路线是一条垂线，木板的路线是一条水平线，复合的运动是两条成直角的直线。

弗雷德(6;9)　再一次回答问题4，表示复合运动的路线是一条水平线，比第一次的更短：“*它与之前的*(木板运动的路线)*一样，但是更短*。”

卡米(6;11)　同样认为问题4的复合运动是一条垂线(就像蜗牛的单独的路径一样)，但是在回复直线之前，在中间有轻微的曲线。

瓦尔(6;8)　问题1　圆：“*铅笔在转动中一直做标记，一个圆*。”

正方形：他画某个角度上的正方形，然后画了另一个正方形，用来说明正方形现在旋转到下一个角度，但是停下来，然后说：“*哦，不！它画了一个圆*。”

问题2　他立即画了一条摆线，与一个半圆相邻。然而，这次实验证明了瓦尔还没有真正理解，但是只是打算用一连串的圆代替车轮的连续的位置，另外画上半圆，试图用直线代替车轮在桌子上的路线来调节它们。所以他的评论是：“*它一直是圆的路线*。——这些圆你画出来了吗？——*它们不是完全的圆，因为这是沿着路的轨迹*(例如他在半圆下画的直线)。——那么假如我将铅笔放在外围和中点的中间呢？——*它还是圆*(这次他画了圆，首先是不连续的，然后是连续的)。——当铅笔正好在中间呢？——(他画了一条直线。正确。)”

问题3　螺旋：首先对于摆线，他画了一系列的半圆，然后是一条波浪线。蚂蚁自己的路线以及圆柱自己的路线被正确地表达为一条直线与一个圆。

洛特(6;10)　问题1　圆：“*是一个圆，因为它一直转动*。——那对于这个正方形呢？——*它依然是一个圆，因为它这样转动，所以所有的东西都是这样转动*(例如，它不遵循正方形的轮廓)。”

问题2　摆线：第一个回应是一系列的不连续的圆。在更加清晰地研究了铅笔之后(笔尖离开纸张)，他在一条直线上画了一系列的弧线，但它们并不是连续的。“为什么在两两之间还留有小孔？——*因为这里有空的地方*。”

问题4　蜗牛：复合运动最开始是一条平坦的垂线。在观看了完整的演示之后，他明白了这条线。随着木板移动速度的增加，斜率增大；随着木板速度下降，斜率减小，直到趋向于垂直。

杰奥(8;0，发展迟缓)　问题1　正方形：他首先画了一个正方形，然后跟随旋转的角的路线，发现它是圆的。三角形的问题，立即就画出了圆，但是当呈现一个锐

角三角形时,他又倒退了,再次画了一个三角形。

问题2 摆线:他画了一个大的半圆,但是继续延长这个半圆到开始点的水平线之下,从而完成这个圆:“车轮是在桌子的下面运行吗?——不是。——好,这个呢?——(他画了一个更小的圆,从而这个圆的大部分都在代表桌子的那条线以上,但是一部分仍然在它之下。他还不满意,又画了一个小圆,整个都在桌子上。)——但是它的路线是什么?——(他画了一个半圆但是不能继续下去,见图11。)”

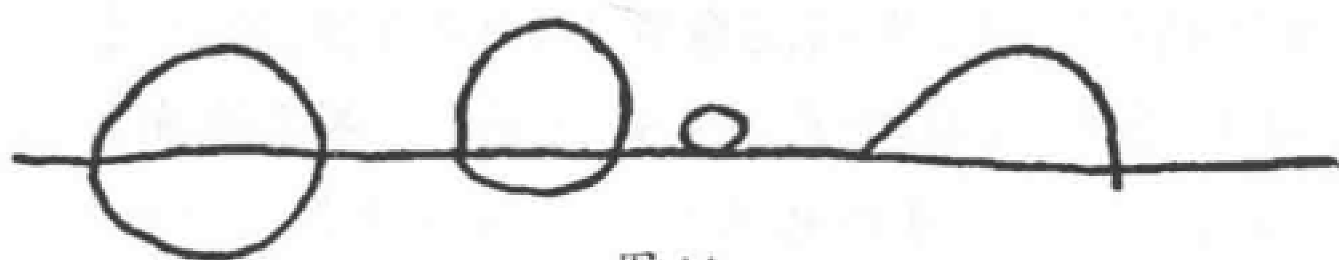


图11

以上我们列举的大量例子是经过深思熟虑的。它们生动地表现了几何曲线的运动表征(问题1)以及简单曲线和复合运动之间差异的增加(问题2到问题4)。

当面对一个物体围绕自身轴心转动的问题时,所有的被试都经历了或多或少的试误延长阶段,并且所有人最终都发现了一个角度,当旋转时,都会得出一个圆的路线。他们本身具有相当大的兴趣才有了这些发现。我们注意到这些被试意识到了将移动图形的轮廓与运动的曲线混淆时的危险。马克和泽尔发现了正方形的旋转轨迹是一个圆,害怕在圆的问题上犯错误,这就是为什么泽尔在他的回答中如此小心:“可能它是一个圆。”并且马克被正方形的类比带错了方向,描述了路径将是一个圆,而不是一个正方形。“然而他们最开始都十分小心谨慎,有几个被试依然在区分旋转运动和物体的静止轮廓之间出现困难。大部分被试都是通过逐步逼近的方法,达到形成圆的水平。所以当缓慢地旋转正方形或者是三角形时,一个儿童可能画几个点或者是一些短的曲线,意味着整个圆的形式仅仅是在后面通过推断形成的。这个过程极好地指出了到中心等距的重要性,也因此表明建构一个圆的两种方法是一致的。所以在水平2B的儿童,当他们通过定义轨迹的方式(第四章第三节)发现圆的时候,进行了相同的初步试误阶段。确实,当许多被试看到旋转的正方形或者三角形时,会立即想到一个圆,仅仅因为圆是最简单的封闭图形(对于这些被试来说轴心到角的等距过程是内隐的而不是外显的)。但是有几个被试仅仅得出问题中的路线一定是闭合曲线的一些类型,恰恰是因为他们不必费心考虑等距。巴尔是一个恰当的例子,他指出旋转的方形形成一个椭圆的曲线(但是派也在水平2B,在决定到中心距离相等点的集合问题上也给出了类似的回答,认为会形成一个椭圆,第九章,第三节)。同样地,尼德画了一些弧线,并且以一个还算标准的椭圆将它们联结起来,叫作一个圆。不管在轨迹标题下研究的问题与处理运动曲线研究的问题之间差异有多大,这些实验给出了在水平2B上相似的结果,相似的前期试误阶段,也来自相同的原因:儿童缺少等距的直接操作概念(immediate operational concept of equidistance)。然而我们发现所有的例子中的儿童,最终都获得了正确的

答案。

与用直觉的方法对待水平2B上的简单运动类似的是，包括在一些例子中得出曲线的正确表征，儿童现在开始区分简单和复合运动。这些被试中的每一个都试着合成两个单独运动到三个复合曲线中的一个：摆线、螺旋，或者斜线(问题4)，以至于他的复合运动曲线的答案与他给出的对于单独运动中的任何一个的答案都不一样。他们区分和协调这些运动的意图值得充分的考虑，但是核心的发现是，这些过程都发生在同一时间，就好像对简单运动问题的第一次正确回答一样(旋转和线性运动)。

关于协调这些运动的方法，我们注意到下面的内容：这些被试中最不成熟的是鲁特。在摆线的问题中，他仅仅是画了一个瘦长的圆，表示当车轮转动时，铅笔往前移动。泽尔也是这样。杰奥，虽然年龄很大但还是很不成熟。开始画了一个半圆(对同时转动和向前运动的车轮)，但是他不知道如何继续。他想象着旋转中的车轮描述了一个圆，但是意识到，一连串的圆对于描述向前的运动可能是不准确的。他的解答将会继续在桌子水平线以下，把他带到了他的初始点！最终他退回到了水平2A的回答，瓦尔也是这样(他开始画了一个真正的摆线，但是原因是错误的)。佩拉开始画了一个半圆后来变成一条直线。他画的图案是构成运动的毗连而不是复合。毗连很显然地再次在莱依的解答中出现：一串点来标记铅笔与桌子交汇的地点，用一个圆来表示车轮的旋转。尼德首先用水平线画这些点，然后用连续的线。他画了平行的两条线，因为他希望同时表示车轮在最高点和在最低点时的向前运动。洛特接近于正确的摆线了。随后他画了一系列的弧线，但是这些那时空着的地方用来说明车轮在桌上同时发生的直线运动。

对于螺旋，所有的儿童解决了两个较简单的问题：他们意识到当圆柱是静止的，蚂蚁是在直线上运动的，当蚂蚁在运动的圆柱上标记时，它的路线是一个圆。复合运动得出了各种各样的解答。尼尔画了一列连续的圆；罗斯画了一条斜线对角跨过圆柱；尼德画了一系列的紧挨着的平行线(当圆柱移动非常迅速的时候，融合成一溜烟似的整体)，随后他画了一条单独的直线切断了这一列的圆圈(并列这些组成的运动)；瓦尔的解答是一个波浪形的线等。复合运动最早的问题是，蜗牛垂直运动，而蜗牛移动的那个木板被水平地拉着。甚至在这里，儿童也会有一些相似的错误的解答，通常，构成的运动以毗连的方式表现而不是复合的。所以马克画了一条长长的波浪线，泽比首先画了一条水平线，然后是一个十字架，尼德画了一条波浪线，然后是底端微微弯曲的直线，最后是一条弧线。梅画了一个直角，弗雷德画了一条比木板单独运动时画的线更短的水平线。卡米的回答是一条垂直线，在中间有一个缺口等。柏拉单独画了一条斜线，同时向不同的方向倾斜。洛特画了一条垂直线，在他看了铅笔的轨迹之后，理解了斜线的斜率会随着蜗牛和木板的相对速度而改变。

总而言之，我们发现了这些被试都开始从简单运动中区分复合运动，尽管没有人得到真正的复合曲线。在一些例子中我们发现完全的毗连，其他的例子中构成的曲线以各种方式杂糅在一起。复合运动的操作性建构依然欠缺。然而，解决的模式对于简单

运动和复合运动的问题是一样的。在任何一个例子中,我们发现儿童首先制造一些直觉上的预期,然后将它们画在一起,同时进行一个明确的知觉判断。最终的答案在简单运动中是正确的,也是进行中可操作的,但是在复合运动中,它是不够的,也几乎没有区分。

儿童在解决这两类问题方法上的相似性,可以看成他们不能通过直觉层面上的即时顿悟来重新建构运动曲线的证据。这些曲线是详细描述的延长阶段的产物。他们的逐渐建构表现出与发生在轨迹问题中的连续泛化过程有一定的联系(第九章)。且不说一个圆的建构可能为其他的方法提供思路,我们发现轨迹的问题与运动曲线的问题一样,儿童在水平 2B 上开始画一些点,然后继续将它们结合起来组成不同的完整体,来形成一类曲线。在轨迹的问题上,没有形成完整的泛化,就好像在运动的曲线的问题上缺乏操作的精确性一样。

这些问题之间的并列是不言而喻的,但是成人经常会认为,画一个圆来代表运动是一件简单的视觉表征或者是感、知觉的事情。他们忘记了假如图像介入了这些问题,然后就像所有的图像一样,它是图解的延续,而图解在某种程度上是运动的,并成为内在的模仿。这些图解本身取决于预期的概念以及同化的重构。但是这些概念反过来在它们变成普遍的和具有操作特征之前是准可操作的。预期的概念以及知觉的重构不能导致对于运动曲线足够的建构,那时,空间概念还没有协调,空间的欧几里得几何学概念还没有被精细化。只是在操作水平上,当距离和长度,斜率和曲线的度量关系进入到运动曲线的定义和区分当中,这些情景才能达到。这些关系对于儿童没有明确的意义,除了在测量上,儿童能够用参考系来思考,这些参考系迟早意味着精确的坐标轴。这个系统对于圆的感知而言足够简单,就像旋转运动的曲线,因为它包括的不只是一系列的从中心顶点等距的点,而且是关于要解决的物体的形状的问题(问题 1)。但是主要的概念包括到中心参考点的等距,以及等距所代表的距离,这只能是逐渐地精细化的过程(第三章)。对于复合运动,当前同时呈现这么多运动也增加了复杂性,因为他们推断出了两个坐标系统,一个绝对的和一个相对的。由问题 4 的斜线推断出的参考的双系统,正如由问题 2 和问题 3 的机械曲线所推断的一样。因为参考系是双重的,当建构运动的曲线时,在这些问题上显然需要协调空间关系。但是这些情况所组成的基本曲线的操作建构基础在这个水平却不是很明显。

第五节　亚阶段3A和3B：立即建构简单曲线，根据经验逐渐建构复合运动曲线

等到他们到了七八岁，面临旋转正方形或者三角形问题的时候不会犹豫。他们立即会明白，插在一个角上的铅笔一定会画出一个圆的形状，确实，他们很明确地解决了轨迹研究(第九章第四节)中等距的问题。复合运动的轨迹也逐渐通过试误的方式解决了。这里我们要区分两个水平——3A和3B。因为在第一个水平上，在问题2—4中，只有一两个被完全正确地回答，而在第二个水平上，三个问题都得到了解决。在这个时候，儿童利用连续不断的尝试获得的经验形成的预期系统来帮助他们解决问题。

下面是水平3A的一些例子。

马尔(7;1)　立即画了一个圆，作为旋转正方形一角上(问题1)的铅笔的轨迹。"假如我把铅笔放远点儿呢？——*它将会是一个更小的圆*。——那么假如我把它放在一边的中点上呢？——*一个大圆*。——要是正好放在中间呢？——*一个小的点*。"三角形："*它也是一个圆*。——它会是一个三角形吗？——*不，一个圆*。——为什么？——*因为它是旋转着运动的*。"

问题2　摆线：马尔首先画了一系列的紧挨着的圆，但是解释说，第一个顺时针方向旋转，第二个逆时针方向旋转，如此反复交替。但是当看到铅笔的第一个弧形轨迹的时候(还没有在纸上进行标记)，他画了一系列连续的半圆形(这代表了在之前画的圆和摆线轨迹的拉长的弧线之间的一个妥协)："假如我将我的铅笔放在车轮的中间呢？——(他画了一系列的更低更长的弧线，是曲线运动的真实表征。)——那么，如果正好在中间呢？——*那会是更小的曲线*(画了另一条线，稍微有一点儿弯曲)，*不，它是一条直线*。"

问题3　螺旋：他的答案是一条简单的斜线。

问题4　他很容易发现了从蜗牛的运动和木板的运动中合成的斜线。

吉斯(7;11)　问题1：立即解决。

问题2　摆线：第一个图案是紧挨着的圆，第二个图案是由有弧线和圆圈组成的环状图形，就像图12所示，因为"*当车轮往前旋转，铅笔先往后，然后又继续往前*"(假如铅笔固定在车轱辘的最远的末端时，这就是正确的)。"那么假如我将铅笔正好放在圆的中心呢？——*这个点还待在中心，它往前运动，但是在高度上没有变化。它一直是直线往前，它画出了一条水平线*。"



图 12

问题3　螺旋：他为铅笔本身的运动画了一条直线，当铅笔不动的时候，为滚柱的运动画了一个圆。复合运动是一系列由直线串起来的圆。这个解答（图13）在水平2B上，是并排着的旋转和直线运动，而不是会产生螺旋运动的复合运动。

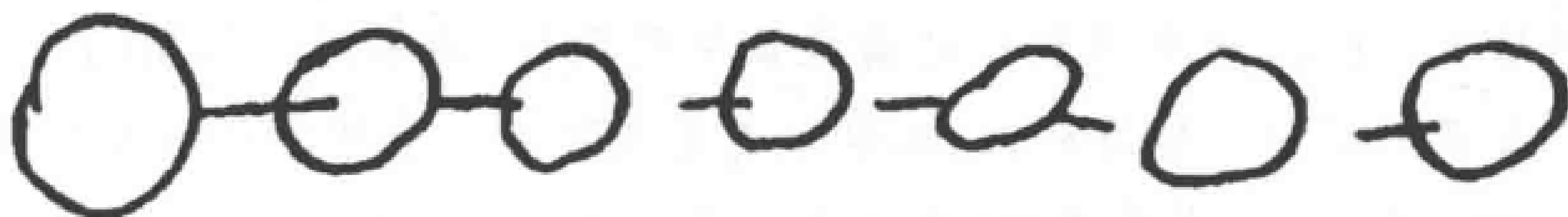


图 13

巴格（8;2）　问题1正确。问题2　摆线：他首先画了一条直线，指出车轮的边缘一定在道路上留下一条直线轨迹。当展示给他看车轮的旋转而没有铅笔的轨迹时，它的轨迹是摆线，也意识到当铅笔在车轮的中心，它的轨迹是一条线，"*因为它只是往前走而没有旋转*。"问题3："*围绕它都有一个标记*。"他画了一系列的不连续的圆。

佩儿（8;5）　问题2，在看了铅笔在车轮的旋转中的运动（没有看到它的轨迹）时，他找到了正确的答案。他的第一次尝试是一个圆。

问题3：他不能发现螺旋，而是画了一系列的图，也不像吉斯画的。首先是一条平行于圆柱的直线，然后是一条斜线，最后是一条线，开始是直的，然后突然变成一条曲线，趋向于是一个围绕圆柱的圆。

德斯佩（8;7）　首先在摆线问题上画了一系列没有完成的相互缠绕的圈，然后得到了正确的答案。但是螺旋问题上画了一条斜线，同时随着旋转速度的增加，仅仅是在画的速度上进行区别。

斯卡（8;3）　问题2　摆线：他开始画了不连续的圆："*它会一直是圆*。——仔细看（铅笔离开纸张）。——*圆圈碰到了边界*（画了一个更大的更长的延伸到所有最开始画的圆圈的弧线）。——再看一次。——哦，*像这样*（一个正确的摆线）。"

问题3　螺旋，他画了一条与圆柱长度差不多的直线然后说："*它是一条斜线*（倾斜的而不是直的）。——那么假如我快速转动它呢？——（画了另外一条与之前平行的斜线）*一样*。——假如蚂蚁移动非常快而圆柱转得特别慢呢？——*这会接近水平线*（正确）。"

拉佩（8;5）　问题1立即解决。问题2　摆线：他开始画了一个半圆形，然后继续画成正弦曲线的样子，然后返回来好像形成一个圆。他解释说，"*不，这是错误的*（为了更加确定他画了许多紧挨着的圆，指出最上面的部分说）*这一部分就是，否则*

它会返回到同样的位置(再次画了一个正弦曲线,但是指出下面的部分说),*它再一次回来。它旋转着往前。不,这是错误的。它本身没有旋转往前走,他一直是往前走*(他最后是画了一个正确的摆线!)。——那么假如这个点在中间呢?——*它会非常直地往前走,因为它一直在中间。*"

问题3 螺旋:他直接画了一条斜线。"假如我转得更快呢?——*它会更陡峭。*"

佩拉(8;6) 发现了一条摆线。最开始画了一条弧线,然后一点一点地通过归纳填满剩下的线段。但是错误地总结说,中心点遵循一条波浪形的路径。

问题3 螺旋:这里佩拉比之前被试做得更好,为不同的转筒的速度画出了三个完全分开的路径。转筒静止,蚂蚁沿着直线运动。"*当圆柱转的时候,它试着保持直线运动,但是最后是弯曲的*(紧接着一条斜线)。"还有"*假如圆柱转动很快,蚂蚁会在底下运动然后重新回来*"(对于开始的点,他画了一个圆)。换句话说,佩拉没有建构螺旋曲线,直接从一条斜线跳到了一条曲线,就好像圆柱突然以非常大的速度旋转。

马尔(8;10) 通过概括他开始尝试的一条弧线,非常快地发现了摆线,"在中间呢?——*一条直线*(水平线)。"

问题3 螺旋:"*最开始是画了一个圆,然后是一条线,然后是另一个圆。*"这两个运动是并列的。但是接下来的解答是一条斜线,最终得到了比之前被试更加正确的答案,他最终画了一类螺旋形,但是也画了成直角的两条直线。

问题4 复合运动直接解决了。

问题5 "*是一条直线。*——假如我转动它呢?——*还是一条直线。*"

布朗(9;3) 不像其他人,他对螺旋形状比摆线的问题更接近正确。问题2首先画了一连串的相连的圆,然后是由圆圈和弧线连接起来的环状。在看了完整的演示之后他说:"*我认为他每次都旋转……我认为它不得不返回到另一条路径上。*"

问题3 他首先画了一条略缓的曲线(不是一条直线而是一条弧线),然后接着画了一条模糊的正弦曲线(图14),但是最后他发现了螺旋曲线:"*它是曲线,因为它一直保持旋转……它就像一条蛇盘旋在一棵树上。*"

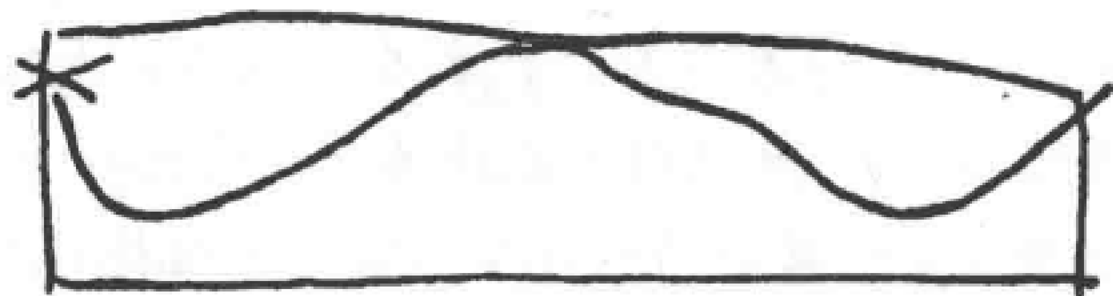


图14

问题4 解决起来毫无困难。

格兰(9;5) 问题2 画了紧挨着的圆之后,有一个类似挥手之后的波浪形,表

明车轱辘上的红色的点的轨迹是不同于它静止时的表现，它从一个圆到另一个圆运动。然后画了一条正确的摆线曲线。

问题3　首先他画了一系列的直线，当滚筒的速度不断增加时，直线越来越倾向于垂直。然后画了平行的等距的弧线，就像一组手链。被问到在圆柱后面发生了什么（比如，那部分隐藏的部分），他回应说："*这也是一样的。他一直向前转动。*"但是他的表述缺少螺旋的形式，因为圆是不连续的。

科特(9;8)　问题2　他画了有圆圈的环状体："*它返回了一些，但不是所有的，然后不断重复。*"但是最后画了一个正确的摆线，说："*它一直往前，所以它不能返回。*"

问题3，首先他像马尔一样，画了一些Z字形的图案。但是然后他画了一部分的曲线，最后达到了对于螺旋曲线的正确表征。

接下来的例子属于子阶段3B。这些个体在所有问题上都找到了正确的答案，而不是一个或两个，但是他们在方法上同样也表现出犹豫，尽管有着不同的犹豫水平。

斯特(9;0)　问题1　正方形（在一个角上放置一支铅笔）："*这是一个圆圈，因为当你转动它，它肯定是一个圆圈*（画了一个正方形，每个角上都有一个箭头指向圆圈的方向）。——三角形呢？——*这还是一个圆。*——一样大小吗，还是更小或者更大？——*更大。*——为什么？——*你看这个*（距离），*一直到顶点。*——假如我将顶点放在这里，会发生什么（靠近铅笔的角）？——*圆圈会更小。*——那么假如我将铅笔放在中间呢？——*仅仅一个点。*"

问题2　摆线：他直接在一条直线上画了一系列的圆圈。这些圆圈太接近半圆。"*它会那样运动，是因为它不能返回。*——其他一些男生是以这样的方式画它的（有圆圈的环状体）。——*是的，这是有可能的。*——哪个是正确的？——*这个。*——仔细看（移开装置没有在纸上记录）。——*不，它是这样的*（一条完美的摆线）。——假如我把我的铅笔放在中间？——*会是像这样的一条线*（水平线）。——假如我将它放在靠近中间呢？——*很小的圆圈*（紧挨着的）。*不，像这样的一条线*（一个有着平滑弧线的摆线）。"

问题3　他开始画了一条斜线，但是最后他达到了螺旋曲线的水平。

问题4　"*蜗牛被迫以这样的轨迹走*（一条斜线路径）。——那假如蜗牛运动非常慢，而木板运动非常快呢？——*它会画出一条有一点儿弯曲的线*（例如，有点儿像指数曲线，这可能在加速运动时是正确的）。"

尼夫(9;10)　问题2　摆线：他画了带环的花环状物体，随着车轮往前走，环越来越小，表明一个透视景中的物体。"为什么它越来越小？——*我应该画相同大小的。*——看（没有铅笔的轨迹进行演示）。——*不，它不是这样。我是向后运动来画它的。*（他画了一个圆来代表车轮静止时，然后另一个两倍大的圆，说）*因为它转动了两次。*（但是这个圆的下半部分是在桌子平面以下的。尼夫纠正了错误，通过

在线以上画半圆，然后最终得到了一个真正的摆线。)——那么假如我把铅笔放在最外沿和中点的位置？——*它是这样的*(一系列的小的不连续的圆。然后他笑了，画了另一个平滑弧线的摆线)。——那么假如在中间呢？——(另一个摆线，纠正到一条直线。)"

问题3螺旋，他画了一条斜线，但是在圆柱的另一边继续(见图15)。"假如我将铅笔拿下来，然后打开它会是什么样子？——(他画了一系列的紧挨着的圆，没有将铅笔从纸上移开，但是立即将它纠正到一个螺旋。)——假如我快速转动圆柱呢？——*那么它会更紧*(画一条短间距的螺纹线)。——假如我更慢移动转筒？——(他画了一条更宽间距的线。)"

图15

思高(10;5)　问题2　他的第一幅图案是环状摆线(图16)。"*这是因为车轮一直往回走。不，这是错误的，因为当铅笔转动的时候，它一直待在同样的位置。车轮没有回来*(画了一条校正后的摆线)。——假如铅笔在正中间呢？——*它是一条直线，因为圆一直向前移动。*"

问题3，首先他画了一个接近Z字形的模式，然手是一个正弦曲线，最后是一个螺旋，很好地表征了成熟的水平。他通过滚筒的速度正确调整间距。

图16

从这些例子中可以很清晰地看到，真正的泛化过程是阶段3。旋转图形问题没有任何困难，不管是什么样的形状。甚至水平3A，儿童能够立即意识到运动的曲线是圆。他们的成功是伴随着他们理解了，从一个参照点出发的等距的点的轨迹是同样的曲线(第四章)。这种相辅相成的作用可以解释为，旋转物体的路径是圆形仅仅是由于到达旋转转轴的距离是等距的。所以包含的空间关系是一样的，不管这个问题被伪装成一种轨迹或者是一种运动的曲线。马尔很好地意识到了潜在的原则，就像他根据关键点和铅笔之间的间隔变化来改变图的直径时所表现的一样。斯特画了非常明显的点，说："好，你能够看见到铅笔之间的这部分距离了。"换句话说，他做了对于半径的检验，这就是中点(关键点)和圆周(铅笔点)之间的距离。

当面对力学曲线或者是复合运动的曲线时，儿童通常更容易建构一条摆线好过于

一条螺旋线。但不是所有儿童都这样,这也是为什么结果不能作为一个绝对的公式,从而确定水平3A和水平3B之间的界限。所以,一些被试,比如说布朗,在螺旋线的问题上比摆线问题表现得更好。一般而言,儿童在水平3A上便能够或多或少地通过长时间试误的方式解决摆线的问题,但是却不能建构螺旋线。他们的行为指出了一个尽管不是很充分构建的预期系统,但这可以为他们提供解决问题的方向。被试通常从一个圆的假设开始;假如想得特别周到,会想象曲线是一个弧线或者是一个半圆。根据这些假设,他可能会进行这两种路线当中的一种。或者通过定义几个沿着曲线的点,然后串联它们的方式,来避免让自己受到静止物体形状所造成的先入为主的影响,或者是他期望整个的运动表现出成圈的花环状。在后一种情况下,他认为铅笔应该是画了双倍的他所呈现出来的轨迹,当铅笔是固定在半径这条线上而不是圆周线上的时候,这有可能是正确的。整个曲线被画成了一系列的不完整的圈的情况比较少见。一个连着一个,就像德斯佩,或者是斯卡所画的,一条弧线,越来越长,然后与圆圈的形式不一样;或者甚至是一条像拉佩所画的正弦曲线的样子。不管个体差异如何,在整个阶段3A中,我们发现从一些固定点开始的渐进的泛化过程。泛化的过程可能是谨慎的以及归纳性的,又或者是来源于一个快速整体的假设,在随后通过与观察到的运动中的铅笔的位置对比而不断改正。

我们观察到的泛化是操作化的,但仍然是归纳性的。换句话说,这并没有伴随逻辑必要性(logicalnecessity)的价值。这种归纳性的特点在螺旋线运动的问题中表现得更加明显,这就是为什么这个问题显现出更加清晰的曲线建构的过程。除了很少的例外,水平3A的儿童给出的回答形成了一个分级系列。这个系列开始只不过是一些组成曲线的毗连,例如固定圆柱时蚂蚁的直线运动,以及放置在旋转滚筒上铅笔所画出的圆。这种回答形式能够在吉斯的例子中看到,他画了一系列的圆,通过破折号连接起来。马尔和佩儿结合了这些运动,形成一条斜线,但是佩儿的线有一个突然到圆的转变,同时他所在的水平依然与吉斯的相当。巴格画了一系列的不连续的圆,他依然还是在静止合成的水平上。斯卡依然画了一条曲线作为一条斜线,但是考虑到它们相对运动的速度,他开始融合这两个运动。他意识到线的斜率是随着圆柱或者是蚂蚁哪个移动更快而变化的。拉佩也在同样的水平上,但是他能够靠相对速度来区分这些曲线,直线、圆,以及曲线。对于马尔,进行了对螺旋线的初步尝试,他画的是一系列的Z字形图案。格兰预期一系列的圆,但是布朗和洛特发现了真正的螺旋曲线。

问题5很难完成,但是下面的这些结果也需要说明一下。马尔一开始就理解了圆柱的轴心随着旋转一直保持它的线性形式,而尼德在水平2时认为它的路径是一条平缓的曲线。所以在水平3A时,儿童不仅能意识到直线就是通过瞄准目标之后产生的,直线是仅有的一条不随观察角度而变化形式的线,直线也可以有一个方向上持续不断的运动产生(在《儿童的空间概念》第六章)。而且他们也知道了这是仅有的一条线,当它随着轴线转动的时候改变它的形状。

问题4比螺旋线要容易。当蜗牛和木板以相同的速度前进时,这个问题甚至在水平3A时就能立马解决。但是当其中一个物体或者是另一个物体移动更快时,这就依然具有很大的不确定性,甚至对于那些之前有过在相同速度上成功经验的个体也是一样[①]。斯特就是一个典型的例子,尽管这个运动是加速的,他也画了一个曲线形的斜线。

在水平3B上,螺旋线的问题就不再比摆线的问题困难了,但是在它们最终得到解答之前,还是会有一些初期的实验。然而,不像水平3A的儿童,水平3B的直接建构某些整体特征。对于摆线而言,这可能是一系列的弧线以及环或者是圆圈(而不是一个单独的曲线或者是单独的圆),对于螺旋线而言,是一个Z字形的模式或者是一个正弦曲线(而不是交替的圆,或者曲线)。所以我们可能会正确地谈及复合运动的一个预期系统,而在之前这仅仅是一个模糊的方向,指导着试误的过程。归纳已经进行到一个几乎是演绎的点上了,尽管它依然缺乏一些必要解释的标记。

从水平3A到水平3B,年幼儿童泛化(generalization)的发展是一个逐渐变化的过程,到水平3B,我们的每一个问题几乎都完全回答了。这是一种合成的努力,它类似于生成代表旋转的简单曲线的构造,由于运动本身是复合的,所以更难。假如你对前面章节有仔细研究的话,很明显,操作泛化的发展本身就是空间调节能力阶段上的连续。增长的协调性使得我们的被试定义他们观察到的关于双参考系统中的点:一个参照系统是车轮上的铅笔,滚筒上的蚂蚁,或者是木板上的蜗牛,另一个系统与车轮、滚筒以及木板相对静止的环境有关。水平3A和3B的儿童得到的真实的观察与水平2A和水平2B上的儿童得到的一样。每个被试看到同样的结果,每个人也有同样的自由进行实验,因为在每个个案中,实验者在没有铅笔的轨迹下运行了整个运动。但是假如较大儿童做得更好,不是简单地协调所有观察到的点,而是他们在观察方面也更好。当他们看到演示时,能够注意到一些不一样的结果,因为能够将它们与协调系统联系起来,协调系统是他们自己建构的,用来完成大部分的观察。观察本身能够作为一个参照系,特别是在水平3A时详细地阐述,在3B就更好了,但是相对于阶段2还为时过早。这就是为什么复合运动在阶段2时是相继出现的,而在阶段3时是同时出现的。如果这不仅仅是一个开始,就不会再有试误,如果我们转到阶段4的几个例子上,就会清楚地看到,此时这种双重协调是即时的。

第六节 阶段4:直接的演绎的解答——结论

尽管水平3B标志着协调系统的完成,但是这仅仅是在形式思维水平上,个体能够融合两个系统到单一的整体。所以只有到阶段4,才能说儿童掌握了相对运动的问题。

---

① 甚至在12岁或者13岁时,一些被试也不能在没有延长线的试误下解决这个问题。

并非所有的11或12岁的儿童都能解决摆线或者是螺旋线的问题。但是排除一些例外的个体，儿童也很难在这个阶段之前快速地地发现答案。下面是三个例子。

温(9;8) 直接画了一条真正的摆线。"你怎么知道？——*我想象它是这样的。*——看(第一次演示运动，没有铅笔的轨迹)。——*对的。我能看到我画的。*——假如我把铅笔放在中心和圆周之间呢？——*这一步会更小*(比如圆环会更往下)。——假如放在正中间呢？——*那么就只是一条直线了。因为中点一直待在同样的位置。*"

问题3 螺旋线：他画了一系列的有规律间距的平行的弧线。"然后呢。——(他将弧线的端点连起来。)——假如我很快地转动它呢？——*它们的位置会更紧。*——那么假如我慢慢地转动它呢？——*这条线会更粗糙。*"他用到的这些表述表明，他对于机械结构很熟悉。

万(11;10) 摆线："*它是一个很大的圆的一半*(但是他画的时候，弧线正确地延伸一些)。*当它向前运动时，它会变得更大。*"他继续画了一系列的弧线，有点儿不确定是否画圆圈，但是不久就决定不画圆圈。

对于螺旋线，他立刻反应就是一系列的等距的弧线，他将它们连接起来形成一个螺旋曲线。

欧北(12;11) 摆线："*这是一个半圆*(画成延长的弧线)。*随着它转动，它会更大，因为车轮是往前的。*——为什么你不会画出像这样的圆环呢(实验者画的)？——*因为当铅笔绕着它，它总是会在桌子上停止的。*"

螺旋："*它是螺丝钉的形状。*——假如我转得更快呢？——*那就会有更多的圈。*——假如我转得更慢呢？——*这条线将是很粗糙的。*"①

几何学上可能会列举这些回答作为曲线运动即时直觉的例子。但是甚至是在水平3B时，儿童也不能立刻建构这些曲线。我们可能有理由问，直觉到底起到多大程度的作用，同时在最开始的两个阶段，它们的缺失又是显而易见的。这个应该没有什么问题。相比而言，运动曲线的建构与欧几里得空间整体的操作加工紧密相关。

阶段1的儿童甚至都不能理解这些问题。因为他的几何直觉依然是物体静止时的轮廓，他不能感知运动表征时的曲线。从之前《儿童的空间概念》第一章、第二章的一些证据当中，我们会知道，甚至在静止直觉下，儿童也只是限制在形状的地形特征，而忽略了欧几里得和投影学特性。现在我们知道这些局限性的原因了：一个图形不是欧几里得图形，除非位置改变之后，整体和部分都会保留。阶段1的儿童能够移动自己的身体

---

① 这应该描述为，不是所有这个年龄的儿童能够给出同样清晰的回答。当木板和蜗牛的复合运用以并列平行和垂直线呈现的时候，侃(12岁2个月)在摆线问题上画了循环的花环。

和外面的物体,但是他的行为是整体的,而缺少任何运动路径的直觉。仅仅只是将意识当中到达的点与之前阶段离开时的点连接起来,但是这些都是静止的位置,而位置的变化作为一个动态的词汇是不考虑在内的。

阶段2最初,儿童表现出对于物体旋转路径的一些直觉。实验的设置有很大的帮助,因为在运动的物体上放置一支铅笔,我们就指出了像这样画它路径的可能性。在第一章中我们也发现,当回过头来考虑他们的日常生活时,阶段2的儿童开始重构他们自己位置的改变。但是,那些设法重构运动的路径或者是旅行安排的儿童面临着同样的困难,那就是是否这些位置的变化是他自己的或者是一个几何学物体的。就像已经在第一章第2小节中谈到的,没有关联这条路径中的那些突出的点到一个固定的标记系统中,不能重构位置变化之后的路径(或者是建构运动的曲线,这是一码事),标记系统也为距离以及包含的角度提供了参照系统。参照系统由固定的成分以及成分之间的联系组成。在第1章中我们看到,年幼的儿童在试着建构运动曲线的时候,如何依赖基于他们自己行为的个人格示(尽管问题中的曲线仅仅是他们每天走的路程)。这些主观格示给予了他们一些类似绝对的标志物或者是在走路过程中遇到的参照物,这些参照物是关于他们本身的,而不是其他的道路上的。结果,标志物本身就与一种僵化的,以自我为中心的观点联系在一起。它们不是关于客观整体进行组织,也不允许可逆的操作协调性。完全一样的问题在这些实验情境中遇到,水平2A的儿童不能理解一个正方形或者三角形的角在旋转的时候,遵循着一个圆的路径。他没有从一个参照点开始,不管是运动物体的旋转轴,或者是对应于桌子上固定的点(尽管这些点很清晰地表明了那张卡片是用来旋转的)。因此儿童可能在它旋转的时候看着它,但是还不能产生它的运动曲线。因为他没有参照系,他必然会将运动看作为绝对的,他参考的点也属于它本身的运动,当然这也意味着,运动的曲线假定是跟随着图形轮廓,一个正方形或者是一个三角形。只有当路径是静止给出的时候,就好像是旋转的圆,水平2A阶段的儿童才能成功地复述它。必然地,当重构复合运动时(问题2—4),他将整体合成的路径与它们本身的构成的曲线混淆了,因为这些只有在静止时单独来看才是明显的。

在水平2B,我们发现对于简单曲线的期望开始在直觉水平上出现。合成运动的曲线在一定程度上也是有差异的。假如想象的直觉为运动表征提供了一些能力,我们可能会说,在这个水平上它显现出来了,因为阶段1A的静止直觉这时给直觉的预期或者是明确表达的直觉让位。但是,没有假定一个特殊的能力来解释这个行为。谈到图像的唤醒作用或者是图像的象征功能,它忽视了这样的事实,即图像是一种内部模仿的形式,所以隐含着运动调节,这就是为什么它们适合于运动的直觉预期。假如影像在水平2B阶段更加有效,这也是因为影像的运动成分更加有区分性,而不是因为图像可以感知到特征的发展。在这个水平之前,影像一般是静止的,因为它被限制在感知运动的复制中,包括静止轮廓的分解。在水平2B,影像能够用来形成运动曲线的直觉轮廓,因为它们现在能够画出感知运动,不再限制于运动图形的轮廓,而是开始寻找一些外在的参

照,尽管整体的协调还是欠缺的。换句话说,儿童能够从一个图形中从开始注意它的特征,到后来集中注意力在它的旋转上。由于他还没有很清晰的概念,哪些关系是与运动的曲线相关联的,他在确定旋转点与顶点的等距时,仍会犯很多错误。当他开始区分复合运动时,也是完全一样的过程在起作用。

阶段3之前,运动的概念依然与图像直觉紧密联系在一起(尽管它们只是超出了图形的感知或者象征成分的能力)。阶段3,这些概念在感知上摆脱了之前内在的限制,变成具体操作形式,是可逆的,也可以允许多种多样的组成部分。所以,在七八岁时,运动的概念是位置变化和次序的亚逻辑运算(与逻辑顺序排列并列)[①]。结果是,运动依据静止的参考位置或者是固定的参考物体进行分组,就像第一、二、四章中表现的。这让水平3A的儿童能够通过记录一次运动点的位置和固定顶点(可能是旋转正方形或三角形的一个角)之间的距离来建构一个圆,从而描述旋转运动的曲线。但是复合曲线不仅仅是包含这些基本的协调,还包括另外两个结构。首先,建立一个运动路径中的选择点和参考元素之间的关系,参考元素按照二维协调系统或者三维协调系统进行分组(如子阶段3B所阐述的);第二,两个协调系统的融合,一个与运动物体有关,另一个是绝对的体系。这样的融合只是在形式运算阶段才能发生,例如阶段4。复合运动的曲线不是直接从图像直觉当中产生的,而是隐含着一个双重的系统结构,同时水平3B的操作实验,(到目前为止是由直觉影像决定的),通过增加的泛化不断地指导直觉。

只是到阶段4,演绎思维才立即出现真正的影像。假如我们选择忘记之前经历的图像,可能凭借一个纯粹的空间直觉来操作,保持所有直觉的图像特征,但这还是属于演绎合成。然而运动表征的最后一步与之前阶段的关系足以证明,这不只是包含一个简单的能力。推断本身与直觉不相关,同时演绎推断仅仅只是一种在简单或者符合运动曲线建构中包含的所有协调的简约的表现形式,这些曲线建构涉及单个和双重协调系统。建构的长时间过程现在被缩短为一种理解的转换形式。图像对于亚逻辑操作的建构(例如,连续体之间的内在关系)而言,相比逻辑关系的操作更合适。但是假如即使在第4阶段,图像成为运动曲线的表征的一部分,图像也没有发起和指导表征。这是简单的对于操作的象征性表达(符号本身有它的运动行为的来源)。操作是可逆的,允许合成的可能依赖于个体图像符号和收集的符号标记之间的交互作用,而无法归结为单纯的图像。

程南华译,朱莉琪审校

① 《儿童的空间概念》,第十五章。

第四篇
面积和体积

在第三篇，我们看到了坐标参照系的组织对于空间欧几里得运动各方面的具体表达是多么必要，这些方面包括二维和三维中点的定义问题、角的大小测量问题以及根据曲线的测量属性来构建曲线的问题。在掌握了一对一的矩形空间坐标和一对多的三角形空间坐标之后，儿童开始处理面积和体积的关系。第四篇开始介绍这些运算的研究。面积和体积的运算建构引出了一个新的心理学问题，它高于在二维和三维的测量中所遇到的那些问题。为了定义面积或体积中的一个点，被试利用二维或三维的测量，通过参照二维或三维的框架来调整它们。通过使用二维或三维的表格，他在每个二维或三维的各个点之间建立了一对一的对应。测量将位置的顺序关系转换为测量关系，但是其中所包含的运算却是逻辑乘法运算。与此相对应，面积或体积的计算暗示着测量关系的数学乘法运算。六个正方形单位所组成面积的概念，它所包括的不仅是在一个维度中由两个单位间距和在另一个维度中由三个单位间距所构成的表格建构，更需要对六个单元中点进行精确定位。由2个单位乘以3个单位所组成的矩形面积是通过数学公式2×3=6个正方形单位计算得出的，这里的正方形单位是面积单位，而非两维空间中的长度单位。同样，体积是三个测量变量的数学乘积，其结果为给定数量的立方体单位。

因此，我们必须要问，第三部分中所研究的测量坐标系统和面积或体积的欧几里得理解之间有什么关系。我们知道这些理解依赖于数学乘法能力的发展，但是我们不知道它们是否是和坐标系的建构同时出现的，还是说它们是后来发展的。如果他们是之后出现的，我们必须要问，为什么会有时间上的延迟？为了回答这些问题，我们采用了一系列的访谈。我们通过检验加法和减法运算以及面积领域的简单分割(第十一章、第十二章)开始。之后，我们再来考察面积或体积的翻倍问题(第十四章)。

第十一章　面积的守恒和测量，以及从较大的一致面积中拆分较小的全等面积[①]

正如在对距离和长度的理解研究中所做的那样，我们可能也会问，年幼的儿童能够将面积视为一个稳定的属性吗？他们能不能理解即便一个物体的形状发生了变化，它仍然是守恒的呢？在我们研究度量关系之前，这一问题必须得到解答。为了弄清儿童是怎样建构这一类守恒的，我们采用了通常的方法：呈现给儿童一个大的面积的图形，该图形由若干个小面积的图形以某种方式组织在一起。然后在儿童观看的时候，改变大面积图形整体的明显结构。之后询问儿童：尽管整体的部分被重新排列了，它大小仍然是恒定的吗？之后，我们考察对于不同年龄的儿童来讲，部分本身之间是如何比较的，这些比较最终是如何导致度量差异的？

但是，在进行这些考察之前，我们首先从一份关于面积构成的调查着手。换句话说，我们试图揭示，当通过重新排列各部分便可发现两个面积一致时，儿童对于相等有怎样的理解。在编制这份初步的调查结果时，我们希望在打破严格而特殊的实验程序的单调性的同时，尽量以自然的方式来介绍这一主题。

第一部分　从较大的全等面积中提取较小的全等面积

根据著名的欧儿里得定理，如果两个相等的部分取自两个相等整体，那么剩余的部分仍然是相等的。本研究主题旨在考察是否在任何年龄这一命题都是成立的。如果不是，为什么不是？这种恒等性又是如何建立的呢？首先，我们注意到它的建构暗示着面积的守恒。如果面积 B_1 由 A_1 和 A_1' 组成，面积 B_2 由 A_2 和 A_2' 组成，那么，如果 $B_1=B_2$，$A_1=A_2$，我们便会推测 $B_1-A_1(=A_1')=B_2-A_2(=A_2')$。但是，只有当整个运算过程 A 和 A′都假定为一个恒定的数值，并且现实中 B 的确通过 $A+A'$ 这一加法运算实现的时候它才成立。尽管这些问题是在处理增加某些部分或减去某些部分，其潜在的目的却是在研究守恒——不管是部分还是总体。以这种方式来分析总体的能力是测量活动的先决条件，因为正如在所有的测量活动中所做的那样，当测量面积的时候，我们假定部分单元是恒定的，并且可以以某些不同的方式形成一个不变的整体。

---

① 本章和 Mlles L. Du Pasquier 以及 H. Pitsou 合作完成。

第一节　方法和结果概要

给儿童呈现两个一模一样的绿色矩形纸板(见图17),其面积约为20cm×30cm,并告知他们这是两块草坪。实验者把一个小的木头做的牛放在每个草坪旁边,告诉被试牛有这些草可以吃。接着,实验者引入一个木头做的人,告诉他这是农夫。儿童首先注意这两个场地是相同大小的。如果必要的话,他可以把它们边对边地比较一下,以确保确实是这样的。这样他们就能意识到这两头牛有相同数量的草可以吃。然后他被告知,其中一个农夫决定在他的草坪上建一个房子:实验者把一个小的木头房子放在绿色纸板上(可能是1cm×2cm,计划中);或者,用一个立方体代表房子。然后,询问被试,这两头牛还有相同数量的草可以吃吗,很自然地,每个儿童会回答在那个没有房子的草坪上的牛有更多的草可以吃,而另外一头牛,因为有些草长在了房子被占据的领域,所以会失去这些草。在这一阶段,实验者必须小心,通过使用诸如"更多或更少的长草的空间"或者"绿色空间"这样的短语而非"房子的空间"这样的短语使他们形成面积的印象。之后短语可以简化,说成"更多绿色"和"较少的草"。自然,染成绿色的东西只有两张纸板的表面。——现在,另外一个农夫也打算建一座房子:实验者像第一个那样产生另外一座房子(给被试展示房子有相同的基础,在其他方面它们也是一样的;如果用的是立方体,立方体也是一模一样的)并且询问被试两头牛是否还有相同的"绿色空间"或者"绿色"。再一次地,每一儿童都回答是的。欧几里得定理的必要特征似乎在所有的年龄都是明显的。

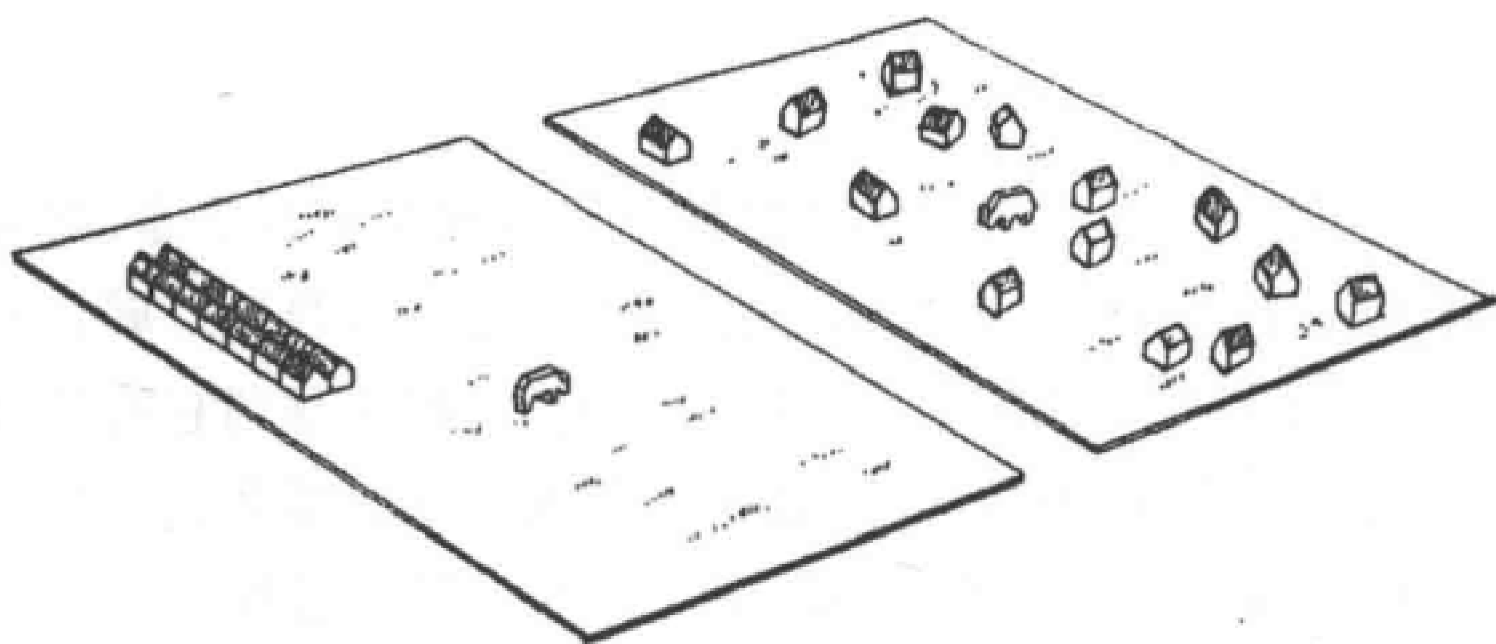


图17

但是尽管这样,第二个问题却可以通过转换排列而变化,由此引入中心问题。两座房子被放置在草坪(它们边对边地平行放在桌子上)的对应部位,之后,实验者移动一个房子的位置并且询问被试:"这样小牛还有同样多的草可以吃吗?"或者,第二座房子在开始便被放在草坪的另一个部位。通常,位置是这样的:第一个农夫把他的一座房子放在了草坪中央,而他的另一座房子在靠近中央的某个地方,而其他地方都是空余的;另

外一个农夫把他的房子头对头地建造在一个角落里，留出明显的一块更大的地方作为草地。不管哪种方式，这个问题都会以一个房子在草坪的中央而另一座房子在另一个草坪的角落而结束。

第三个问题。第一个农夫在草坪中央远离第一座房子的地方又建了一座房子，而另一个农夫则在与第一座房子相对的地方又建了一座房子。被试被问道："两个小牛还有同样多的绿色可以吃吗？"或"……的草可以吃吗？"现在，在欧几里得定理的运用上可能会出现差异。年长儿童倾向于不去考虑房子坐落的位置，认为被两座房子占据空间的草坪仍然是不变的，这是不言自明的；而年幼儿童将会被这种排列所欺骗。不管怎样，实验者都会耐心地在每个草坪上继续地引入更多的房子，总是在第一个草坪上留有空间地放置它们，而在另外一个草坪上彼此紧靠地放置它们。如果被试看起来是在犹豫，那么继续下去是合理的，即便是达到了15或者20对房子（每座与它对应的房子都是一样的）。我们发现，在第14对房子中明显理解欧几里得定理的被试在第15对房子的时候忽然错误地回答了问题，因为两个草坪之间的感官构造太不类似了，以至于他无法抵挡第二个草坪有更多的草地这一表面现象。

其结果和解决单维或两维空间中长度组成成分的实验所获得的结果是类似的。在阶段1，我们发现实施调查是困难的，但是在阶段2A，儿童明显开始感兴趣，但是他们拒绝承认剩余的面积是相等的，经常是在第一对房子的时候就这样。这里，并没有运算成分的迹象，判断完全基于感知表面。在阶段2B，我们发现有一段范围儿童采取中间反应（intermediate responses）：在某个数字之下被试承认除房子之外的剩余草地是相等的，超出了这个数字，感官构造就太不一样了。这里，在变化程度上有一个直觉的衔接，而非操作性的构成。但是，在阶段3，甚至阶段3A（通常在7.5岁，有时在6.5岁至7岁之间），儿童认识到剩余的部分总是相等的，这是基于一种对问题的运算加工，用推理的必要性说服自己。

第二节　亚阶段2A：基于感觉的判断，无加减运算

在5岁半或6岁的时候，问题仅仅通过观察，在直觉水平上回答问题。只要两个草坪上的房子的排列是相同的，儿童对绿色空间仍然相等的认识是没有困难的。两种排列之间的任何一种变化都会导致儿童立即否认它们是相等的。从年幼儿童过渡到年长儿童时，构造差异的变化会给他们一种绿地大小不相等的印象。

吉雅（4;10）　一块砖（六面体状，parallelopiped）被放在B_1（第一块草坪）上，另一块以相同的对应位置放在B_2上："在这块草坪上有和这块草坪同样多的绿色吗？——*是的，同样多。*——像这样呢（一块放在B_1的中央，砖的长与草坪的长平

行；另一块则放在B_2的一端，横向地放着)？——*不，这里*(B_2)*有更多的绿色*。——为什么呢？——*因为这些*(自由空间)*都是空出来的*？——这样呢(两块砖放在B_2中，一块放在B_1中央)？——*这个*(B_1，正确)*上面剩下的更多*。——这样呢(两块砖放在两个草坪的对应位置)？——*同样多*。——为什么？——(暗示两个草坪的绿色空间有相同的形状)——(两块砖被留有空间得放在B_1上，而B_2中的两块砖则挤在角落)现在剩下的绿色还一样多吗？——*不了，这里*(B_2)*剩下的绿色更多*。——为什么？——*因为这些房子连在一起，有更多的绿色留了出来*。——但是这里(B_1中两块砖之间)没有额外的绿色了吗？——*是的，有*。——那么这边留下的绿色比另一个更多。——*这里*(B_2)*的更多*。——假设我把两边余下的绿色都剪出来(剪出绿色的纸，把它们覆盖到每个纸板的绿色区域，我可以把这个地方(B_2)剩下的绿色覆盖到这个地方(B_1)剩余的绿色部分吗？——这里(B_1，指他们的感官上的排列，因为事实上两个草坪上的砖是一样多的)*有更多的砖，这里*(B_2)*将会有更多的绿色*。——那么这样(把B_1上的两块砖放在一起，B_2上的两块砖分隔开来)呢？——*这里*(B_1)*的绿色更多，因为它们全都靠在一起*。——那么这样(两边的排列相同)呢？——*两边的绿色相同*。——这样(B_1上的房子在右角上，B_2上的房子和一条边在一行)呢？——*这里*(B_2)*的绿色更多*。——这样(和之前几乎一样，但是B_2上的砖之间空出一点绿色空间)呢？——*这里*(B_1)*的绿色更多*。——(B_2上两砖之间的间距减小)——*一样*。——(间距稍微增加)——*还是这里的绿色多*。

多克(5;4)　“(只有一块砖，相同的排列？)——*有相同的绿色剩下*。——像这样呢(一块在B_1的中间，另一块横放在B_2边上)？——*也是一样*。——(两块砖在B_1上)——*这里*(B_2)*有更多的绿色，因为这里只有一块砖*(正确)。——像这样呢(两块砖分开放在B_1上，另外两块并排一起放在B_2上)？——*有相同的绿色剩下，因为每一边都有两座房子*。——(三座房子在B_1上，两座放在B_2上？)——*这里*(B_2)*有更多的绿色，因为这里的砖更少*。——(三个房子以相同的排列放在各自草坪上。)——*绿色一样多*。——(三块砖，在B_1中紧靠放着，在B_2中分隔开来放着)——*这里*(B_1)*有更多的绿色，因为它们全部都是紧靠在一块的*。——看这里(实验者拿出两个袋子，每个袋子里都装着16块蓝色的立方体，把这两套立方体排成4×4的正方形，这样多克能够看到它们是一致的，然后他把第一套立方体放在B_1上，把第二套放在B_2上)。它们是不相同的吗？——*不是的，因为这里它们都在一起*(对度量的推理就像他们测量物体似的)。——(实验者把立方体移开，把砖以相同的排列放回草坪)这样呢？有相同的绿色留下来吗？——*是的*。——这样呢(三块砖成一条直线紧靠在一起，线在B_1上是纵向，在B_2上是横向)？——*这里*(B_2)*有更多的绿色*。”

我们可以举出很多在水平2A的例子，因为这个水平很容易识别，不管是通过数字

或通过房子的排列还是通过从绿色区域中减去积木。但是所有这些反应都类似于那些我们所给出的例子。它们在说服被试认为剩余部分不相等这一点的复杂程度上，表现出等级上的差异，而这种差异是几乎觉察不到的。(1)当只有一块砖可使用的时候，将A_1放在B_1上，将A_2放在B_2上(A_1=A_2)，剩余为A_1'和A_2'，如果A_1的排列不同于A_2，则吉雅否认剩余是相等的。(我们将B_1上面剩下的空间称为A_1'，这是总面积B_1和积木面积A_1之间的差异。同样地将B_2上面剩下的空间称为A_2'。)多克和大多数被试一样，当只有一个东西占据两个草坪时，不管它的位置是什么样的，都会承认剩余是一样的。也就是说，如果A_1=A_2，并且都只包含一个元素，那么A_1'=A_2'。尽管结论可以以运算的形式来陈述——如果A_1=A_2，且B_1=B_2，那么$B_1-A_1(=A_1')=B_2-A_2(=A_2')$，但推理却并不是运算性的，正如所呈现出的那样，事实是如果A_1和A_2变大，或者更多的砖以不同的排列被使用，直觉不再正确。(2)当两块砖被使用的时候($2A_1$和$2A_2$)，只要两块纸板上的排列是一样的，被试会自然地承认$B_1-2A_1=B_2-2A_2$。但是，如果在它们的排列上有一点差别，孩子经常会否认剩余是相等的。换句话说，这些孩子总是在剩余的绿色面积A_1'和A_2'之间进行直接的比较，而忽视结果都是从相同的总体中减去相同的部分这一事实。因此，只有当他们从感觉上看起来是相等的时候他们才会承认A_1'=A_2'，如果表面上看来不是相等的，年幼的儿童并不会建构相等。但是，其他像多克这样有进一步发展的孩子，会像回答一个构件(element)时那样正确地回答两个构件的问题。(3)然而，如果三个物体被使用($3A_1$和$3A_2$)，他们再次从头开始。当排列相同的时候，他们承认剩余相等，但是当一块纸板上的砖相互靠着排在一起，而另一块纸板上的砖间隔开放的时候，他们会否认相等。(4)再者，有些人在三块砖问题上不存在困难，但是当使用四块砖的时候就会被表面误导。(5)超出4块之后，结果可能是相同的。(6)实验者可能通过给儿童一个共同的量尺来证明A_1'=A_2'，试图纠正错误。他剪出绿色的纸，把它覆盖到空余的地方，或者用相同数量的立方体覆盖到两块硬纸板的空余区域。多克的案例表明，这种演示是无效的(排除该水平的儿童缺乏共同量尺这一事实，正如之前已经被充分证实的一样)：他否认覆盖A_1'的16个立方体与覆盖A_2'的16个立方体相等，因为前者是紧挨在一块儿的，而后者不是。换句话说，感觉表象太不类似了。他使用相同的程序来估计度量结果，就像他真的在度量一样。但是与我们的预期相反，在该水平，他们不考虑任何度量的思维(在衡量长度时也是这样)。(7)对于一个给定的数字n，砖的数量nA_1和nA_2是恒定的。但是，当比较$2A_1$和$2A_2$时，吉雅只是简单地说："这里的砖更多。"仅仅是因为前者靠得更近一些(参考《儿童的数概念》，第三章和第四章)。

可是，尽管在阶段2A，相对的欧几里得定理还没有被理解，并且原因是清楚的，但我们不能忽视这些被试在某种程度上是能够认识到这一概念的。在达到某一个值n之前(这一n值因不同的被试而有所不同)，他们意识到如果B_1=B_2，且$A_1'=B_1'-nA_1$，$A_2'=B_2-nA_2$，那么A_1'=A_2'。即便随着n值的上升，他们停止对相等的再认。我们可以用多克的例子做一说明：当n=3时，他会被感知表象误导，但是当n=2时，他能够抵制住差异

的感知印象。其他人可能会在两块砖的时候被误导,但是一块砖时不会被误导,还有人可能在三块砖时仍能抵制住感知印象,但是在四块砖时被误导等。是什么样的成分使得这些被试在到达某一点之前仍能再认相等,而在超出之后却不能了呢?这不太可能是感知表象,因为只是在组成不一致时感知表象出卖了他们而已。也不可能是运算成分,因为这儿并没有出现泛化。当被试唤起一种与所呈现的对象相同的静态印象的时候,我们称之为直觉,并且认为它是简单的。当表征仍不具备运算的可移动性、可逆性和概括特征的时候,也可以通过初步的转换来清晰地表达。但是这种清晰表达的直觉通常隶属于水平2B(正如有关儿童的研究中所发现的那样,儿童逐渐接近运算水平,但还未达到该水平,参见第三节)。这些结果具有特别的指导意义(就像处理可归因于以固定顺序旋转的元素的顺序的实验那样[①]),因为他们表现出几乎不能感知到的梯级,从在所有的组成上都出现失败,经过直觉成分(开始简单,之后清晰),到达运算成分。直到解决方法可泛化到所有可能的情境这一点上,每一块不会干扰到相等再认的可以加进去的新砖块在发展上都标志着向前又近了一步。像这样的发展顺序清晰地阐释了运算系统如何达到最终状态,这一最终状态只有在感知运动行为进化出它们最早发端的时候才表现出均衡特征,感知运动行为是所有符号表征的基础。

像这些发生在水平2A的初级成分,是由前感知的预期或重构所带来的。正因为如此,他们优于那些直觉的或想象的成分。(在询问快要结束的时候)实验者将两块砖放在一起或者将它们分开,要求吉雅来比较这两对砖。当两块砖的排列类似时,他赞成剩余的绿色区域(A_1'和A_2')是相等的。当两块纸板有些微差异时,吉雅判断绿色区域是不相等的。但是当一块纸板上的两块砖之间有一点窄缝而在另一块纸板上的两块砖是紧挨着的时候,他赞同剩余的区域是相等的。这里,被试看到了差异,但是他预期关闭窄缝的可能性。我们可以说他提前感知到了这种效应,暗示着这种加工是一种视觉感知,因为预期与感知活动本身是一致的,但是与真实的直觉却是不同的。感知预期是直觉预期的先驱。两者之间的不同在于前者是一种转瞬即逝的印象,而后者则被赋予某种程度的永恒性,或者通过联想,或者通过符号表征。类似地,直觉预期经历了进一步地发展,直到它们获得了运算的可逆性,这代表整个发展序列的最终平衡(阶段3)。

概括而言,在阶段2A,儿童开始形成直觉成分,但还远未达到运算。在某些条件下,他们感知并想象在B_1和B_2中的砖块A_1和A_2是相等的,因此剩余区域A_1'和A_2'也是相等的。但是,无论怎么被感知或直觉的预期所调和,条件本身是一种限制因素,并且依赖于感知构造的规则。超出这一限制,这些原始的成分不再起作用,并且不管是总体的A还是剩余的A',我们没有发现恒定。因此,来自于相等总体的相等部分不再得出相等

① 《儿童的运动和速度概念》,第一章。

的剩余。逻辑学家可能会争论说，儿童并没有违背欧几里得定理，因为尽管开始两个部分是相等的(A_1=A_2)，当从相同的总体中减去的时候，他们丢掉了它们的相等性，所以剩余的部分也是不相等的($A_1' \neq A_2'$)。但这只是一种对儿童推理的一种不正确的解释。因为他们还不能保持减数、被减数以及剩余的恒等性，减法运算就和加法运算以及组合(composition)一样，对他们而言是无意义的。因为减法和加法都是可逆运算(或者更好的表达，组成可逆运算)，可逆本身就暗示着守恒，而守恒本身也暗示着可逆。

第三节　亚阶段2B：中介反应，阶段3：运算成分

水平2A提供了反应的一个系列，在到达房子的某个数字(1，2，3，…，n)之前儿童能够认识到剩余是相等的，但是在超出这一数字(如2，3，4，…，n+1)后总是会否认相等。这一在被试推理中发生回归的关键数字n因被试的不同而不同。但是却存在一个时间点，在这一时间点所有的被试开始产生怀疑，思考仅移动B_1和B_2表面的A_1和A_2是如何改变剩余面积A_1'和A_2'的大小的。正如我们所看到的，可移动性是这一发展中的每个阶段不断增长的一种品质，但是，对于我们而言，就是因为在这一阶段有更多的移动阐释，所以我们定义其为水平2B(6—7岁)。下面是4个例子，第一个是从水平2A(在调查的第一部分)向水平2B(在调查的第三部分)的过渡，而其他的例子则表现出对相关关系的逐渐掌握。

文(6岁)　两块砖紧靠着放在B_1上，而B_2上的两块砖则分放在两端："*这里(B_1)有更多的绿色。*——这样呢(两块纸板上均只有一块砖，且在相同的位置)？——*现在两边的绿色是相同的。*——这样呢(移动B_2上的砖)？——*相同。你刚才曾经把它那样放。*——这样呢(B_1上的两块砖相邻，而B_2上的两块间隔开)？——*这里(B_2)有更少的空间剩下。*——这样呢(将B_2中的间隔缩小)？——*现在相同了。*——这样呢(进一步缩小B_2中两块砖的间隔，而将B_1中的两块砖间隔开)？——*这里(B_2)剩下的空间更多。*——这样呢(两块纸板上的砖都是间隔放的，但是排列不同)？——*它们是相同的。*——现在呢(进一步增加B_2中两块砖的间距)？——*这里(B_2)的空间更多。*"

实验者然后转向第二部分中所描述的关于守恒的实验之一，将一些以不同方式组合起来的正方形图案展示给被试，以考察其是否认为面积或者空间保持恒定。被试的回答是类似的，这在水平2A是典型的。但是在某一个点，他面对着三个正方形构成了矩形的四分之一，另外三个正方形构成了另一个矩形的四分之一，前者是间隔放置的，而后者不是。当将这种排列与整个的矩形相比较时，他回答："事实上它们是相等的，但

是这里的空间(间隔开的正方形)更多。”这种回答是介于水平2A和水平2B之间的。

实验者然后回到原来的问题，现在文开始出现不同的回答。看到三块砖摆在B_1底部，而另外三块砖摆在B_2的边上，他说：“*有相同数量的绿色剩下。*——像这样(B_2上的三块砖靠近中央摆放，并且在某种程度上是倾斜的)呢？——*有相同数量的绿色。*——这样呢(将B_2中的砖间隔开)？——*这里*(B_2)*的绿色更多。*——是什么让绿色变少了呢？——*是房子。哦，它们是一样多的。*——为什么？——*因为还是三座房子，你只是把它们那样放罢了。*——这样呢(第四块砖在B_1中靠着放，在B_2中间隔开放)？——*这里*(B_2)*的更少。哦，不。是相等的，因为两边都是四座房子。*——这样(把它们间隔的更大)呢？——*这样绿色就变少了。哦，不，还是相等的。*——但是我是在说剩下的绿色。两边的空间是相等的吗？——*减少了点儿。哦，不！是的……*”

楼(6;1)　一块砖放在B_1上，另一块砖放在B_2上：“*有相同的绿色被剩下。*——这样呢(改变排列)？——*是相同的。*——现在呢(两块砖按照相同的形状并排摆在一起，但是摆放位置不同)？——*有相同数量的绿色被剩下。*——为什么？——*因为这两个正方形是相同的。*——这样呢(B_1中两块砖并排在一起，B_2中两块砖间隔开来放)？——*是相同的，因为在每个草坪上均有两座房子。*——这样呢(三块砖头对头的放在B_1的三条边上，三块砖放在B_2的中央)？——*是相同的……不，这里*(B_1)*的绿色更多。*——看(实验者在两块纸板的空余草地上移动牛)。——*是相同的，因为两边都有三座房子。*——(每块纸板上再加两块砖，B_1上的五块砖放在一起，而B_2上的五块砖间隔开放。)——*是相同的。因为两边的砖的数量是相同的。*——两边再加两块砖，一边放一起，另一边间隔开放。——*仍然是相同的。*——(B_2上的两块砖之间的间隔进一步加大。)你认为我们能用这边(B_2)的绿色全部覆盖住这边(B_1)的绿色吗？——*不，这边*(B_1)*的绿色更多。*——为什么？——……”

海克斯(6;4)　在刚开始的时候就不承认两边的剩余表面相等，甚至是在只有两块砖的时候，但当引入了一系列位置变化之后，他解决了这一问题。当有三块砖时，除非排列相同，否则他拒绝承认剩余空间是相同的。但是，即便是当两边的模型都是首尾相连的，如果B_1上的砖是紧紧靠在一起的，而B_2上的砖哪怕在头尾连接处有一点分离，他也会认为B_1上的剩余区域更大。经过一系列位置改变之后，他再次认识到了不管布局怎样，剩余区域A_1'和A_2'仍是相等的。相同的犹豫也发生在四块砖的时候，同样地，经过一系列位置变化，问题也得到了解决。这一过程在五块砖的时候也是一样……换句话说，在看到一系列的位置变化后，不管是多少数量的砖，海克斯都能成功地概括出剩余面积是相等的，并且发现，位置变化并不能改变剩余的自由空间。但是，他却不能从一个数字进行到下一个数字时直接得出结论。

乔(6;6) 能直接且正确地回答当两块砖和三块砖时相等的情况："因为房子都是一样的。"实验者然后把12块砖紧靠着放在B_1一端，而在B_2上放置三套并排在一起的3块砖，但是三套却放在B_2的不同地方，还有3块砖各自分开放在B_2的不同地方(先并排地展现给他两套12块的砖，证明这两套是相同的)："这两个草坪上剩余的绿色数量是相等的吗？——*当然是相等的。因为你把相同的房子放在了两边，你只是不同地排列了它们。*——现在假设我剪下这块草坪上的绿色的地方，再剪下这块草坪上的绿色的地方，把剪出来的一个放在另一个上面，我能把它们完全覆盖在一起吗？——*不能，这里(B_2)的更少。*——为什么？——*哦，不，实际上是相等的。*——这两边的牛有相同的草可以吃吗？——*这边(B_1)的更多一些，因为它满满的(连续的)。*——为什么那样就更多了呢？——*哦，不，是相等的，因为遮住它们的(砖)是相等的，所以剩下的也是相等的。*"

这些直观的表达和水平2A时的受限制的移动具有很大的差异。这里我们看到运算本身是如何从渐进式的表达中生长出来的。在开始的时候，文与处于水平2A的孩子无异，因为他也认为剩余是不相等的，因为它们的感知表象是不一样的。然后，他发现由六个正方形组成的矩形是相等的，尽管在一个矩形中的三个长方形之间间隔开了一点儿。但是，他并没有完全被说服，正如在他警惕而又矛盾地试图调和错觉和现实时所表现的那样，他评论道："看起来确实是相同的，但是这边仍然多一点儿。"现在，重新引入草坪和房子，又产生了新的违背。与刚开始时被感觉表象(隔开的房子似乎占据了更多的草)所主导不同，现在他在询问之后开始在两者之间摇摆不定。一种选择是做出直接的感知比较，但是现在却被另一种情况所平衡，也就是说判断剩余的面积是相等的，因为房子的数量是相等的："它们是相同的，因为都是有三座房子。你只是把它们那样放了。"对文而言，问题在于不断下降的直觉成分和刚刚出现的运算成分之间的关系还没有得到解决。后者从前者中发展出来，但是这种关系却被隐藏了，因为直觉会让他产生剩余区域的形象，但是现在他却能够进行运算性的思考了，他开始比较房子的数量并且从它们的一致中推论出草地之间的相等。楼的案例也是类似的，直觉和运算之间的问题也没有解决，但是楼却更愿意承认运算成分的力量。但是，对海克斯而言，并没有二者之间的冲突，而是从直觉成分向运算成分连续性地进化。他同时研究了房子位置的变化和剩余草地形状的变化，曾经出现过的补偿现象引导他认可剩余部分是相等的。但是，即便是三座房子时承认了相等，在面临四座房子和五个房子的相同问题时，他还是不得不从头开始推理。这里存在着一个直觉调节系统的连续进程，逐渐接近运算成分，但是里面所暗示的概括化还不存在。但是，到了乔司这里，运算成分最终战胜了直观表达。乔司已接近达到阶段3了，之前阶段的唯一痕迹就是在询问结束后的那么一点犹豫罢了。

最后，这里有两个阶段3(水平3A)的例子：

马尔(7;6)　第一个问题是，B_1上的紧靠在一起的三座房子和分散在B_2上的三座房子："*有相同数量的绿色被剩下，因为房子的大小都是一样的，并且房子的数量也是一样的*。——这样呢(十块砖以不同的形式排列)？——*仍然是相等的*。——但是你能看着它们回答我吗？——*不，看起来好像是这里*(B_1，房子紧挨着排列)*的绿色更多一些，但是却不是这样，因为有相同数量的房子*。——如果把这(B_2)上面所有小的绿色减下来，我能把它们放在一起组成这里(B_1)大的绿色吗？——*当然。如果房子的数量是相同的，那么剩下的也一定是相同的*。——但是，在这个大的草坪上吃草的牛不会比那个在小的草坪上吃草的牛吃到的草更多吗？——*当然不会*。"

奥格(7;8)　被直接呈现两块纸板上的12块砖。B_1上的砖被紧靠着放在边上，而B_2上的砖则分散排列："两边有同样多的绿色被剩下吗？"——(他大笑着)*当然了。如果两边都有12座房子，那么剩下的绿色一定是同样多的*。——但是在这里有很大的空间被剩下，而在那里，只有这些小的地方。——*是的，但是把它们合起来它们就会占据相同的空间*。"

这些回答与那些处于水平2B的孩子的回答非常不同。感知评价已经完全消失了，并且这里我们发现了即时的运算成分：形成减数的区域被归组在了一起(nA)，并且它们的总和从被减数中减去($B-nA=A'$)，由此剩下的区域被发现是相等的：$B_1-nA_1(=A_1')=B_2-nA_2(=A_2')$。同时，被试认为它们的相等是必然的("当然")和具有概括意义的["他们仍然是(或'总是')相等的"]。

这整个的序列形成了一个特别清晰的发展案例。直觉的甚至是感知的调节逐渐向可迁移的和可逆转的运算成分进化。不管年龄多大，我们所有的被试都同意，当n块砖占据了两个区域时，剩余的区域是相等的，但是仅限于它们的排列是一样的时候。但是这是一个特殊的例子，因为他们不需要推论出相等，而可以凭借即时的感觉。另一方面，即便只是一两块砖位置发生微小的变化，也足以令那些最为年幼的被试否认相等。稍后，他们学会了预期位置当中的补偿性变化，只要这些变化是微小的(因为砖块覆盖的面积总是由未覆盖的面积来补偿)。然而，当隐含的成分更为复杂时，预期便不起作用了。之后这种概括逐渐蔓延到三个元素的时候，然后是四个元素的时候……直到最后预期连同紧随的调节一起，达到概括化的可逆转的迁移，即运算成分。

最后，我们可能会问，为什么最终阶段在水平3达到。回答同一维和二维长度是一样的，因此结果并不让人惊讶，因为对于当前问题，只是包含了同种领域的一种类似运算，而没有任何其他的混合成分。将部分的面积(被砖或房子占据的领域)整合起来，然后从大的面积里面减去它们，包含着和整合并减去线条的部分相同的运算。两个案例中的成分都包括加上和减去总体中的亚集合部分。

被试发现n座房子占据了给定地方的绝对区域,移动这些房子到其他部分仅仅意味着它们又占据了其他地方的相同面积:剩余区域尽管在形状上有所不同,但是却有可比性。他的发现和在处理长度和距离时的发现是一样的。换句话说,他学会了任何物体在经历了位置变化之后仍保持着它维度上的守恒性,不管它们是否被占据,固定基点是一样的。总之,他学会了在长度、距离和面积成分背后的基本原则:剩余空间和新占据区域互相补偿的相互补偿原则。[1]

最后,这个问题的解决尽管简单,却暗示着面积的守恒。水平2的儿童还没有掌握加法组合问题,这也就是为什么他们不能从整体中减去相等部分的原因。但这是因为当位置变化的时候,房子的面积没有守恒,当形状变化的时候,空闲空间的面积被认为也改变了。年长儿童更能成功,并能达到可逆,因为他们掌握了相应的分组(grouping)。这种分组先于度量运算,不管是哪里,他们总能成功地确保面积的守恒,包括空闲地方的面积。下一部分我们更直接地解决面积的守恒问题。

第二部分　守恒及对面积的测量

只要有对面积的加法和减法的运算归组,就会得出守恒。但是只有当这些加工由位置变化所引发时,对面积的测量才变得有效。现在,我们将研究这两种发展。

第四节　方法和结果概要

从单纯的技术观点来看,对面积的守恒分析比对长度的守恒分析要困难很多(参考第3—5章)。尽管存在困难,但是第一部分较为清晰的证据和比较它们的结果之后,其原因很快变得显而易见。对于解释的有效性,我们并没有疑问。

为了发现在面积守恒的过程中,幼小的儿童加工了哪些想法,我们采用了两种补偿技术。在方法1中,实验者呈现一个由几个不同的部分组成的面积,并且改变这些部分的排列,看看被试是否能认为整体仍是恒定的。这里我们可能会采用两个纸板矩阵,每个都由6个正方形组成。总共有12个正方形,它们是相等的,并且每个纸板矩阵都是2个正方形宽,3个正方形长。在产生这些矩阵之后,实验者转移其中一个矩阵右上角的一个正方形到右下角,这样就形成了一个金字塔,最低的一行有三个正方形,中间有两个,而最上面有一个。儿童被问及这个图形的面积是否和另外一个保持完整的矩阵面

---

① 在任何情况下,对于像本研究这样的简单问题,互相补偿的原则都会被理解。一个更复杂的例子出现在后面的第八节。

积一样。被试经常能够认识到两个图形有相同的元素,也就是说都有6个正方形,但是却拒绝承认面积相等,或者有相同量的空间(类似于第一部分所采用的陈述)。为了区分这两个方面,并且避免任何言语的误解,实验者拿出96个小的木制立方体或一些小的纸板,它们恰能覆盖住第一个矩形。然后问儿童,这些是否也能刚好覆盖住第二个矩形。(立方体可让人想起第一部分的"房子",但是这里的数字故意设置得很大从而使得儿童不能计算它们)。但是,这种技术却得出一个奇怪的结果:某些儿童正确地预测相同数量的立方体能够覆盖住第二个图形,但是却不承认两个矩形的面积相等。这种自相矛盾的结果,对于儿童如何发展出对面积的理解,给出了一个有用的暗示。

因为方法1的结果并不明确,我们又采用了方法2。在方法2中,我们仅仅出示给儿童两个一模一样的矩形,然后实验者切掉其中一个的一部分移到相同图形的另一个部分。如他斜对角地将矩形切成两等份,并把两个部分放在一起组成一个三角形的形状,或者他切掉4个角,把它们对着边放,产生一个不规则的六边形等。如果可能的话,任何一致的图形都可以被采用,除了矩形之外。问题如下:"这些大小相同吗?""有相同量的空间吗?"等。这些是变化的并且重复的,以确保回答是对类似面积的判断。但是解释仍然是一个需要谨慎的问题。因为从物理上来讲,面积总是不能和它的第三个维度分离(无论我们所使用的纸有多么薄),这意味着总是存在着儿童将面积守恒与物质守恒相混淆的危险,而我们知道,对物质的守恒要到7—8岁才能达到[①]。同时,儿童不能区分面积和固体物质本身就是很有趣的,因为它显示出儿童存在对平面上的地点与占据该位置的能够移动的物体上的地点理解上的分离。

然而,如果仅仅是这些的话,就其本身而言,这两种方法所产生的结果不可能没有疑虑地用理论解释。但是,首先,它们与第一部分的发现是完全一致的,毫无疑问,儿童是在对面积做判断,但是却存在着一个从非守恒到部分和直观守恒再到必然的和运算守恒的发展过程。第二,他们与通过对面积测量的仔细分析所得出的结果也是一致的,正如在方法一中通过叠加面积所执行的那样(不管部分面积是单元正方形还是其他的)。因此,我们有信心提出下面的发展模式。它与主导一维或二维世界中长度的守恒和测量是一样的。

即便在水平2A(像在水平1一样),儿童也把自己局限于感知判断,当表面被修正的时候面积是不守恒的。他们也不能衡量面积,因为他们缺乏移动中介(moving middle term)的守恒,因此也没有转换性。在水平2B的儿童渐渐开始做出一些正确的判断,但是他们的成功是直觉调整的产物,因此缺乏概括性。同样的,现在我们发现了某种程度的转换性,因此在水平2B开始看到测量了,但是却存在着很多局限。在水平3A,当形状改变的时候,开始出现面积的运算守恒(尽管守恒局限于被周围区域包围的面积,还没有扩展到外面的补偿区域)。现在,中项开始作为一种共同的尺度起作用,因为一致被

① 皮亚杰和英海尔德,《儿童数量的发展》,第一至三章。

认为是一种转换关系。但是儿童仍然不能理解单元概念，因此当计算一个面积的总量的时候，他们将它的所有部分计算为相等的，而不考虑它们的尺寸。最后，在水平3B，守恒被概括化，覆盖到补偿区域，这个水平标志着真正的测量的开始，包括单元叠加。

第五节 亚阶段2A：无守恒

细想一下阶段1，几乎没有收获，因为很小的儿童还不能理解问题。但是在水平2A，他们能很好地理解问题，但是他们的回答却显示出对守恒的完全缺乏。他们意识到两个面积在开始是相等的，也理解修正的形状只是对某些部分排列改变的结果。但是他们却不承认面积彼此之间仍是相等的。因此，在方法1中，他们不会同意刚好覆盖住矩形的立方体或卡片能够重新排列刚好覆盖住修正的图形。下面是一些例子，示例了这两种方法。

布罗(4;6) 方法2。实验者呈现两个大的正方形，被试认可它们的全等性(congruence)。然后实验者把一个正方形切成两个长方形，把它们彼此垂直地排列："这里(两个长方形)是否有和这里(大正方形)相同的空间？——*不，不再相同了，因为你已经切了它。*——有一边的空间是不是更多呢？——*是的，这里(两个长方形)的空间更多。*——但是刚开始的时候这些地方不是有相同的空间的吗？——*是的。*——好，那它们现在不相等了吗？——*不，你已经切了它。*"

实验者现在呈现两个一模一样的矩形，并且把其中的一个切成一个小的正方形和一个小的矩形，但是它把两个部分仍放在一起，这样矩形的原始形状并没有改变。"它们仍有相等的空间吗？——*是的。*——它们是完全一样的吗？——*是的。*——这两个呢(保持被切的那个还是原来的形状，它的长边是竖直的，但是把那个完整的矩形旋转一下，使它的长边水平放置)？——*那一个(完整的)更大一些。*——为什么？——*因为你把它朝错误的方向转了一下。*——这两个呢(另外一对一模一样的矩形，两个都横向放置)？——*它们是相等的。*——现在看着。(实验者)斜对角地将矩形切成两等份，并把两个部分放在一起组成一个三角形的形状)——*那个(三角形)更大一些。*——为什么？——*因为它没有像那样切。*——这样呢(把矩形切成6个小的正方形)？这个上面是否有和这些上面一样多的空间呢？——*这里(6个部分)的空间更多，因为这里有很多它们。*——这样呢(重新排列三角形的两个半份组成一个矩形)？——*你已经那样放过了，所以现在和以前是相等的。*——是吗？——*这里(6个部分)的空间更多。*——(部分重新被放在一起，形成一个矩形。)——*哦，现在是一样的了！*——这样呢(把部分分散一点，但仍保持着成对)？——*这里(三个小的矩形)有更多的空间。*

克里(5;6)　方法2:他认识到两个矩形都是一模一样的。实验者把一个小的矩形从其中一个大的矩形的顶端剪下来,把它沿着矩形下面的剩余部分的边放置,使得两个图形刚好延伸。"*不,它们现在不再相等了,这里(完整的矩形)的空间更多*。——这样呢(把小的矩形替换掉,代之以一个小的三角形,这个三角形的底边与下面剩余图形的上边对放,并且靠近下面的剩余图形)?——*这里(不规则图形)有更多的空间*。——为什么?——*因为它更大*。——这样呢(再换回来)?——*不了,这里(完整矩形)的空间更大,因为那个(另一个图形)很瘦*。——好,我可以重新排列这些碎片,把一个刚好覆盖到另外一个上面吗?——*不能*。"

佩拉(5;6)　方法2:两个相等的正方形,"*有相等的空间*。——这样呢(把其中一个剪成4份)?——*那里有更多的空间,因为它们全都在一起,你从来没有剪过它。这里你剪了它们,所以它变少了*。——(实验者在原来的形式上重新排列了这些部分)这样呢?——*在这个真正的正方形上的空间更多*。——为什么呢?——*因为你从来没有剪过它*。——(实验者现在把那个"真正的"正方形剪开,组合成一个长方形)现在呢?——*这里(长方形)的空间更多,因为它更大*。——(第二个正方形的四个部分被间隔开放)——*那里(四个部分)的空间更多,因为它更多*。"

盖(5;2)　方法1:两个矩形,一个红色一个蓝色,都由6个正方形构成,叠在一起,盖认识到,"*它们是一样大的*。——看我把什么放在了这个上面(把96个立方体放在蓝色的矩形上面)。如果我想的话,我能把它们也放在那个红色的上面吗?——*是的*。——为什么?——*因为它们的空间是一样的*。——好。(实验者把立方体放在红色的矩形上面)这样呢(两个矩形的六个小正方形均被分开一点)?——*也是一样*。"实验者现在把蓝色的正方体合并到一起形成一个矩形,把红色矩形右上角的正方形拿掉放在右下角上,形成一个金字塔状:*AB-CD-EF*现在变成了*A-CD-EFB*。"像这样还有相同的空间吗?——*不,空间变小了*。——为什么?——*因为它像这样*(指不规则的轮廓)。——那么原来那些放在上面的小正方形呢,我还能把它们放上去吗?——*不,它将占用较少的正方形*。——为什么?——*因为它像这样*(指右边的不规则性,好像缺陷就在那里)。——现在呢(重新复原为矩形)?——*是相同的*。——像这样呢(把六个小正方形排成一条线:*ABCDEF*)?——*不,这里有更少的空间。它是一条线*。——(蓝色矩形上覆盖着两张卡片,一张覆盖*ACE*,另一张覆盖着*BDF*)我可以把这两张卡片覆盖到那里(*ABCDEF*)吗?——(他认真地看着它们)*是的,可以*。——那么是有相同的空间吗?——(不太确定。)——好,看这个(三张卡片覆盖到蓝色矩形上面,分别覆盖*AB*、*CD*和*EF*)。我们可以把这三张卡片刚好覆盖到那里(*ABCDEF*)吗?——*不,你只能覆盖两个*。——(现在96个立方体覆盖到红色正方形的一列上面)如果我把这些放在那里(蓝色矩形),它们能刚好覆盖住它吗?——*不,你不能覆盖住它,那里有太多空间了*。——这三张卡片呢(在蓝色的矩形上,覆盖住AB、CD和EF),你跟

我说我不能把它们覆盖到这里(红色的一列)?——不,这里没有足够的空间。——看(实验者把卡片移到红色的一列上)。——哦,是的,可以!——为什么?——它们有相同的空间。——现在我可以把这些积木(96个立方体)放在这个(金字塔状)上面吗,我刚刚把它们放在上面过(当它是一条直线ABCDEF的时候)?——不,它们大小不相同。——数一下正方形。——1,2,3,…6。——之前呢?——6个。——这里呢(蓝色的矩形)?——也是6个。——它们有相同的空间吗?——不。"

马特(5;9) 方法1:他比较了一下红色和蓝色的矩形:"它们大小相同。——(实验者把几张纸板覆盖到蓝色的矩形上面)这些纸板也刚好能覆盖住红色的那个吗?——是的,它们的空间都是一样大的。——这样呢(把矩形中的正方形B移到EF右边形成一个金字塔形状)?——不,它们的空间不再相同。——为什么?——这里更大(指金字塔的底座)。——假如我用这些小的纸片(原来放在蓝色矩形上面)覆盖住它呢?——那样不管用的。这里更大(再次指金字塔的底座)。——如果我这么做呢(重新排列6个红色的正方形组成一条线*ABCDEF*)?——那样会使它变得更大。它有更多的空间,因为它是一条线。——我可以用这些相同的小的方块(之前覆盖住蓝色矩形的96个立方体)覆盖住它吗?——不,你还需要更多的小方块。——这些纸片呢?——纸片不够,不能覆盖住它。它太大了。——看(实验者现在用纸片覆盖住了红色的矩形)。——哦,它们的空间是相同的!——这样呢(三个分开的矩形,每个都由两个正方形所组成)?——不再相同。你需要更多的纸片(比原来覆盖住蓝色矩形的)。——我可以用这些小的方块(96个立方体)覆盖住它们吗?——不,方块太多了,没有空间放下它们当中的一些(明显改变了他的判断)。——为什么?——红色的上面空间更少。——我们来试一下(开始放方块)。——不,它们放不上去。——(排放完成。)——哦,可以。——这样呢?(他被要求比较一个由四个蓝色的正方形组成的大的正方形和四个同样的正方形组成的一列)——不,空间不相等。这里的空间更多。"

吉尔(5;11) 方法2:他被要求比较两个大的正方形:"它们的大小相同吗?——是的,相同。——为什么?——(他把一个覆盖到另一个上面予以证明。)因为我可以这么做。——现在呢(把其中一个分开形成两个矩形,并把一个矩形放在另一个矩形的右角上)?——那里(矩形)的空间更多。不,这里(正方形),因为你没有分开它。——当我分开它的时候产生的什么影响?——那样使它变小了。——(两个矩形排成一条直线。)——这样它更大了,因为它是这样放的(横排)。"

路德(6;0) 方法2:他把两个相等正方形予以叠加,和吉尔一样,他也注意到它们是相等的。实验者沿对角线切成两个三角形,把一个三角形沿另一个三角形的边延伸放置。"这里(完整的正方形)更大,因为它全部都是正方形,那样就会有更

多的空间。——你可以把它们再放到另一个的上面吗？——是的(他重新复原分出来的三角形，并把两个正方形叠起来比较)，*这样就好了*。——那么现在不是有相同的空间吗(把三角形重新放回到图形的上方)？——*不，这里有更多的空间*(改变了他的想法)。——这样呢？——……”他继续将切出来的部分放回去再将两个正方形叠起来比较，但是却坚持认为当图形的部分被转移的时候变大了。“*这里变大了，因为你做了一个改变*。——我可以把一个覆盖到另一个上面吗？——*是的*。——那么它们空间一定是相等的。——*不*。”

我们对这些回答的一般趋势足够熟悉了。这里我们发现了和距离、长度类似的守恒缺乏(参考第三、四、五章)，它们在量上一般是连续的(物质等)[1]，而存在不连续的集合[2]，等等。然而，我们感到面积的转换似乎拥有一种特殊的性质。对于不守恒的原因也是一样的。因为儿童缺乏与可逆性相关的运算成分，他在心理上不能补偿各种各样的修正。因此，每种排列都是基于其本身的特点从感觉上来判断，而不是参照之前的排列。的确，通常情况下他都是在感觉上确信形式上的修正产生了面积的改变，甚至当他还不能完全决定是否比之前大或小的时候。但是站在感知的观点来讲，以困惑的转变形式呈现正方形、矩形、金字塔状和不规则的六边形是没有什么共同点的。在这个水平，这些形状是如此抽象，以至于实验者对于所使用词语给儿童带来的意义都有点不太确定，也不能完全确定儿童是在对面积做出估计还是某些其他的维度。这就是为什么本实验在某种程度上不同于守恒的其他研究之处，其他研究都在第三至第五章或其他地方出版的材料中有所呈现。这种差异值得进一步的考察。

不管怎样，在任何领域，守恒的发现暗示着逻辑或亚逻辑(sub-logical)的“分组”(grouping)或者(数学上)各种运算的群组的建构，这也就是为什么对这些变量及它们的首次出现进行的研究如此重要。在某种程度上，对它们的恒定性进行认识的过程也是对相应概念如何组成进行衡量的过程。对于面积概念，组合不过是归组或者将部分相加形成一个整体，守恒也只是部分的排列不会影响它们的总和罢了。到目前为止，面积的概念和我们所研究的其他概念之间还没有差异。关于部分的加或减，我们从第一部分(房子被用于减少草坪上草地的面积)了解到，水平2A的儿童还不能将一系列部分进行归组，因为他们不能建构该部分中我们所关注的恒量。但是，当我们像这样研究面积守恒的时候，面对着这样一个事实：每一次部分的重新排列暗示着一个在性质上全新的图形的形成(尽管在量上它的价值仍是不变的)。当把一个矩形变为一个三角形，询问儿童是否还有相等量的“空间”时，我们希望了解面积是否仍然是守恒的，“面积”这一词汇指的是被边缘区域所包围着的图形所形成的抽象的几何概念。这一复合体远不能运

---

① 皮亚杰和英海尔德，《儿童数量的发展》，第一至三章，以及皮亚杰和斯泽明斯卡，《儿童的数概念》，第一章。

② 同上，第二章。

用到重量守恒之中去，当集合需要逻辑或者是数字时，守恒完全是不存在的。因此，当实验者改变一系列组件的排列，将它们改变为一条直线时，它们的感觉表象对于直觉式判断的被试来讲也改变了。但是，从视觉表象中抽象出元素的数量，似乎比从三角形或矩形的图形中抽象出面积要容易得多。更为重要的是，通过改变面积的形式，我们自动地拓宽或者减少了它的边缘区域，这反过来又影响了儿童的拓扑直觉，而拓扑直觉正是形成儿童空间领域思维的起点。

在我们的研究中，产生了一个和距离守恒尤其是长度守恒类似的问题（参考第3—5章），但是在那里这个问题还不算尖锐。在那里，通过改变直线式的运动路径（如之字形、直角等）询问我们的被试是否还具备长度守恒，我们自动地引入了路径长度（是不变的）和性质上隶属于图形（明显改变了）的对立（参考第五章）。但是那个时候我们能够利用儿童对运动的直觉帮助他们理解路径，这样至少他们可以理解问题本身。

面积的困难在于，对于直觉判断而言，伴随着转变的发生，并没有方法将图形与原来给定的图形等同起来，因为两个图形的形状并不一致。它们在面积上相等只是因为存在从一种排列中排除出去的空间和在另一个排列中被纳入的补偿，在这一过程中图形的属性发生了改变。这种补偿是一种必要的关系，但是它的再认，就像其所暗示的对部分的加法运算一样，依赖于推理的抽象形式。水平2A中的问题尤其有趣，因为在水平3A的时候它被克服了。换言之，面积的守恒和各种其他恒量（不连续的集合体）的守恒一样，在相同的水平被达到。我们可能得出结论说，相较于年长儿童，对年幼的儿童而言，对集合体的感觉表象比我们所意识到的要重要得多，年幼儿童的推理是直觉式的，而年长儿童的推理是逻辑式的。此外，一方面，在原则上，面积恒常性和性质上几何图形的异质性之间的对立似乎不存在差异；另一方面，逻辑或数量集合的感知形式与它们的密度或“力量”之间却又形成强烈的对比。

因此，我们可以进一步研究，为什么当图形的部分排列被调整时，我们年幼的被试拒绝承认图形的面积仍然是守恒的[①]。他们所给出的原因对于我们理解他们从简单一致向组合一致的第一步转变给了很大的启发。当两个正方形是一致的时候，布罗承认它们是相等的，吉尔和路德自发地通过叠加证明这一点。简单一致来源于叠加，当两个被比较的图形是完全一样的时候，它是适用的。它是在第二章“相互转换”标题中我们所讨论过的一种行为的特殊案例，因此也是最终发展出测量的最早表现之一（尽管当比较视知觉层面的，且没有位置变化的时候，它比视觉转换来得要晚）。但是，当两个一模一样的矩形朝向不同的时候，我们的被试之一布罗，声称其中一个更大，因为你已经把它朝错误的方向旋转了一下，好像改变图形的倾向会影响它们彼此之间的一致性一样。当两个正方形中的一个被切分成两个矩形，彼此间成直角放置时，布罗刚开始

① 这一研究在历史上并非没人感兴趣。众所周知，古希腊的数学家对过度依赖于位置变化的任何建构都持怀疑态度，好像后者会改变内置元素一样。

承认该图形和另一个正方形有相同的空间,但是不承认它们的面积也是未变的,因为他说"你已经切了它!"之后,当两个部分重新组合的时候,布罗很惊奇地发现整个的面积是相等的("哦!现在它们一样!"),但是再次把部分延伸开来放置会导致他得出结论说"有更多的空间"。克里则更离谱,他甚至否认部分可以以原来的形式重新组合。佩拉,在看到一个正方形的四个部分以原来的形式重组后,则否认这个正方形和原来完整的正方形的大小相等:"这个真的正方形的空间更大,因为你没有切它。"换句话说,整体不等于部分之和,即便他们原来的排列被重新组合了。路德认识到部分总可以被以原来的形式重新组合和叠加,但是仍然相信形式上的调整将会产生更大或更小的面积,因为它们包含了"翻转"或更长的边缘。最后,盖和马特拒绝相信,能覆盖住原来图形的96个小立方体或者纸板也能覆盖住调整的图形(鉴于我们上面所陈述的,这并不惊讶),甚至在进行了完全的演示之后,也不能使他们相信面积是相等的。这些共同的测量手段的使用都不能令这些被试证明它们的恒等性,因为他们的思维缺乏可传递性。当两套由6个正方形组成的矩形排列不同时,盖甚至否认它们相等。

我们不得不得出结论认为,在这个水平,组合一致——基于两个总体的部分相等而判断两个总体也相等——还没有可能。这是因为以下原因:(1)当总体被分成部分时,它不再和之前一样,因为它的连续性被打破了(参考第五章)。(2)任一部分位置的改变必然会影响到总体的面积,因为移动到的地点并不能精确地补偿它所离开的位置(参考第六章,这是基于对长度守恒的相同的错误推理)。(3)当总体的部分被间隔开时,在包含间隔的总体面积和不包含间隔的总体面积之间开始出现迷惑。(4)当图形被转化时,它的形式和边缘长度也发生改变(如路德对"旋转"的推理)。(5)儿童不能利用共同的测量手段,因为他们的思维缺乏传递性——这其中的原因上面已经提到。(6)即便当他们认识到了构成两个图形的单元数量相同时,如果单元的排列发生了变化,他们也不能推论它们的面积也是相等的。这其中的原因和上面也是一样的。

这六个原因可以被浓缩为两个主要原因:儿童不能运算性地加总各个部分;他们也不能利用固定的地点作为参考,协调移动的部分。

第六节　亚阶段2B:中介反应

和通常一样,在水平2B,儿童正确地回答我们的一些问题,但是他们的成功是一系列试误的结果。他们通过解释调节而循序渐进,缺乏概括和运算成分。

派尔(5;10)　方法2:两个正方形被承认是相等的。其中一个被切成三个矩形,然后被重新组合。"*有相同量的空间。*——为什么?——*因为你把它们拿走,但是又把相同的东西放回去了。*——像这样呢(把正方形进行进一步的切分)?——

这个(完整的正方形)更大。——为什么?——*因为那些有点少*。——好,如果我加上这一点呢(原来并没有被拿走的正方形的一小片)?——*是的,现在相同了*。——(加上的一小部分被移除了)假如我把这些小的部分再放一起,组成一个正方形,它还和原来一样吗?——*不,它会更小*。——如果我也加上这一点呢?——*是的,那样的话就够了*。"

查特(5;11) 方法1:矩形被转化成一个金字塔形。"*这个(金字塔形)的空间更多*。——为什么?——*因为它的形状*。——如果我用小的立方体盖住它呢?——*将会有更多的空间剩下*。——(正方形被重新组合形成一个矩形,但是右边的三个正方形比左边的三个正方形略高一点)这样呢?——*是的,这样就有相同数量的立方体了*。——那么这个和在矩形上的空间是一样的,是吗?——*不,这里的空间更多*(看着图形中底端突出出来的正方形)。——如果我用立方体覆盖住它呢?——*将会需要更多的立方体*。——这些呢(三个蓝色的正方形,一个放在另一个上面,竖直放置,而三个红色的正方形水平放置)?——*是相同的,有相同数量的空间*。——像这样呢(红色的正方形被间隔开)?——*不,不再有相同的空间了*。——如果我把立方体放上面呢?——*它们不能全部都放上去*。——试一试。——(他这么做了)哦,*是的!刚刚好*。它看起来是小了点。——好,像这样呢(三个蓝色的正方形成一条线放置,而三个红色的正方形以三角形的形状放置)?——*不再相等了。这里(成一条线)的空间更大*。——为什么?——*它更长*。——用立方体试一试。——(他把它们放上去)哦,*是的,两边需要相同的数量*。——这样呢(四个蓝色的正方形排成一条线,而四个红色的正方形排成一个正方形)?——*这里(大的正方形)的空间更大*。——如果我把立方体放上去呢?——(他开始认真地研究)*它们全都放上去了,它们有相同数量的空间*。——(6个蓝色的正方形排成一个矩形,而6个红色的正方形排成一个金字塔形)这样呢?——*不,这里(金字塔形,指示着它的边缘和角度)的空间更大*。——如果我用这96个立方体试一试呢?——*它们需要的立方体将是一样的,因为它们包含正方体的数量是一样的,都是6个正方体*。"

布斯(6;0) 方法1:矩形被转化为一个金字塔形(正方形*B*和*EF*排成一行):"我能把所有的这些小立方体放上去吗?——*不,你不能了。立方体太多了*。——好,那还有相同数量的空间吗?——*不,因为这里有个弯*(正方形被移动的地方)。——像这样呢(图形被重新组合成矩形,右边的三个正方形被稍微错开)?——*那样的话就可以了*。——(立方体被放上去)你说对了。这样呢(重新排成金字塔形)?——*不,那样不行,因为你刚才已经弄成那样了*(指着被移动到EF右边的*B*原来的位置)。——哪里的空间更大呢,这里(矩形)还是那里(金字塔形)?——(他考虑了一下)*有相同的空间*。——这些立方体能够全部覆盖上去吗?——*不*。(他试了一下)哦,能。——这样呢(排成三角形)?——*这样也是一*

样。——现在我们这样放(将正方形按照ABCDEF排成一行)。——*在红色的上面(一行)将会需要更多的立方体*。——试一下。——*哦,它们是相同的!*”其他各种各样的排列也被提出,包括圆形,不同的角度,等等。但是现在每次他都能确信面积是相等的,不管排列怎样,96个立方体会刚好覆盖住他们。但是当薄的纸片而不是立方体作为共同的测量手段的时候,他又开始怀疑。最后,他承认了这也不会影响它们的恒等性。实验者继续将正方形进行拆分。再次地,他又开始怀疑它们是否有相等的空间,以及96个立方体是否能刚好放上去。他通过自发地将它们放在一起,然后慢慢地将它们移开,让自己确信分开的部分和整体也是相等的。

桂(6;2)　红色的矩形被转化为一行ABCDEF:“*它们不能将它全部覆盖住。红色的部分更大*。——(实验者重新组合成红色的矩形。然后将右边的一半往下移一点,这样ACE和BDF被错开了)现在是一样么?——*不,这里更大*(指示从图形下端突出来的正方形F,但是却忽视了从上面突出来的正方形A)。——你试一下。——哦,是的,能。——像这样呢(增加错开的量)?——*那样也是一样*。——像这样呢(排成一个金字塔形)?——*不,它们不能完全覆盖住它了。它的上面有一个,然后两个,然后下面有三个,所以它们的空间不一样大*。——试一下。——哦,是的,*是一样的*。——像这样呢(两行成直角放置)?——它们是一样的。——像这样呢(三对被交错开)?——*仍然是一样的*。——(正方形被进一步分开。)——*也是一样*。——(呈之字形排列)——(他想了一会儿)是的,*也是一样*。”

保尔(6;3)　方法2:两套相等的正方形,其中一个沿对角线切开,将切开的一半的直角边沿另一个的直角边对称放置:“红色的空间和蓝色的空间一样大吗?——*不,它更小,因为你把它切掉了一点*。——我们可以把其中的一个完全覆盖到另一个上面吗?——(他试了一下)是的。——这样呢(将正方形分成两个长方形,并将其中一个长方形放在另一个的下面,组成一个新的长方形)?[①]——*是的,空间还是一样的,因为那里*(小正方形原来的地方)*的正方形跑到了那里*。——(实验者再次将正方形沿对角线切开,将切开的一半的直角边沿另一个的直角边对称放置。)——*是的,是相等的*(并且这次他暗示着面积是如何被补偿的)。”

戴尔(6;3)　方法1:红色的矩形被转化为一个金字塔形。“空间还相同吗?——*不,它变小了*。——如果我把这些(96个)立方体覆盖上去,我能把它们像那个一样全部覆盖上去么?——*是的*。——为什么?——*因为它们每一个都会有一个空间*。——像这样呢(六个正方形全部间隔开)?——*不,现在不是所有的立方体都有一个空间了*。——为什么?——*因为空间减少了*。——我们来试一下(把16个立方体覆盖到一个正方形上)。——*哦,是的。它们每一个都有空间*。——为什么?——*因为那里的空间和这里*(蓝色矩形)*的相同*。——那些也是

① 假设正方形被切成两半(E.L.)。

么？——*哦，不，那里的空间更少*。——（立方体被覆盖到第二个正方形上。）——*它们不能全都放上去*。——（剩下的正方形都被覆盖上了。）——*哦，它们能！*——现在呢（正方形被成对放置）？——*也是一样*。——（正方形重新被分隔开，并且间隔得很大）——*也是一样*。——这样呢（在矩形和金字塔形的外面分别画出它们的轮廓）？——*不，这里（矩形）的空间更大*。——为什么？——*哦，不，和之前是一样的*。"

梅（6;3） 方法2：两个正方形被认为是一样的。"假如我把这个角切下来放在这里呢？——*那样会使它减少*。——为什么？——*因为它不再跟原来一样了*。——如果我再放回去呢？——*哦，是的！是一样的*。——这样呢（把一个正方形切成很多片，这些片被延伸出来）？——*是一样的*。"

艾利（6;10） 方法2：实验者给他展示两个正方形，然后从一个之中剪下一个三角形。这个三角形被放在被切掉的正方形剩下的上面，它的上面的角是一个钝角，看起来像一个带着房顶的房子："*现在它有更多的空间了*。——为什么？——*因为它这里（房顶）更大*。——这样呢（把三角形再放回去）？——*哦，是的，它们一样*。——这样呢（正方形被切成条，它们被放置成塔楼的边的模样）？——*它们也是一样的*。——为什么？——*因为你仅仅是把它们那样剪了罢了*。——你确定它们的空间是一样的吗？——*完全确定*。"

芒（7;11） 方法2：他被要求比较一个完整的正方形和另外一个被切成条的正方形的大小。他也会想"*这个更大，它更宽*"，但是不久他就改变了想法。

这里，我们发现了儿童开始对之前给出的不守恒的原因进行检查。相同的因素在水平2B的时候也在部分地起着作用，但是现在它们被更为先进的和直观的表达所代替。因此，在访谈的过程中，不正确的判断被纠正。因为儿童对分割有一个比较清晰的直观的理解，我们发现，如果切出来的部分还是停留在原来的位置上，他们不再仅仅因为一个东西被切割而争论两个之前完全一样的形状在面积上发生了变化（参考派尔的第一个回答）。但是，如果原来图形中分割出来的一部分被带离得很远，我们再次发现，儿童的组合能力，仍然处于初集合水平，还不能应对这一问题（参考和派尔访谈的整个过程，只有当切割的部分被放回原来的地方的时候，他才会同意它们是相等的）。再次地，如果部分被移动到离起始位置很远的地方，我们的被试在将被占据的面积（或地方）和被空缺出来的面积相等同的时候出现系统性困难。另一方面，我们也注意到直观表达的获得，因为这些被试很快学会了理解补偿（如艾利），并且他们之后的概括化也将这一点考虑了进去。他们逐渐从图形形状和边界长度造成的错误印象判断中解脱出来，开始理解它们的面积仍然是守恒的。他们的进步在应对中项和共同测量手段（尽管戴尔最初在这一点上还具有不确定性）时是非常明显的，我们开始看到，他们也开始认识到了传递性。

总而言之,对部分和分割的组合以及对地点的协调都通过直观表达有了进一步的提高。在阶段3,后者被概括化,获得了运算形式,这意味着他们开始获得可逆性了。

第七节　亚阶段3A:运算守恒

只有当达到了阶段3的初始阶段,儿童才能解决包含面积守恒的问题,因为现在开始忽略面积形状的任何改变,而只是依赖于对转变的理解,这意味着他不再需要实际的转变过程来比较两个形状图形的面积。

杜特(6;7)　方法1:红色的矩形,通过将右上角的正方形*B*移到矩形的右下角放在*EF*的右边,而构成一个金字塔形:"*它们的空间是完全相等的*。——如果我试着将这96个立方体覆盖上去呢?——*它们所有的都会得到一个空间*。——像这样呢(*BCDE*排成一行,*A*放在*B*的上面,*F*放在*E*的下面)?——*也是相同的,它们的空间都是一样的*。——这样呢(6个正方形被间隔开放)?所有的小立方体都能放上去吗?——(他看了一下,开始的时候还有点不确定)*所有的都能放上去,因为它们的空间都是一样的*。——为什么?——*因为你在那里放了所有的正方形,它们都是一样的*。"实验者拿出一张纸,在蓝色矩形的外缘画下它的轮廓,在红色正方形组成的金字塔形的外缘也画下它的轮廓:"我能把刚好放在这个图形里面的立方体也刚好放在那个图形里面吗?——*是的,它们可以,这和刚才一样*。"

皮亚(6;10)　方法2:两个一模一样的矩形。其中一个被以不同的方式切割,并且这些部分以各种各样的方法被处理(如,一个三角形等)。不管转化成什么,皮亚都会立即回答:"*它还是一样的,你只是把它以不同的方式变化了,但是它的大小和之前还是一样的*。——如果我用纸覆盖上去呢?——*也是一样的*。"

吉恩(7;0)　方法1:红色的矩形被转化成金字塔形。"*你将需要更多的立方体。哦,不!它还是跟之前一样的*。——为什么呢?——*因为你用的正方形数量是一样的*。——像这样呢(正方形被排成一列*ABCDEF*)?——*空间是一样的,仍然是6个正方形*。——像这样呢(将正方形间隔开)?——*空间还是一样的,因为正方形还是那些正方形*。——(将矩形和金字塔形的轮廓画下来?)——*也是相等的*。——那么,是什么让你开始的回答出错了呢?——*我看到它的下面变大了,但是我忘记了它们是同样的正方形*。"

奇普(7;2)　方法2:一个正方形被转化为各种不同的形状:"*它还是一样的,你只是把它切割了罢了*。——(实验者继续分割。)——*它还是一样的*(他相当地确定,几乎都不看一眼)。"

拉姆(7;6)　方法2:"*它还是一样的,你在不断地切相同的正方形*。——但是

那样的话就改变了形状，不是吗？——是的，但是空间并没有变。”

瑞格(7;9)　方法2：“是的，空间还是一样，因为如果你把它们并在一起还是一样。”

即便是在开始的时候，某些儿童(像吉恩一样)表现出片刻的犹豫，该阶段他的回答与之前阶段的回答已完全不同。他不再将新图形的面积与作为控制的图形的面积进行比较，而是从转化本身进行推理。他将新图形仅仅视为转化的结果，而不是将新的面积与原来的面积进行比较。结果，他理所当然地认为转化仅仅是相同部分的重新排列，并且不需要通过检验来确定整体仍然是守恒的(参考奇普的回答)。

有关面积的运算守恒最为明显的是，它在和距离守恒以及长度守恒相同的时间出现(参考第三至五章)，尽管当一个全新的形状出现在原来的位置时，它存在“组合一致性”的特殊困难(参考第五节)。再者，面积的守恒也仅仅发源于定性操作的协调，这在单维的长度守恒的案例中也存在，运算综合最终导致了测量运算的出现。相关的操作，一方面表现为部分的加或减(参考第一部分)，这使得被试能够将整体想象为一个不变的总体，不管部分被怎样处理；另一方面，操作还支配着位置和位置的变化，包括他们参照固定地点的系统协调。这第二种操作使被试意识到新占据的位置和新空缺出来的位置之间的必然补偿，这是所有位置变化的一个特点。两类操作在水平3A确保运算守恒时都在起作用，但是在这个水平它们又互相补偿。在第九节和第十节，我们会展示之后他们是怎样被引导只给出一种操作的，即面积测量。这种操作将位置变化和分割整合起来。

第八节　在闭合边缘之外的面积守恒

面积守恒类似于长度守恒，包含着由部分的位置变化所带来的新占领区域和新空缺区域之间的互相补偿。这便是我们报告过的通过观察所得到的结论，它暗示着如果没有相关水平的协调将不会产生面积的守恒。但是，这种协调有多么完美呢？早期研究(参考第八章和第十四章)表明，协调系统在水平3B之前不会自动地产生，尽管前一页中我们所说的守恒在水平3A似乎就已经出现了。另一方面，在第一部分我们见证了水平3A的儿童是如何正确地从一个相等的总面积(草坪)中减去一个相等的部分面积(房子)，发现剩余也是相等的。然而，正确地解决不仅包括被减面积的守恒，还包括剩余草地的守恒，它们位于被占领的区域边缘的外面，也只不过是还没有被占领罢了，从这个意义上讲，它们也是补偿区域。这些也必须被协调，并且整合进水平3A。在那之前，有关守恒的实验结果似乎与早期关于协调系统的研究并不一致。

面对这种明显的矛盾,我们开展了一项与本章第一部分不同的考查,因为这里我们同时关注闭合图形面积的守恒和图形是一个部分时的水平之间的协调。我们关注的问题是,补偿区域的守恒是否总是和闭合区域的守恒同时出现;或者,是否只有当区域第一眼看上去是一样并且全部都是相同大小(就像第一部分的房子一样)的时候才会出现守恒,当它们由不相似的元素构成的时候就不会这样。我们希望这一问题能够将面积守恒问题与协调问题联系起来,而不留下任何粗糙的结论。结果完全验证了我们的预期:当补偿区域保持不变的时候,闭合图形的面积守恒在水平3A出现;而作为闭合图形外面的区域的守恒,要像前一节中正方形或矩形的内部图形以各种方式被转化,而不是像第一部分以各种方式处理相等部分,却是水平3B要建构的内容。

我们的方法如下:给儿童出示两个一模一样的绿色草坪,B_1和B_2,并要求他们将两个草坪叠加,以使自己相信它们是相等的。实验者然后将一个棕色的正方形A_1放进B_1里面,将其称之为犁开的地或者"土豆地"。他把一个类似的部分A_2放进B_2,但是A_2被切成可移动的部分。当被试被证明$B_1=B_2$及$A_1=A_2$,以使自己满意剩下的也相等(即A_1'($=B_1-A_1$)$=A_2'$($=B_2-A_2$))的时候,实验者通过将部分拆分改变A_2的形状(而拆出的部分并不都是一样的),或者将原来的正方形改变为一个拉伸的矩形等。我们偶然地改变了A_1和A_2剩余区域的形状而非A_1和A_2本身的面积。这是非常容易的,因为B_1和B_2在形式上就是不规则的,尽管它们是相等的。无论是哪种方式,儿童都被问及下面两个问题:(1)虽然在分布上是不一样的,但是A_1和A_2的面积仍然相等吗("两块地上的土豆有相同的空间吗?")(2)补偿区域的面积也仍相等吗("两个草坪上的牛仍有相等的草或绿色可以吃吗?")两种相等可以通过卡片来进行检查,其中棕色代表A地,而绿色代表草坪A'。

我们发现在对这些问题的回答上存在三个水平。直到阶段2的时候,包括阶段2(大约7岁),即不存在内部区域(A_1和A_2)也不存在补偿区域(A_1'和A_2')的守恒。也就是说,不论是对土豆地还是对草坪,都是不守恒的。偶尔地,我们也会发现一点守恒,但是儿童经常会说内部面积和补偿面积都增加了!在水平3,内部面积不管被调整为什么样,儿童都认为它是守恒的,但是他们却不能推论补偿面积A_1'也是不变的。只有到了水平3B,有关两个面积都会守恒的推理才开始出现,不管它们的形式被调整为什么样。

下面是阶段2的两个例子。

沃尔(5;7)　在亚阶段2A。图形原来被呈现的时候,他认识到了整体的相等($B_1=B_2$),"土豆地"的相等($A_1=A_2$),以及剩余"绿地"的相等($A_1'=A_2'$)。

A_2然后被转化成一个伸展的矩形,而A_1仍保持为正方形(就像A_2原来的样子):"这里(A_1)和这里(A_2)有相等的空间可以种土豆吗?——*哦,不,你可以在这里*(A_2)

种更多的土豆，但是在那里(A_1)*种的更少*。——一个人可以把补丁变回为原来的样子吗？——*是的*(他将A_2弄成开始时的样子)。——但是这样的话，不是意味着这样(A_2又重新变回为矩形)它们也有相同的空间吗？——*不，这里*(A_2)*的土豆比那里*(A_1)*的土豆更多*。——那么草地呢(将他的注意力引到A_1'和A_2'的草上)？——*这里*(A_2'，意思就是说窄的矩形剩下的草更多)*的更多*。——像这样呢(将A_2转化为一个更加伸展的矩形)？还有相同的空间来种土豆吗？——*现在比这样的时候*(暗指之前的矩形，这个矩形的模板已经被留下以作比较)*的空间更多了*。——那么草地呢(A_2')？——*它比之前的两个*(即A_2'之前的两种形式)*都大*。"

吉奥(6;11)　在过渡水平2B。在这里，转变是很轻微的，当正方形A_2被转化为有点方形的矩形时，他承认了内部面积的相等，尽管还不承认补偿面积的相等："*它们两个都是一样的，有相同的边界*(排列不同)。——它们有相同的空间种土豆吗？——*是的，是相同的*。——那么草地(A_1'和A_2')呢？它们也是相等的吗？——*不，这里*(A_1')*的更多*。"

但是，当转变更大的时候，也就是说当A_2被转变为一个伸展得更长的矩形的时候，吉奥都拒绝承认内部和补偿面积的守恒："这个地方(A_2)仍然相同吗？——*不，它变长了*。——但是还有相同的空间来种土豆吗？——*不，现在空间更多了*。——那么牛吃的草呢？——*剩下的草*(A_2')*少了一些，因为土豆占了更多的地*。"

这些水平2A的反应，并没有告诉我们一些有关守恒本身的一些新鲜的东西：在这个阶段，当部分被重新排列的时候，儿童尚不理解面积的不变性(但是我们在第5和第6节已经知道了这一点)，他们也不能意识到当补偿区域所补偿的地方以不同的方式被处理时，补偿区域仍是相等的(但是这一点我们在第一部分也已经知道了)。唯一新鲜的信息来源于当两个问题被同时提问时处于亚阶段2A的沃尔回答。他承认总面积B_2和B_1是相等的，并且是不变的，沃尔既声称内部面积A_2比A_1大，也声称它的补偿区域A_2'($=B_2-A_2$)比A_1'大。换句话说，他并不会因为认为A_2和A_2'都同时增大而B_2仍保持不变所带来的矛盾冲突而感到不安。这种矛盾在守恒之前的过渡阶段——水平2B(如吉奥)的时候就消失了。

像通常一样，亚阶段3A把我们带到了面积守恒水平。但是在这个实验中，守恒仅局限于内部区域A_1和A_2("土豆地")，还没有扩展到两个补偿区域A_1'和A_2'(围绕土豆地的草地)。这一结果是新的，并且值得进一步的研究。下面是一些很清晰的例子。

皮克(7;9)　开始以介于水平2B和水平3A的方式回答问题。当正方形地A_2改变为一个伸展的矩形的时候他说："*现在的空间少了，它并不像原来那么宽*……——我们可以把它恢复成原来的样子吗？——*是的*(将A_2变为原来的正方形)。*哦，我明白了！它还和原来一样：纸板既没有多也没有少*。——草地呢(A_2')？——

它和原来不一样多了:比原来多。——你的意思是把土豆地(A_2)这么放它并没有变,但是草地A_2'变了?——*是的,因为当我们这样放的时候,空间更多了。*——那么这样呢(A_2被转化为一个伸展更长的矩形)?在土豆地上还有相等的空间吗?——*是的,因为纸板的数量都是一样的。*——那么草地呢(A_2')?——*草地更多了。*——所以是土豆地不变,但是草地更多了是吗?——*是的。*——指给我看一下是哪里变多了。——……——那么土豆地怎么样了呢?——*它还是一样的,既没有多也没有少。*——那么草地呢?——*它更多了。*——我们可以测一下它吗?——*是的,它在这里更多了*(把绿色的卡片首先覆盖住A_1'之后覆盖住A')。*不,两边的草是一样多的。*——那么这样呢(把A_2的所有部分放在B_2的角落里)?——*土豆地是一样的,它既没有多也没有少。*——那么草地呢(A_2')?——*它比刚才还多。*"

丹(7;6)　注意到了A_1和A_2是相等的,也注意到了B_1和B_2是相等的,他看着A_2被转化成了一个矩形:"这里(A_2)的空间和那里(A_1)的空间一样多吗?——*是的,是一样多的,因为刚开始的时候,它和那个一样,也是一个正方形。*——那么草地呢(A_2')?——*也是一样的。不,那比这里(A_1')少了。*——为什么?——*因为它更长了。*——那么土豆地呢(A_2)?——*它和这里(A_2)一样,因为土豆地也可以像那样(A_1)放。*——那么草地呢?——*不,这里(A_1')的空间更多了。*——这样呢(将A_2进一步伸展)。在土豆地上还有相等的空间吗?——*是的。空间还是相等的,但是现在它更长了。*——那不是意味着它更大了吗?——*不,因为它也变窄了。*——那么草地呢?——*这里(A_2')的草更多了,但是土豆地仍是不变的。*——这样呢(把A_2的部分分散放在B_2的不同角落)?——*那里的空间和这里(A_2)的空间相同,因为这些碎片加起来和这里(A_2)的大小一样。*——那么草地(A_2')呢?——*有更多的草了,因为这块地(A_2)被分开了。*"

米恩(8;2)　第二个正方形被转化为一个矩形。"现在和刚才的空间还是一样吗?——*是的,因为它现在和刚才一样大。你只是改变了它的形状,但是没有改变它的大小。*——那么草地呢(A_2')?——*这里(A_2')更少了。*——像这样呢(A_2被伸展得更长)?——*那里(A_2')的草更多了。*——那么这块地(A_2)呢?——*它们两个(A_1和A_2)都是一样的。*——那么草地也是一样的吗?——*不,那个更少了,因为你改变了土豆地的形状。*"其他的转变也产生了类似的回答。

上面所有的被试都意识到,无论A_2怎么调整,无论它的表面和原来正方形的形状差得多么远,内部区域A_1和A_2总是恒等的。这和第7节我们所发现的面积守恒在水平3A所达到的结论是一致的。即便是皮克,在水平2B刚开始的时候还像个小孩子似的否认守恒,也很快发现了形状的改变是可逆的,因此也使自己确信了面积的守恒。丹通过指出补偿中所包含的变换关系(变长、变窄)来解释守恒,等。而另一方面,不像

第一部分我们所研究的被试，这些水平3A的被试还不能认识到剩余面积的守恒($A_1'=A_2'$)，尽管他们知道$A_1=A_2$，也知道这些是从相等的总体B_1和B_2中减出来的，从而得到A'($B_1-A_1=A_1'$，$B_2-A_2=A_2'$)。这一矛盾提出了两个问题：为什么这些回答与第一部分给出的回答不同？为什么补偿面积的守恒比闭合线所包围区域(A_1和A_2)的面积的守恒更难建构？

对第一个问题的解答是容易的。在第一部分，给儿童展示出一些房子，每一座房子都占据着相同的面积，这些房子总面积的守恒对他们来说不成问题，因为它们的恒等性在一开始就是指明了的，即便是在水平2B在直觉上也是明显的[①]：因此这些孩子只有一个问题，那就是要决定剩余面积(A')是否守恒(也就是除去房子之外是否有相等的草被剩下)。结果，有关剩余面积是补偿面积的相应运算立刻就产生了，并且这也贯穿于被试注意的中心。但是在本实验中他面对这两个问题。首先，地的面积不再被划分为同质的部分，而是划分为不相等的部分，之后再以不同的方式(不同程度伸展的矩形等)进行归组。因此，面积A本身的守恒是被试首先不得不解决的问题。第二，只有当这一问题被回答了之后，剩余面积的守恒问题才被问到。这意味着实验者并没有提供给被试正确解决问题的关键，也就是它是面积A_1的补偿，就像在第一部分所做的那样。被试现在必须自己发现这一点。因此，由于两个原因，该任务比第一部分的任务更加困难：它包含着两个独立的关于守恒的问题，每个都要解决自身的面积问题。被试必须自己发现它们之间是互相补偿的。而在第一部分只有一个守恒问题，因为被试从一开始就被告知面积之一是不变的，而另一个只是它的补偿。

但是，重要的问题是，为什么意识到补偿面积(就像草地A')的守恒比意识到边界所包围的第一个面积(A)的守恒更加困难？我们可能注意到了，面积的守恒也像长度和距离的守恒一样，在转化的过程中包含着空缺位置和被占领位置的相互补偿，因为这总是包含着各部分位置的变化。总体的守恒使得这些“地点”之间相互协调的测量的出现来得迟了一些。但是，这种协调并非一下就出现的，早期研究(参考第十三章和第十四章)已经表明，对一个平面的总体协调要直到水平3B才能达到。在水平3A，只有当儿童能够使用周长的时候才能意识到协调，借此帮助他们推理，虽然周长也在不断地变化之中。并且这种协调仅限于周长所包围的区域。因此，对补偿区域的守恒是一个更加困难的问题。在这里，儿童不仅要理解被占领“地区”和空缺“地区”之间的补偿关系，还要能理解周长内部区域和外部区域之间的互补关系。他必须参考第二条边界的周长认识到后者也是互补的。这种互补关系暗示的不是有限的而是平面表面总体的协调。因此，当发现一个儿童非常确信A部分的守恒，也能意识到它的部分加起来总能得到相同的总体，但是却不能逻辑性地推理补偿区域A'的守恒的时候，我们不应该感到惊讶。他们不能意识到相同的推理也适用于总体面积B(实验者自己也是避免提到这一点)，

① 只要相同数量的房子以不同的方式被排列。

因为如果他们这么做了，自然会推理出剩余区域A'也是恒定不变的。忽视总体(B)是因为，只要想到内部区域(A)，他们就不能做出任何有关外部区域(A')的推理。这是因为他们缺乏平面表面的总体协调，也就是说，不能想到就整体B而言，A'是对A的补偿。

能够就总体(B)判断草地(A')是土豆地(A)的补偿这一事实，只有在水平3B才能被理解。水平2的儿童首先认为两个包含的区域是可以同时增大的，之后在水平3A，他们理解面积A是守恒的，但是却不理解A'是对它的补偿。但是到了水平3B，他们一开始就能就总体做出推理。也就是说，自从意识到了A的守恒性之后，他们就能自动地推论补偿区域A'的守恒性。

马尔(8;3)　土豆地A_2被转变成一个矩形。“*它们是相同的。那一个(A_1)被弄成了方的，而这一个(A_2)被弄成了长的。这里(高度)丢掉的部分在那里(长度)给找回来了。*——那么草地呢(A_2')？——*也是相同的。这里有更多的空间，而那里的空间变少了，因此还是相同的。*”其他的转换方式也被实验，但是回答都是相似的。“但是为什么会有相等的草地(A_2')被剩下呢？——*因为在没有草的地方现在有草了，而原来有草的地方现在不再有草了*(指示着A_2和A_2'之间的补偿)。”

米克(8;4)　土豆地A_2：“*它们是相等的。你只是把卡片转动了一下罢了。*——那么草地呢(A_2')？——*两边也是一样的*(A_1'和A_2')。——为什么？——*我解释不出来，因为土豆地都是相等的*(A_1=A_2)。”

赛尔(8;4)　“*土豆地是相等的，因此草地也是相等的*(A_2和A_2')，*因为土豆地总是占据着相等的空间。*”

这些回答和水平3A的回答完全不同。这些被试立刻意识到了土豆地A_2是恒定的。因为随着部分的位置被改变，那些空缺出来的地方被那些被占据的地方所补偿。但是他们不再将推理局限于内部区域A_2，而是将其扩展到更大的总体B_2(尽管后者可能在轮廓上是不规则的)。因此，他们立刻意识到了草地(A_2')是对土豆地(A_2)的补偿($A_2'=B_2-A_2$)，接下来，基于补偿的相同原则，他们推理A_2'也是恒定的。就像马尔说的那样：“在没有草的地方现在有草了，而原来有草的地方现在不再有草了。”

水平3A和水平3B之间的差异在于，在第一个水平的儿童只是开始协调平面的表面，而处于第二个水平的儿童将这种协调概括化，将平面视为一个整体。因此，当被问到一个有关非限定部分的问题时，边缘之内的面积立马被想到是补偿于它的，基于相同的原则它也服从守恒。将空缺区域和被占据区域与内部面积和外部面积相协调的概括能力本身就是一种建构理解推理系统或协调系统力量的表现，这种力量要在水平3B才能达到，这一点我们在第十三章和第十四章将会知道。

本部分所揭示的协调空间关系的能力也是测量运算的起点，因为这暗示着减法运算与顺序和位置变换运算之间的综合。因此，下一部分我们将解决面积测量的发展。

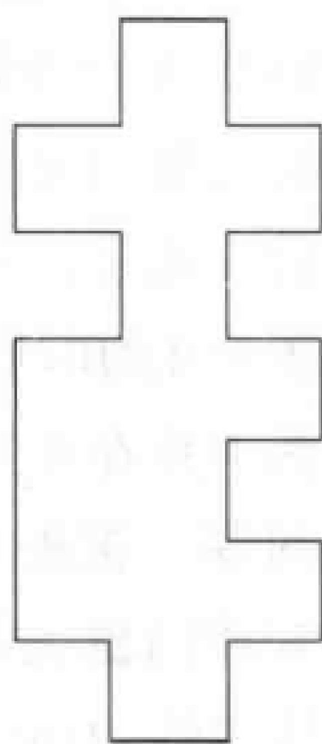
第九节　叠加测量

要研究面积测量,我们分别采用两种技术。每一种本身都会产生非常有趣的结果,但是它们之间的比较尤其具有指导性。第二种方法将在第十节充分地描述。简单而言,它包括呈现给被试有限的几个方块单元,之后他必须从将要测量的表面的一个部分向另一个部分做连续的叠加。但是,在第一种方法中,将要测量的卡片的数量更大,有足够的或近乎足够的卡片能将要测量的面积整个覆盖住。测试目标是一个大的直角三角形(我们称之为A),一个不规则图形(称之为B,如图18所示),以及一些小的正方形、矩形(由两个正方形组成)和三角形(正方形沿对角线切成两半)。有足够的这些小的图形覆盖住整个B,因为A更小一些,因此这些图形覆盖住A也是绰绰有余的。我们的问题只是发现,在哪一个年龄儿童会使用更小的片段作为中项或共同的测量工具。通常,这只是暗示着定性的传递,还未包含对单元测量的理解。但是,如果被试只移动一个片段来测量更大的区域,或者他计算测量单元的个数,根据各自的大小来使用它们,那么单元测量也是可能发生的。在某些情况下,本实验是在第十节有关单元测量的研究之前执行的,但是多数情况下后者是在本实验之前进行的。

第一个水平包含阶段1和阶段2A。其间并没有传递性。

布罗(4;6)　“*我认为那一个(B)更大。*——这些卡片会帮助你吗?——*是的*(他开始覆盖B)。*哦,天呐,太困难了,但是虽然困难,我也要这么做。*(最终他只是勉强做到了,但是他并没有看三角形A)——那么这一个(A)呢?*我想知道是不是这一个更大。*——(他开始覆盖A)——好,哪一个更大呢?——*我不知道。*——好,为什么你不需要所有的小卡片覆盖住A呢?——*你可以将所有的小正方形放在上面*(表现出对关系的不理解)。”

雷恩(5;0)　“*这个(A)更大,因为它有这些点。*——这些卡片会帮助你衡量么?——*哦,是的,我们来试一下。*(他把卡片放在图形B之外的空间中。实验者然后展示给他怎么来放卡片,之后儿童将B和A全部覆盖住了)——好,它们中哪一个更大呢?——*我认为这一个有点像小屋里的楼梯。*——但是你要告诉我,这些卡片帮助你决定出哪一个更大了吗?——……——让我们假装这些卡片都是用巧克力做的。哪一个可以吃到更多呢?——*哦,那一个(A)!如果你吃那个你会肚子痛的。*——但是这些小卡片告诉了你什么呢?……”


图18

佩拉(5;6)　把他的手指放在两个图形上:“*它们是一样*

的。——这些卡片可以帮助你吗？——是的。你可以把这个放在这里(开始填充B的间隙)，然后它们就一样了。——再试一下(帮助他来填充B)。你能将它全部填上吗？——是的。——好，那么这个(A)你可以做什么吗？——我可以用相同的方法把它填上(他这么做了)。——你需要所有的这些小卡片吗？——不。——好，那哪一个更大呢？——这个(A)更大，那个(B)更小。"实验者首先指一下卡片A，然后再指一下刚好覆盖住它的那些小卡片："我们假设这些全部是用巧克力做的。哪边可以吃到更多呢，那一个呢，还是这些小的？——那个(A)，因为它更大。"明显地，佩拉甚至都没有理解一个整体和刚好覆盖住该整体的碎片之间的相等性。

范(6;10)　"那一个(三角形A)更大，因为这个更长(臆想)。——看看你能不能找到某种方法来知道你说的对不对(把小卡片递给他)。——(他只是拿起一个卡片，然后把它一次又一次地放在A的几个位置上。)——(实验者出示给他看怎么做，然后他来覆盖住A)所有的卡片都用到了么？——不，不是所有的都用到。——然后我们可以怎么做呢？——(他开始覆盖B。)——你能把这些所有的小卡片放上去吗？——是的。——那么哪一个更大呢？——这个(A)。——是否刚好这里和那里用到的小卡片一样多呢？——不，不一样多。当小卡片更小的时候，用到的小卡片更多，因为小卡片更多(忽视了B用掉了所有的卡片而A只用掉了部分卡片这一事实)。"

尽管这些回答和测量长度时处于水平2A的那些孩子的回答具有明显的相似性，但是在一个方面上它们是不同的。那就是，当两个面积都没有被拆分的时候，(像第5节中的吉尔和路德)这些儿童能够将一个面积应用到另一个面积，以确保它们的一致性，但是他们却不理解组合一致性(也就是几个部分组合起来等于它们所覆盖的整体)。更不用说，他们也不能将组合一致性与共同测量项的传递性相整合。这种传递性的缺乏与解决长度问题时的失败是相似的。

在这里，儿童不是自己试图去覆盖两个面积A和B。甚至当实验者建议他们试着覆盖其中一个面积的时候，他们也不能在另一个面积身上重复此过程，直到被要求这么做的时候才会去做。此外，当覆盖B的时候，他们发现这很困难，因为B是不规则图形，这也就是他们为什么想将B的间隙填充以使它在感知上与A具有可比性的原因。但是，主要的一点是，当儿童在有指导的情况下用全部的卡片覆盖了图形B，用部分的卡片覆盖了图形A的时候，他们还不能推论出A更小——即便实验者已将他们的注意力吸引到所有的卡片在B上面而并非所有的卡片在A上面这一事实上了。例如，布罗还不能理解这一问题。雷恩刚开始说B更大(只是感觉判断而非出于对卡片的衡量)，但是却声称A会制作出更大的巧克力片。佩拉和范则根据他们的衡量认为A更大。总之，这里并没有传递性：$A<M, M=B, A>B$。这便是最后三个被试的逻辑！

然而，考虑到该水平儿童还未建立面积守恒(第五节)，这一问题是自我解释的

(self-explanatory)。首先,他们忽视了部分的组合,也就是说他们不能理解这一套卡片组合起来等于总面积B,而这套卡片的一个部分等于总面积A,所以$A<B$,因为部分<总体。其次,他们不理解部分组合起来等于完整的总体。这部分是由于部分的组合在该阶段还没有掌握,但也部分由于他们还不能通过对空缺和占据地点的严格推理来比较位置的顺序和变化这一事实。因此,当将一个共同的测量工具从一个地方移动到另一个地方的时候,他们还没有意识到自己是在做什么。因为两类组合都是缺乏的,所以将二者融合以产生测量运算也是不可能的。但是,即便是在定性比较的过程中应用了更受限制的协调,他们也不能成功,因为两种成分都是需要的。因此,只要覆盖住一个总体的这些部分被移动了,那么就会被认为比总体少了(就像佩拉和范那样)。在移动的过程中,如果测量项本身被认为改变了,那么表明被试既没有测量概念也没有逻辑的传递性。二者的首要条件是中项守恒。

在水平2B,儿童的最初回答都是类似的。但是同样的儿童之后的回答,却展现出他们是如何通过试误逐渐发现,如果所有的卡片都能覆盖住B而A只需要部分卡片来覆盖时,A一定比B小。

派尔(5;10) “那个(B)更大,因为那里是正方形,这里是正方形,然后这里(突出来的部分)也全都是正方形。——它(A)为什么更小呢?——因为它像一个房顶,它更小。我不知道,我看到的是这样的。——试着测一测它。——(他拿起卡片开始覆盖A。)——好,哪一个更大呢?——现在是这一个(A),因为所有的小卡片都在上面了。——你有试过把它们放在另一个上面吗?——(他开始覆盖B)——你想办法把它们所有的都放上去了吗?——是的。没有剩下来的。——(用作衡量的卡片被移开)哪一个更大呢?——那一个(B),因为我能把所有的卡片都放上去。”实验者要求他将用作测量的卡片一起和B相比较,记住,他们在之前刚刚用它们覆盖过B。“这个(卡片)更大,因为它们更多。——为什么呢?——哦,不,它们是一样大的。”

罗斯(6;10) 开始覆盖B,之后说道:“它更大。——好,然后你该做什么呢?——我需要更多的卡片放在那里(A)。——你可以也用相同的卡片。——(他开始覆盖A)哦,它更小,因为不是所有的卡片都能放上去。”之后他被要求比较分开放的小卡片与面积B的大小:“它们是相等的。”

布鲁(7;2) 刚开始的时候忽视了卡片,只有当要求他覆盖B的时候他才会这么做。“那一个更大。——你可以怎么做才能发现A并不比另一个大呢?——我可以把它们拿下来放在那个上面(他把卡片放在了A上)。——好了吗?——那个(B)更大,因为我需要所有的卡片才能覆盖住它,但是在这个(A)上面不需要。(将B与小卡片进行比较)那些小卡片更大。哦,不是这样的!它们一样大。”

鲍(8;0,发展迟缓) 表明了摇摆不定是该水平的一个特征。他首先凭感觉判

断A更大。之后，由实验者所引导，他分别覆盖了A和B："发生了什么？——*我可以把所有的这些卡片放在那个(B)上面，但不能放在这个(A)上面。*——好，那么B是更大还是更小呢？——*它们是相等的，因为我用这些卡片衡量过了。哦，不！因为在这个(B)上面我也把它们放上去了*(而却不适用于A)。——假如他们都是用巧克力做的，哪一个可以吃到更多呢？——*相同。*——它们中不是有一个更大吗？——*不……是的，有一个更小，因为我放在那里(B)的正方形比这里(A)更多。*"

简言之，我们看到了共同测量工具的出现，但仅仅是在试探之后(好像感觉判断本身就已经足够好了)。我们也看到了传递性的出现，因为守恒比原来好了。换句话说，整体内部分的组合和位置的组合以及位置的变化更加协调了。

在水平3，共同测量方法的使用以及传递性的再认都是直接的。然而，我们仍然可以发现两个亚阶段：在水平3A，儿童使用他们的组合共同项来比较A和B，但是在这么做的时候他们仅仅在计算所有的卡片，好像它们是相等的单元，而忽略了它们的不相等性。但是在水平3B，他们理解了单元的概念，因此他们把测量元素的大小也考虑在内。这里是两个水平3A的例子。

拉姆(7;6)　在没有被告知的情况下就开始覆盖A，然后他开始计算使用过的卡片的数量："*那个是7个。现在我将用这个(B)来试一下*(他开始覆盖并且再次计数)*这个是13，它更大。*——当你覆盖这个(A)的时候，有卡片被剩下吗？——*是的，因为它更小。*"

拉普(7;7)　直接就覆盖B，然后说道："*这里有9个正方形。*(他然后覆盖A)*它更小。那里只有7个*(当计算了B上面所有的卡片而A上面只有正方形之后)。——好，那哪一个更大呢？——*那一个(B)，因为我在那个上面数到了更多的正方形。*"

这种回答在第十节会有更加详细的复现。最后，这里有两个水平3B的例子。

纳格(7;6，超常)　拿起一个正方形，把它放在B上面，然后在整个图形上面逐渐地移动，计算它的位置在覆盖整个面积的过程中变化了多少次。但是正方形太大了，所以不能放进图形的所有部分。他忽略了这些："你可以使用其他的。——*好的，我会用到所有的卡片的，然后我再数一下它们，我会用它们中的一个来衡量。*(他研究矩形的卡片)*那是两个正方形。*(它把两个三角形合起来)*那是一个正方形。这个大的一点*(在B上面)*是容易的。我可以看出它是4个正方形。*(他把它全部覆盖住)*我可以数出16个小的正方形。*(他覆盖住A)*它更小*(开始数正方形，并且将三角形作为半个正方形)。"

莫格(8;8) *覆盖住了两个面积,但是它也没有计数卡片的数量,而是计算单位正方形的数量:“那个(B)更大,因为它有16个小正方形,而那一个只有12个(A)。你也不能把所有的卡片都放在那里(A),所以它更小。”*

第十节 单位叠加

呈现给儿童一些面积相等而形状不同的图形。一个(*A*)是由9个小正方形组成的大的正方形。其他的(*B*和*C*)是由相同数量的正方形组成的不规则图形,如图19所示。给儿童一个代表一个单元的卡片正方形和一支铅笔,他可以自由地检查这些材料,也可以在卡片上面画,卡片是平坦的、空白的,没有任何点或线。如果他不知道怎么做,实验者展示给他看怎么一步步地用单元正方形覆盖大正方形,这样做两到三次之后,告诉他自己继续做。当完成了*A*、*B*和*C*之后,我们接下来覆盖两个更加异质的和不相等的图形(*D*和*E*)。儿童被提供给三种测量工具中的一个,以衡量这些图形。一个是正方形,它是*D*图形的四分之一(所以E是三个半这样的正方形)。第二个是一个矩形,它等于两个这样的正方形,所以两个矩形就能覆盖住*D*。最后一个是一个三角形,它是正方形沿对角线切开的一半。如果三角形被用作单元,那么*D*就是8个这样的单元,而E则是7个这样的单元。

我们发现的阶段与第九章所注意到的类似。下面的反应隶属于水平2A。

雷恩(5;0) *“这个(A,大的正方形)更大。——为什么?——因为在那个(B)上面缺了一些。——你可以用这个(单位卡片)来说得更准确些吗?——……——(实验者在A的里面画了9个小正方形。)——哦,现在我知道怎么做了。把这个卡*

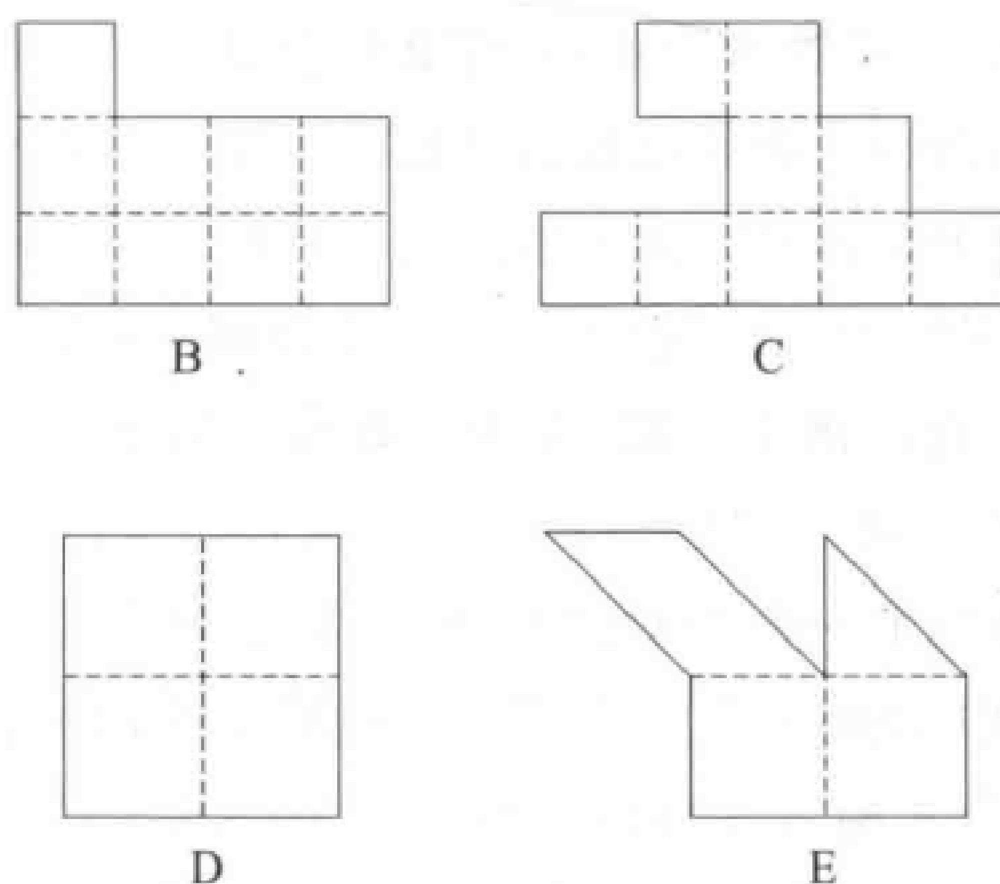


图19

片放在那里(图形*B*的间隙,也就是说面积之外的部分)。——好了吗?——*这个*(*A*的一边)*更大,那个*(*B*的一边)*更小*。——(实验者展示如何将卡片放在*A*中的单元正方形里面)我现在在做什么?——*你把正方形放在了上面。我也必须把一些放进去*(在*B*的上面画正方形,但是在图形的外面加了更多的正方形,使它组成了一个3×4的矩形)。*我知道怎么测量它了,它变成了一个正方形*。——所以呢?——*它们的大小相同*(对于扩展了的图形,这明显是不对的)。"

佩拉(5;6)　比较*A*和*B*:"*它们的大小有点相似*。——给你(单位卡片)。你能用这些说明一下吗?——……——(实验者在*A*中画了几个单位正方形,佩拉接着补全它们,但是却没有在*B*上面画)那一个(*B*)呢?——(它在间隙中画正方形,将图形变成了一个正方形)*它和那一个*(*A*)*相同*。——你能在那里(*C*)放一些吗?——*是的*(开始在图形里面画正方形)。——那能帮助你告诉我哪一个更大吗?——*不能*。——好,你数过它们了吗?——(他数了一下它们,但是却没能理解它的数量怎样才能和A相比较。)——(图形*D*和图形*E*)这些呢?——*那个更大,它有一个额外的凸起*。"他还不知道怎么测量,甚至当这"额外的凸起"在右上角被转化成为一个三角形的间隙的时候。

范(6;10)　比较*A*和*B*:"*这个*(*B*)*更大。它有这个额外的地方*。——(在两个图形上画正方形。)——*对的。现在我知道B更大了,它更长*。——试着数一下正方形。这里(*B*)有多少个?——*9个*。——这里(*A*)呢?——*9个*。——所以呢?——*是相同的。不,这个*(*B*)*更大*!"这里,感觉上的不一致战胜了数量上的一致。

这些被试被特意拿出来举例,是因为在之前的实验中,他们已经通过叠加理解了守恒和测量。在这些情境中他们所给出的回答解释了这里的反应。他们对表面上非常不同的两个图形的比较表现出明显的不情愿。或早或晚地,被试试图改变图形的形状以使它们在形式上看起来类似。从直觉的观点来看,这是很自然的,如果这种转换后的相同类型是由改变现实部分的位置所导致的,那么将会导致合理的证明。但是,被试不是将自己局限于补偿区域的转换,而是仅仅将外面的元素纳入进来,以得到一个矩形或正方形,这在测量时是一种很奇怪的方法。雷恩还十分满意地说:"我知道怎么测量它了,它变成了一个正方形。"相反地,当实验者引入一个合理的补偿的时候,如将E左上角的平行四边形移到右上角,被试仍不信服,表现得好像一旦他从感觉上做出判断之后,实验者就没有权利改变图形一样(佩拉)。

但是,从这里我们得到了一个必然的教训,当被划分为正方形的时候,有时候会使得儿童感觉上比较更容易,他们对这一点还没有运算上的理解,因为同时缺乏加法组合和面积守恒。这意味着当实验者告诉他们数一下单位部分的时候,他们也不知道为什么要这样做。甚至当范发现了数量相等的时候,因为每个都是由9个正方形组成的,他也拒绝推断两个面积实际是相等的。明显地,他认为这两个问题是毫不相干的——就像的

的确确的那样，它们只有通过顺序组合和位置变化才能使得这种连接稳固。除非单位正方形的位置在思维上可以被改变，它们中的每一个一定通过构造中感觉到的位置被假定为一个独特的值，因此，不能将其与不同位置的其他正方形加以比较。

在水平2B，儿童做出的回答是过渡性的。他们站在从最初的不理解到测量的真正理解之间的中途。

派尔（5;10） A和B："在那个（B）上面有更多的空间，因为它更大。——看（在A上画了两个单位正方形）。在哪个上面可以画更多的正方形？——这个（B）。——试一下。——（在尝试了几次之后，他改变了他的想法，开始指向A）不，这个更多。——你可以用这个（单位）正方形来说得更清楚一些吗？——不。——（实验者画完了图形。）——它们大小是相同的。——为什么？——因为你画了这些正方形。——但是是什么让它们大小相同的呢？——……——数一下它们可以帮助你吗？——（他开始数）是的，因为这里是9，那里也是9。——假定它们都是用巧克力做的，你会选哪一个？——这一个（B），因为它有更多的巧克力。"

吉恩（5;10） 以相同的方式开始："你知道我为什么画这些正方形吗？——不知道。——数一下它们。——哦！9和9，它们都是一样的。——D和E，这两个呢？——它们也是一样的。——为什么？——角落里的这一点可以放到这里（指着三角形的突出和类似的切口，但是却忘记了右边缺少的三角形）。——这些小卡片会帮助你吗？——（他将正方形用到E上两次，将三角形也用到E上两次，但是在D上只应用了四次正方形）4和4，所以它们是相等的。——但是正方形和三角形相同吗？——不。——所以呢？——……"

赛恩（6;8） A和B："这一个（B）更大，因为它有多余的一点。（实验者开始在B上画正方形，赛恩在B上接着画。）哦，是的！它有更多的正方形。——你确定吗？——不，等等。我必须在这个上面也画一画（A，他这么做了）。——所以呢？——（他开始数正方形）9和9，它们是一样的。"D和E："那个更大，因为它有多出来的这一点。——试一试这些卡片。——（在测量E的时候，他开始运用正方形和三角形。而当测量D的时候，他只是运用正方形。然后他不考虑单位之间的差异，将它们一块儿数）4和4，它们是相同的。——但是告诉我，这个三角形和那个正方形相同吗？——不（他比较了一下它们）。三角形是正方形的一半。——好，这个（E）用了多少正方形？——（赛恩表示不理解）——好，把所有的正方形都分为两半，来确定一下。——（他沿所有的对角线切分，得到两套三角形）——所以呢？——（他开始数三角形）8和7。这个（D）更大，因为它有8个。但是那个还是更大，因为它有突出出来的一点。"

罗斯（6;10） A和B："那一个（B）更大。（实验者出示给他看如何画正方形，之后他在里面接着画。先在A里面画，然后在B里面画，在第二个图形的外面画了额

外的正方形)是的，*那样让它更大了*。——但那不是因为你画了额外的正方形吗？——(他大笑着只在图形里面画了正方形)*9和9，它们是相同的*。"实验者出示给他看D和E："*我可以在它们的里面画吗？*——是的，当然可以(提供给他三种测量卡片)。——(它在正方形里面画，嵌入卡片，不加区分地数它们的数量)*4和4*。——但是正方形和三角形大小一样吗？——*不*。——所以呢？——……"其余的访谈内容和赛恩类似。

除了派尔所表现出来的不确定，所有的这些被试最终都确信了A和B在面积上是相等的，因为它们每个都是由9个正方形组成的。但是，所有的儿童也同样在比较D和E的时候，坚持将正方形和三角形视为相等的单元。因此，从整体上来看，这一水平显示出了分割组合的提高，也显出了位置和位置变化组合(如吉思所暗示地将图形E的突出和凹陷进行补偿)的提高，但是这两种表达仍未完全协调，因此对测量单位的理解仍未形成。

水平3A和水平3B分别以两种运算更好地协调和最终导致测量单位构建的更好地综合为特点。下面是水平3A的几个例子。

梅(6;3)　A和C："*那个(C)看起来更大，因为它有更多的弯*。——你找一种方法来确定一下(给他一支铅笔和单位正方形)。——(他在A的上面画了9个正方形，在C的上面也画了9个)*它们两个是相同的，因为上面都有9个*。——这两个呢(D和E)？——(他拿起三种测量卡片，开始在两个图形上面画正方形和三角形。)——*这里有4个，那里也有4个*。*我在数正方形*。——这些卡片全部都是一样的吗？——*不，这个*(矩形)*是两个正方形，而这个*(三角形)*只有一半正方形*。——所以呢？……"他再次数正方形直到被特意地告诉要将它们分为三角形为止。

拉姆(7;6)　在没有被告知的情况下，首先拿起单位正方形，逐步沿着A和B的边缘移动。然后他在A里面画相同的正方形，并数他们的个数："*9个*。*我必须看一下这边是不是也是9个*(B。他开始画正方形然后计数它们)。*是的，也是一样*。——这两个呢(D和E)？——(他正确地运用了正方形和三角形，但是却简单地计数了它们的总数量)*4和4，是相同的*。——但是你看这两个，它们是相同的吗？——*不是*(并且不需要进一步被告知他就在D上画了8个三角形，在E上画了7个三角形)。*那个(E)更小*。"

下面是两个水平3B的例子。

麦格(7;6，超常)　看着A和B立刻回答："*它们大小相等*。*如果你把这里和这里*(B突出出来的部分)*折叠后放在这里*(右上角)，*你将会得出它们是相同*

的。——用一下这张卡呢？——（他将卡片一步步地放在A的外面，在每条边上标记为三行，计算为12；然后使用相同的标记，将卡片运用到里面连续的部分，计算为9。对于B，他也以相同的方式画正方形）它们两个都是9，所以是相同的。——这两个呢（D和E）？——我会测一下它们。——（他将两个图形叠加，展示突出出来的三角形会补偿三角形的凹陷里面，然后指着右上角切掉的部分，说道）这个更小。——如果你测量一下它们呢？——（他用正方形和三角形测量，但是在没有被告知的情况下，却直接计数三角形单元的数量）它是8个，它是7个。”

莫格（8；10） 没有说一句话，而是将A和B拆分成矩形，然后拆分成正方形，说道：“相同。——这两个呢（D和E）？——（他在D上画了一个矩形，先将它拆分成两个正方形，然后分成四个三角形。然后说道）它是4个。（然后他又在E上画正方形和三角形，最后说道）这个（D）是8个，这个（E）是7个。”

因此，无论对象是长度还是面积，守恒和测量的发展都是非常相似的，二者的水平在相同的时间被掌握。守恒总是两类归组互相补偿的结果：即分割部分的相互补偿和顺序位置以及位置变化的补偿。能够在头脑中将图形B的不规则突出放到眼睛所见的间隙中去，然后再回到图形A的被试，只不过是利用了运算的可逆性罢了，而这种运算支配着位置的顺序和部分的加总。但是对于真正的测量来说，可逆性要直到水平3A才足够完美。同样地，只要能影响两种定性的组合（将部分相加，将位置和位置的部分进行排列），他也能通过中项的传递性证明任意两个总体的组合一致性。但是，再一次地，这里共同测量工具的掌握和守恒一样，也要到水平3A才能达到。两种都不能构成测量运算的系统。

只有当水平3B出现单位迭代的时候，测量运算的系统才开始出现。在水平3A的所有儿童都会将正方形和三角形作为相等的单位进行计数，除非有人提醒他们。现在建构能放进给定图形n次的面积单元不仅仅暗示着我们提到的运算归组之间的补偿，还暗示着二者之间的综合，整合为负责单位叠加的单个运算。这里的论述和之前我们处理长度问题时的论述是一样的。

但是测量面积有两种不同的方式，涉及不同的运算。赛恩和麦格开始的时候，将单位正方形应用于边界，借此告诉自己大的正方形在每条边上都有3个单位。但是只有当直接地测量了面积之后，他们才知道正方形是由9个单位正方形构成的。现在他们可能很轻易地从线性测量中推导出结果，因为$3\times3=9$。但是，在水平3B的儿童仅仅是用两或三个维度来测量长度，通过将面积单元连续应用于一个更大的面积里面来测量面积。后一种运算并不包含二维长度的逻辑乘法运算。在水平4之前，儿童不能做的是，通过算数乘法过程，从长度向面积做出直接的转换（或者通过算数除法做出相反的转换）。这一点将在第十三章做出更为详细的检验，但是在那之前，我们必须首先完成我们的减法研究。

李占星译，朱莉琪审校

第十二章　面积的减法和分数概念[1]

在上一章中，我们研究了面积的加法和减法运算，并且看到了这种能力是如何影响能够导致整体守恒的一套部分的加法组合的。我们也看到了这种守恒先于测量产生，它包含着分割和位置变化的综合。这里我们通过研究面积领域分割的开始将对这一阶段的分析进行得更远一些。这里我们使用抽象的模型，就像在一群孩子当中分蛋糕一样。这应该会让我们再次看到"部分-整体"的关系是如何建构的，以及它们是如何通过分数而数量化的。再一次地，我们将面对整体分割和守恒的几个关键问题，但是也要应对测量现象，因为我们所要求的减法对这种数量化非常有帮助。

第一节　方法和结果概要

给每个儿童(年龄在4到7岁之间)都展示了一个圆形的黏土模型和两个玩具娃娃。告诉他这块黏土是一块蛋糕，娃娃们现在"要把它吃掉，但是他们每个人得到的都要和另一个一样多。我们该怎么办呢"？为了帮助他切"蛋糕"，实验者给了他一把木质的刀子。当他解决了切成两等份蛋糕的问题后，我们又引入另外一块蛋糕和第三个娃娃。这次，我们告诉他要将蛋糕切成三份，但是要确保每个人吃到的和别人相等。很多儿童在将蛋糕切成两等份或者三分之一的时候表现出极大的困难，所以我们提供给他们圆形、矩形和正方形三种选择。所有的形状都是用纸做的，告诉他用一把剪刀将这些切成三等份。这个任务相对容易，因为他们还被提供了一支铅笔，并被告知在想要剪的时候可以在纸上做标记。[2]

在这些实验之后，我们接下来按照相同的程序进行四分之一、五分之一、六分之一的划分。一个可能的变化是，在画和剪之前让儿童将火柴棒放在分割部分的边界，或者直接代替画和剪。当这种方法被使用的时候，我们通常能更快地到近乎正确的结果。因为这时所有的火柴都可以同时被调整，儿童能够更直接地解决分割问题。

最后，每次儿童划分完整体之后，我们问他部分的和与原来的总体等不等："所有的这些小块儿合在一起(将手卷起来以作说明)，会不会组成一样大的整个蛋糕呢？"或者，

---

① 本章和Muller, M.女士共同完成。

② 将蛋糕分成三份经常要从分成两份开始；所以，对于某些被试，我们首先故意要求他们先分成三份，以抵消持续效应(有时，当二分很容易的时候，我们忽略了问题的这个方面)。

“假设我们把这些小块儿合在一起，能组成几个整个的蛋糕？”

我们发现了下面的阶段。在阶段1（也就是在4岁或4岁半左右），儿童发现要把蛋糕分成两等份还是很困难的；最早的解决无非是分割而已，也就是说，儿童在分成两个的时候还继续切；接下来我们发现，虽然每个娃娃都被给予了相等的两份，但是却是很小的一份，还剩下很大的一部分没有分割，或者整个蛋糕虽然都被分割了，却是不相等的两部分。在后面的事件中，我们偶然发现，一个儿童将蛋糕分成了三份，因为他混淆了切割的数量和切分出来的部分的数量（切两刀会得到三份）。

通常二分的问题在亚阶段2A得到解决，至少当整体很小且有规则的时候是这样的。但是当原来的形状很大且不规则的时候，儿童仍然存在残留的困难。当要求他们执行两次连续的切分，分成四等份的时候尤其如此。在这个水平，将蛋糕切成三份会导致两种解决方法：有时候，他们切出三小块（在某种程度上通常是不规则的），而留下很大的一部分还没有切分；其他情况则是执行两次切分，然后留下最后的四分之一，或者他们甚至将其切成三块很小的部分。

把矩形分成三等份相对容易，而通过二分法切成四等份还不太常见，但是其他类似的反应在该水平也会出现。将正方形切成三等份比将矩形切成三等份要困难，却比将圆形切成三等份要容易一些。当要求切成五等份时，我们注意到了相同类型的反应，但是每一种解决方法在某种程度上都比二分的时候出现得要迟。最后，在水平2A，儿童还没有意识到所有部分相加都必然等于原来的总体。

在亚阶段2B，二分不再存在任何问题。三等分也得到了解决，却是逐渐实现的。将整体切分成五等份仍然存在困难，就像上一段讲到的那样。但是总体的守恒却被意识到了，尽管只是直觉意义上的，而非运算意义上的。

在水平3A，三等分被预期的格式所主导，所以出现了对意识到的分数与原来总体之间关系的一种预先理解。结果，发展出了对整体的运算守恒，也就是说，它与部分之和的相等性被作为一种必然的关系被理解了。

最后，在水平3B，预期格式扩展到了五等分和六等分。

第二节　阶段1：二分问题

到了4岁0个月，甚至4岁6个月，孩子们仍然发现二等分有系统的困难。他们要么甚至不能把整个蛋糕分成两半（不管两半的相等性），然后简单地把蛋糕分成小块而不用完整个蛋糕，要么把整个蛋糕分成不相等的两半，甚至分成三部分。如果我们忽视两岁或两岁以下孩子的反应（这些孩子常常不明白分享的意义，直到给他们展示出来，因此根本拒绝分割），那么最早的反应是不知道何时停止分割小块。当孩子们这样做的时候，切块的事情本身就变成了一个目的，这个事实很有趣，因为它表明，孩子不可能有对

目标的任何预期,或者如果有,也不是那种能够实现目标的预期格式,即让孩子事先知道他必须切两块,且用光整个蛋糕。

博克(2;10)　得到一张纸"蛋糕",让他用铅笔演示如何把蛋糕分开,这样男士和女士都能吃到同样多的蛋糕。他用铅笔状的笔迹遮盖了圆圈。当要求他裁切的时候,他先是取出一块:"*这是给女士的*。"然后又拿出另一块:"*这是给男士的*。"他照着同样的方式剪了六块,但又多给了男士一块,还忘记了分享所有的。当要求他分割一个长方形时,他也有同样的行为。首先是一小块:"*这个是给他的*。"接着是一些似乎是为了切割的乐趣而切割的小块:"这个呢? ——*那是纸*。"

这种不加引导或不加约束的切割是通过为第一个进食者切下一小块来完成的(通常孩子会停在那里,好像这一部分和下一部分之间没有初步的协调),然后通常是为另一部分切下类似的一小块,整体的其余部分则完全被忽略:

米克(3;0)　和博克一样,展示了他如何通过画几个铅笔记号来切蛋糕,这表明他脑子里想的不仅仅是两块。然后,当提醒他必须做的事时,"你拿着这些剪刀,给他们各一半",他撕下一小块递给其中一个玩偶娃娃。"把它分成两半。——(他把一块给另一个娃娃,把其余的推到一边。)"

麦德(2;5)　被告知把一个蛋糕分成两半,但首先要用小棍儿展示他要切在哪里(这样可以避免画画的困难)。他把两根小棍儿放在圆圈上,使它们像弦一样切断圆周。换言之,他指出的两个部分的总和小于整体,而忽略了其余部分。

卓(3;10)　被问及如何切一个长方形蛋糕时,他的表现也很相似。他放下两根互相平行但都在长方形一侧的棍子(这将导致两个连续的小部分不超过整个的四分之一)。当要求切黏土蛋糕的时候,他仅仅切出两小块而忘记了剩余的。

实验者接下来用黏土做了一个香肠模型:"现在如果我们要在你和我之间分这个香肠,我们必须在哪里切呢? ——*这里和这里*(切出两个连续的小段)。——这些是给谁的? ——*你和我*。——那剩下的呢? ——*谁也不要*。"

弗兰(4;2)　是一个有点超常的儿童,他最终的回答已经在水平2A了。然而,开始的时候,他也是从黏土蛋糕中切出两小片,把它们递给两个娃娃——尽管实验者已经警告了他们:"*妈妈说他们可以吃掉所有的蛋糕*。"当他切掉那两片偏小的蛋糕后,实验者说道:"现在不要再切这么小片的蛋糕。你要把整个的蛋糕分完。"他被给予另外一个蛋糕,然后他首先切出两片,然后又是两片,最后把剩下的也切成两片。再给他第三块蛋糕他也是切出很多小片的蛋糕,一直到给每个娃娃15个这样的小片蛋糕。但是当给它矩形蛋糕的时候,他立马把它切成了两片(虽然不相

等，但是却也没剩下）。当给他一个正方形蛋糕的时候，他把它切成了四片，给了每个娃娃两片。最后，再次给他圆形蛋糕的时候，他把它切成了两片。

这里两个娃娃每一个都被给了要划分的整体的一部分蛋糕，这比不加限制地将整体分为几个小片可能代表了更为先进的预期格式。但是考虑到儿童仍没有意识到要把整体都划分完这一状况，所以我们还不能说他们已经能进行二等分，而仅仅是一般意义上的切割罢了，更不用说考虑划分的相等性。

在这类反应让位给二等分之前，我们发现了一个有趣的过渡反应。儿童认为，需要把蛋糕切两次从而产生两个部分，因为想象切割的次数和切出来的部分的数量一定是相等的。但是，这一反应通常都很短暂，很快就被真正的二分所代替了，尽管这并不意味着儿童立刻就能做出相等的二分了。下面所有的例子都说明了这种二分，除了前两个例子以外。在前两个例子中，我们呈现的是儿童将蛋糕划分为三块而非两块的过渡反应，因为他们做出了两次切割，而非一次。

雷(2;10)　当被要求在两个娃娃之间分这块蛋糕的时候，画了两个平行线，这样就导致了三块不相等的部分，尽管这些也没有剩余。雷拒绝对这一问题进行进一步的讨论。

君特(3;2)　也是一样，但是说三分之一是给女人的，而另外的三分之二是给男人的，完全忘记了需要保证他们两个分得的一样这回事儿。

吉尔(3;0)　在经历了一些犹豫之后，设法将香肠分成了两个部分，尽管一部分比另一部分更大。

陶普(4;2)　同样地，将蛋糕切成了两个部分，尽管一块比另一块大。当提醒他要给两个娃娃一样多的时候，他从大的上面切下和小的部分相等的一块，然后对于剩下的那些不知道怎么办了："剩下的呢？——*那些也是蛋糕。*"

吉雅(4;4)　通过一种特殊的方式将蛋糕成功地切成了两份：[1]他把中间的部分从外面分出来，这样就成了一个圆环部分和一个圆形部分。但是当要求通过直线来切蛋糕的时候，他用两刀切出两片来，而没有预期到会剩下一部分："*我可以再切一个吗？*"

派(4;6)　直接用一刀把蛋糕切成了两份，但是这两份是不相等的："但是他们两个应该吃到的是一样多的。——*是的*（把小的那份切成了两份）。——这一块（大的）呢？——*那个是桌子。*——再来一次（用一块新的蛋糕）。——（像吉雅一样，他也切出一个圆环）*这个是给你的，这个*（里面的圆）*是给我的。你满意吗？你已经得到的比我多了。*——好，试试这个（矩形）。你要给这位女士和这位先生的

---

① 指儿童以现实生活当中的方式切蛋糕。

一样多。——我会画一条线(在中间画出一条纵贯线)。这个是给先生的(他现在又画了一条横贯线),这个是给女士的。(明显地,在开始的时候,他在想。要得到两等份,他必须切两刀。但是很快他意识到了,这样切出来的是四份而非两份)哦,我知道了!这个是给先生的,这个是给女士的,这两块是给另外两个已经走了的人的(!)——但是这两个人感到很伤心,因为他们没能吃掉所有的蛋糕。现在你再试试为这里的另一位先生和另一位女士分一下这个(另外一个矩形)。——(再一次地,他又将蛋糕切了两次,因此产生了四个部分。然后他又把第三部分切了一下,剩下第四部分不动。)——好,看。这次我们有四个人,一块蛋糕。你给他们每人一块相等的蛋糕。——(他把它切成了四块)"

梅(4;8)　在将圆蛋糕切成两个(不相等的)部分的时候没有困难,但是当要求他将矩形切成两等份的时候,他从两端分别切下来窄窄的一片,而剩下中间的一部分:"剩下的这些是什么呢?——那些什么都不是。——好,你拿着这个(长缎带)。这里有两个小女孩,她们都想要你给她们一人一半,并且她们不想缎带太小。你会怎么做呢?——(他从缎带的两端各剪下来一段长的,而将剩下的一点藏在自己的手掌里。)"

将整体切成四份,在开始时产生了和二分相同类型的反应;被试仅仅是切出不确定数量的小份,但是在4份的时候仍不知道停止,因为他不能精确地预期所要求的部分的数量。这种解决方法之后,紧跟着是切出四份而忽略了剩余的部分。最后,我们看到他们试图进行两次等分,但是这里却出现了令人惊奇的矛盾。一些儿童(像上面提到的派一样)当试图做一个简单的二分的时候达到了四分,而其他想将整体进行四分的儿童却没能这样。二者的原因是一样的:他们缺乏运算性预期格式。前两类反应这里我们不需要耽搁太多时间,因为他们对四分和二分是一样的。后一类解决方法将在下面的例子中进行说明。

普莱(4;7)　希望在四个娃娃之间分蛋糕,首先将它切成了两份。然后他把一半切成了四份(通过连续的三刀而非横贯地切开),把另外的一半切成了五份,这样他切成了九份。他尽最大努力通过观察娃娃的大小,把分出来的这些分给他们。对于第二块蛋糕,他也是一样的切法,除了将两块蛋糕都切成了四份以外(再次地,他没有用双二分法),所以现在他切成了八块蛋糕,把它们分成单独的四份分了出去。

索姆(4;8)　把蛋糕分成了五个(连续的)部分,给了每个娃娃一份,然后将第

五部分切成了四份，再将其给每个娃娃一小份。如果各份之间是相等的，那么每个娃娃将会得到1/5+1/20=1/4，但事实上它们不是。

在阶段1，即便最简单的二分也会失败，而两次二分作为四分的一种形式在水平2A仍然是困难的。但是，这是由于缺乏最具指导性的启发。对我们而言，二分是拆分的最简单的形式。从定型的观点来看，将两部分作为一个整体是最基本的操作，这种二分甚至是更高级运算 $B=A+A'$ 内部补偿运算逻辑关系的基础。此外，要将二分数量化以使 A 和 A' 变成真正的二等分无外乎就是多了一个独立方程 $A=A'$。如果不考虑等分，我们可能会预期定性的二分甚至在直觉水平就能精确地理解。但是这些理解的简单化是具有欺骗性的，就像案例中经常出现的那样，在它的背后是先于运算和表达而迟于前运算直觉的复杂经营。

当且仅当两个部分被视为不受拆分和部分独立而影响的恒定整体的函数的时候，二分才可以被这么简单地理解。我们通过参照其中的一半（补偿亚集）而理解另一半（亚集），通过由两部分组成的整体而理解两个部分，不管它们被拆分开还是独立的。然而，小孩子虽然对说明理解得很清楚，对这类事情却无能为力。相反地，他们一部分接着一部分地切下来，这样这些部分就被视为了独立的，而不是整体的分子。他们的态度与我们相差很远，所以如果没有极大的努力我们很难理解他们的观点。

我们倾向于被我们的固有倾向误导，认为发展的连续水平是整体的，因为在成人身上心理的功能也是呈现等级层次的。因此，我们将智慧视为从感知和感知运动的调节到语言和形式思维的独特实体。但是从结构性的角度看，只有它表现为一系列渐进的有差异的和异质的结构的时候，智慧才是功能性的。

部分和整体（一半和整体）的关系可能是一种感知经验，这就像当我们看两扇门，感知到的是一个矩形的图形，以及另一个在形状和大小上都类似的图形。我们将每一扇门都视为整体（闭合的两扇门）的一部分。婴儿在将一扇门推开的时候，感知到的也是一样的。甚至一个不会说话的婴儿也可能意识到，这么做他只是达到了目的的一个部分，因此可能接下来去推开另一扇门。在这么做的时候，他的行为和感知建立关系，就像整体中补偿的部分和他所施加行为的部分发生关系一样。但是从这种感知或感知运动的部分-整体关系，到运算性的分割之间，还有很远的距离。在言语思维的平面中理解部分-整体关系，还存在系统性的困难，就像很久以前我们所证明的那样。[①]当我们使用“我的花有一部分是黄色的”或“这束花有一半是黄色的”这样的短语的时候，发现即便是9岁或10岁的孩子也会认为整束花都是黄色的，因为他们将部分（或一半）视为绝对性的东西，而不是必然和另一部分（或一半）和整体相关的东西。典型的回答是这些：“一半是什么？——你切出来的东西。——那另一半

① 《儿童的判断与推理》，第三章，第七节。

呢？——另一半已经没了。”明显地，没有参考总体或另一半，而被视为分离的切掉的一半，和本部分当中报告的2—4岁儿童实际切掉的那些碎片，性质上是一样的。年龄之间的广泛的差异，是因为从很早开始，儿童就从行动水平表现出了处理现实的方式，在具体运算水平甚至也是这样的，但是这些解决方法在语言思维水平仍然需要通过形式格式的方式再次工作。对部分-整体关系的最早的直觉表征仍然和现实行动相联系，但是即便这样，它们也与相应的感知和感知-运动关系有很大区别，因为感知和感知-运动关系有异于任何形式的表征，并且只有当客体已经被分成部分的时候才会存在。再次地，我们早期的研究发现，对部分-整体关系的理解，尽管只是一种定性的理解，直到7岁的时候，在具体运算的这一阶段仍没有被掌握。因为直到那个时候，它才会呈现出可逆性和逻辑成分。[①]在那里，我们呈现给儿童大量的棕色珠子和两个白色珠子，所有的这些珠子都是木制的，低于7岁的儿童不能理解木制的珠子比棕色珠子更多，因为在思考棕色珠子的时候，他忘记了将集合作为一个整体，因而会得出结论：“棕色珠子比木制的珠子更多，因为只有两个白色珠子。”本研究也是表征水平有关分割起始点的研究。这里，就像在《儿童的数概念》中所讲到的，分割必须在思维上被重新建构——但是只有在参考具体的情境时才是这样的。因此，这一问题比感知和感知-运动的部分-整体关系解决得要晚，但是却早于从单纯的形式意义上对分割的理解。

从2岁左右到4岁半，上面所给出案例中最显著的特征就是缺乏任何关于部分和整体的关系。部分之间的关系是相邻关系而非嵌套关系之中的一种。儿童首先只是将“部分”(忽略它定量的一面，也就是说它是一半，因此等于另一部分)视为从整体中移出来的一个片段。他没有将其视为一个大的总体中嵌套的一个元素，如果是这样的话，它在事实上虽然分离但是在思维上仍是相关的。对分数的理解依赖于两种基本的关系：部分与总体的关系(是密集的和逻辑的)，以及部分与部分的关系，也就是说总体中所有其他部分的大小与第一部分是具有可比性的(是一种广泛的和度量的关系)。

除非存在由独立元素构成的可分割的整体，否则可能不会有分数的想法。这是非常年幼的儿童(如那些两岁左右的儿童)所忽视的理解的第一个方面。他们将蛋糕或纸视为不可破坏的客体，拒绝切分它们，被它们连续的和闭合的形状(或格式塔)所吸引。在2岁半或3岁的时候，这些限制被克服，儿童已经充分地准备好了分享或者切分，但是现在切分的行动却使得物体丢掉了它的整体特征(参考第五章，连续性与分割的对立)。

分数的另一个特点是，它是暗示着部分的绝对数字。我们可能定性地说，分享预先假定了部分必须与接受者相对应。最小的被试虽然能够完全将整体切完，但是却忘记了这种对应性。以鲍克为例，他仅仅是把纸蛋糕分成了很多小片，尽管他把第一块给了一个娃娃，把第二块给了另外一个娃娃，但这些小片的数量也远远超出了所要求的

① 《儿童的数概念》第七章。

份数(两个半块),虽然整体还没有被分完。他接着又把矩形分出来一块给了第一个娃娃,留下第二块放在那里;接着他又继续切纸蛋糕,既没有分它们,在切的时候也没有数它们。

分数的第三个特点是,分割是有穷尽的,也就是说,没有剩余。尊重第一个和第二个特点的孩子给了两个娃娃正确数量的蛋糕,首先为两个娃娃切出来两个小的部分,留下剩下的蛋糕或纸未动。剩下的并没有被想成是第三个部分;它既没有被忘记,也没有被推到一边,或者它被给予另外一个名字:"那是纸""那是桌子"等;一个被试甚至诉诸手中的诡计(梅把它藏进了手掌里)。有趣的是,这些儿童拒绝将剩余的分出去,当他们已经分出被要求的两块后,表现出明显的满足,剩下的任何东西既不是部分也不是总体,并被视为与两个真实的部分无关。这些是真实的,因为这些组成了他们的分数观念。

第四点,在组成将要分割的连续总体的部分数量和分割线的数量之间存在着一种固定的关系。单独的一刀将足以划出一条线将蛋糕切成两个半份,或者如果现存的这条线的端点也被视作一刀的话,那么需要三刀来切成两部分。但是将蛋糕切成小份并且忽视整体中未加利用的部分的小孩子(如上一段中提到的第三种条件),将一刀与一个部分结合起来。同时,由于这个水平的儿童不能区分欧几里得图形,只关注拓扑关系(参考第一章和第二章),他们自然会将闭合图形的边缘只视为单一的一条线,因此,对他们而言,面积的数量和边界线的数量是刚好对应的。因此,在该水平的儿童,如果他意识到了在构造部分的时候要将原始的总体作为一个整体分完,开始的时候会认为分成两份需要两刀。因此,雷和君特为了让每个娃娃都得到一半,他们切了两刀,结果出乎他们意料地得到了三个部分(然而如果他们想要将蛋糕切成三份,他们就不会这么做了)。[①]

第五,在单纯的定性分割之中,暗含着数学分数的概念,也就是所有的部分都要相等。如果在上面的例子中的实际分割中存在着部分的平衡化的话,那么这是很相近的,并且如果我们坚持每个娃娃应该得到的相等,通常会发现在原始的分割之后,为保证各部分相等,重新又留下了没有分配的剩余部分。

第六,当分割是操作性的并且产生真正的分数时,这里我们指嵌套的系统而不仅是许多并列的片段,分数本身带有双重特征。它们是原始总体的部分,但就其自身而言也是一个整体,因此它们也可以被进一步地划分。在这个阶段最先进的案例表现出了对这一点的某种意识,但是其他人则完全忽略了这一点。那个一片又一片地切出片段的最年幼的儿童,表现出对嵌套序列的不理解,他只知道并列。而其他那些忽略未加利用

---

① 部分的数量和切割的数量之间的不对应让我们想起之前关于跨栏和垫子的问题(《儿童的数概念》,第六章,第三节):给运动员一定数量的跨栏跨过去,在跨栏之间和跑道的两端都铺设有垫子,所以,如果有 n 个跨栏的话,那么需要 $n+1$ 个垫子,要求儿童回答 x 个跨栏需要垫子的数量,或者相反。这一问题只有在7岁左右才能解决。

的剩余部分的孩子，则提供了一个清晰的说明，即从余数中分出小的部分会更困难。

第七点，因为面积的各部分和它们所分离出来的总体是相关的，而总体是不变的；换句话说，部分之和和原始总体是相等的。总体守恒是运算分割的必要条件，并且以同等效力适用于定性和定量的分割。之后(第六节)我们会发现在早期阶段的儿童还不能理解这种必然的守恒。

我们还应补充一下，从心理学的观点来看，除非被试形成了部分一般结构，否则他们还不能遵循这七个条件。不论这种一般结构是完美的、运算性的，还是它只是以直观表达的形式存在于框架(outline)之中，它一定能导致指引实际分割行为的预期格式。在上面的例子中，最小的被试甚至不能在心理上预期定性的二分，读者一定会对此感到震惊，更不用说二等分。他们的行为就好像是没有初步的计划来引导自己的行为，这也就是为什么对于他们而言，七个条件仍然是分开的。之后，将总体分成两等份变成了简单的问题，但是现在儿童通过试误(如果他们记着自己要干什么的话)还在不断前进着，同时也遭遇到一系列对应于部分的七个特征的未预料到的困难。当被试试着将总体不加剩余地分为两个部分的时候，他的预期更为充分，并且我们在假定存在直觉性的预期格式的时候也应该有正当理由。因为尽管格式是不完美的，它仍然暗示着至少部分的前五个特征在某种程度上得到了协调，即便这种协调局限于二分分割。

两等份切割的完成通常在亚阶段2开始的时候能够达到，也就是在4岁和4岁半之间。可是，尽管当物体很小图形很简单的时候(圆、正方形、矩形)，格式在这个阶段开始发生作用，下面复合体的任何一种都会使格式无效，直到进入阶段2(或者，更有甚者，某些儿童要到阶段3)。

增加原始整体的大小会延迟二等分的出现。这在A. 雷伊(A. Rey)的工作中表现得很明显，他对50个孩子开展了下面的实验。给被试一张18cm×1cm的纸，要求将它分为“两等份”，或者“两张相同长度的纸”。在他前面的桌子上放着一把尺子、一支铅笔和一根绳子。如果他的第一次尝试因为分出来的纸是不相等的，那么再给他一张新的纸让他继续，直到他给出自己最好的解决方法为止。雷伊(Rey)发现了四种和我们相同的反应：(1)纸被剪成了几个片段，也就是说，比三个还多，被试追求的是分割行为本身而忽视了二分。在48个被试当中，这种反应在4岁半和5岁半的被试当中出现了3个，在5岁半和6岁的被试当中出现了1个，在7岁半和8岁半的发展迟滞儿童中出现了1个。(2)被试从整体中剪出两张，而剩余的则被忽视或者排除。这种解决方法在4岁半和5岁半的儿童中出现了5个，在5岁半和6岁半的儿童中出现了2个。(3)原始的纸被分成两个不相等的长度，而没有剩余。这种解决方法在4岁半和5岁半的儿童中出现了3个，在5岁半和6岁半的儿童中出现了4个，在6岁半和7岁半的儿童中出现了2个。(4)两个相等的部分(5岁半以下的有6个，超过5岁半不到8岁半的有21个)。

改变整体图形的形状也可能导致问题解决的延迟。因此，如果矩形、圆形和椭圆形被复杂的图形(波浪线、“之”字形、三角形等)代替的话，被试就不能通过简单的直觉预

期格式来决定中点或中线在哪里了，而必须利用推理和测量。在这些情况下，在阶段3之前问题不太可能被解决（一个6岁2个月的天才儿童对于波浪线形状这么说："好，如果我们伸展它，它会跑到那么远，所以一半在这里。"这揭示了直观表达离运算水平已经不远了）。

最后，当要求被试将整体四分的时候（这暗示着两次连续的二分），正确的解决也会延迟。因此，普莱和索姆能够进行二分却不能进行四分。普莱首先进行二分，然后将其中一半切成四份，将另一半切成五份；而索姆开始的时候将整体切为五份，然后将最后的第五份切为四份。因此，那些在解决二分问题时已经被克服的困难，在二分需要被再次二分的时候又出现了。当需要四分的物体很大并且形状很复杂的时候，这一问题也变得更复杂了。现在延迟的原因是双重的，这解释了为什么雷伊的实验中精确的四分要一直到6岁半到7岁半，也就是阶段3的时候才能实现。

第三节　亚阶段2A：三分问题

对于规则的和小的度量面积来讲，二分在亚阶段2A（4岁—4岁半）开始时出现。但是，将这个面积进行三分却增加了额外的困难，这些值得进一步的检验，因为它们所产生的解决方法和之前我们所看到的并不总是相同的。只有第一种类型的解决方法对应着（recalls）第2节的回答，尽管它和它们绝不一样：它包括从总体中剪出小的部分，但是却有所不同，因为剩余通常被再次划分为三块。其他的解决方法源于儿童精确二分的成功；它尽力通过一次或再一次的二分来达到三分，这样却给他带来了额外的四分之一，而对于这一块它会尽最大所能地分配。

下面是第一种解决方法的例子（它可能不如经由二分达到三分先进）。

浩克（4;2）　处于阶段1和阶段2A之间，当被要求二分的时候，他开始切出两个小的部分，把它们给了两个娃娃，而忘记了剩余的部分。当被告知要将新的整个的蛋糕都分出去的时候，他再次分出两个小的部分，但是这时他继续将剩余的分成两个大的部分。实验者接着进行三分的问题，利用一块新的"蛋糕"和三个娃娃：他切出三小片，为每个娃娃分一小块。看着剩下的比拿走的还要大的部分，他又切出三块，但是这个比原来的小，剩余部分比半个蛋糕还要大，他现在处于凌乱的状态，但是拒绝再去碰它。

吉斯（5;6）　更为进步了，因为他最终将整块蛋糕分完了。开始的时候他把蛋糕分成不相等的部分，其中有三个大份和四个小份。在给了每个娃娃一个大份之后，他评论道："*好了，现在我已经分出去了。*——这些剩下的呢？——（他把三个

小份分别给了A、B和C,把第四个小份给了B。)——他们得到的相同吗? ——不。——好,你应该公平呀。——(他从B那里拿走多余的那份,把它切成两份分别给了A和B。他注意到仍然存在不平等,因此他拿走给C的那一小份,把它切成两份,然后再放到C的面前。结果,每个娃娃现在都有一大份和两小份了,尽管他们之间存在着明显的差异。)——现在对了吗? ——*是的,他们得到的已经相等了*。"

吉奥(6;1)　离水平2B已经不远了。他刚开始从蛋糕中切出三个小块,把它们分给三个娃娃,而忽略了剩下的。"但是他们必须要把它全部吃掉。——(他又切出三块,之后又切出三块,但是即便此时,还是剩下了第十块。)——那一块呢? ——*那是给妈妈的*。——不,她已经有她的了。我们该怎么处理它呢? ——*我不知道*。"实验通过一块新的蛋糕再次重复,但是这次,他被告知要确保娃娃们,"要把全部的蛋糕吃掉,他们必须吃到的一样多,并且要全部在一块上。——(吉奥把蛋糕切成连续的四块,而不是开始的时候将它切成两半,它没能成功,只是因为他错误地估计了第三个部分。)——对吗? ——*不对,太多了。他们不得不明天再吃那块*(第四部分)。——不,他们不要,他们想现在就吃。——(他把最后的四分之一分成三块,把它们分出去。)——再用这个新的蛋糕试试。——(他再一次把蛋糕分成了四块,把最后一份分成了三份)——现在用这块蛋糕再试一下。——(这次他成功地将蛋糕分成了三块,但是第一块大约是一半的蛋糕那么大,而另外的两块只有四分之一那么大。)"实验者这时递给被试一张纸,让他用铅笔画出分割线。他第一次尝试画出了四块,下一次尝试分出了七块(因为他把块切得更小而不是更大,所以得到了三块而不是四块!)。最后他分出了三个部分,但是这些大概是9/20、7/20和4/20那么大:"*我把第一块分得太大了,否则我将会得到4块蛋糕*。"换句话说,他所做的是用掉两个四分之一,弄成第一部分,以避免产生四个部分!

这些回答和第二节中儿童试图通过切两刀来构建两个部分时候的回答是类似的。但是,儿童还忠实地遵循着分割的第七个特点。这特别适用于三分的拓扑性质,因为不再有第一个(破坏连续整体)和第四个(缺乏切割数和部分数的对应)特点的困难。第二个条件也被满足了,记住需要分出多少块,尽管在执行的时候有些障碍。但是部分的平衡化(第五个特点)却不那么成功,因为在三分的案例中它很难与第三个特点(用完原始的整体)相调和。最后,整体内部部分的嵌套和后者的守恒(第六和第七个特点)仍被忽视着。

总之,三分比简单的二分更困难,比双二分(四分)更要困难,所以它所产生的预期格式也不太满意。通过分析试图产生三分和二分的儿童的回答,我们可以理解为什么会这样,好像一个人可以通过连续的二分来得到第三部分(!)。

派(4;8) 被要求将蛋糕分成相等的部分送给三个娃娃A、B、C。他首先把它切成两个半份,之后将第一个半份送给A,然后再将剩下的半份又切成半份,把四分之一分别送给B和C:“他们对这样的分法都感到高兴吗?——*这一个(A)得到了一半,这两个都得到了两个一半(一半的一半)!那是两个一半和一个一半*。——但是他们吃到的都一样多吗?——*这个得到的最多*。——好,尽量公平一些,给他们的都一样多!——(派把另一个蛋糕切成两半,然后再把它四分,把四分之一分别给了三个娃娃)*给你,有一块被剩下了*。——但是这些孩子太贪婪了。他们想把它全部吃完。我们对于剩下的这块该怎么办呢?——*那块给妈妈*。——你很乖,但是妈妈不想要。——*那就给爸爸*。——他不在这里。——*那就给阿姨*。——她也不在那里。——*那我们就什么也做不了了*。”实验者给派一块新的蛋糕,再次告诉他三个娃娃必须把所有的蛋糕都吃完,他们得到的必须一样多:“*我要拿刀子*。——好,你想要分多少块呢?——*三块*。”他首先将蛋糕竖直的二分,然后在对角线以下垂直于第一刀的地方水平地切割,这样就把蛋糕分成了四份,但是有两块更大,有两块更小。派把两块小的分别给了A和B,把大的那块给了C,而剩下的那块大的放到一边。“现在有多少块?——*三块,但是有一块不见了*(还是很大的一块)。*应该只有三块的*。”再给他一块新的蛋糕,他也是一样做,然后说道:“*还是有一块不见了!*”然后,给他一块圆形的纸、一支铅笔以及一把剪刀。他画的部分和剪出来的和之前的一样,并且附加说:“*和之前一样有一块不见了!*”实验者接下来继续对正方形和矩形进行三分,在下面将会报告。他最终成功地通过一些暗示和一点幸运完成了三分,然后再给他一个圆形的纸,说道:“好极了。你看你已经做到了。现在试试将这块圆形的分成相等的三份。——(他把圆形二分,接着把其中的半份再次二分,把三块不相等的部分分别分给A,B,C,并且数道)*1,2,3*。——那样对吗?——*这个(A=1/2)太大了,但是我不想切它,否则我又会多出一块。我不想有任何剩余。你来想办法吧*。”派又被给了一个圆形:他把它切成两份,然后把半份藏在自己的口袋里。然后把它又拿出来,把两个半份二分。他把四分之一分别给了A、B、C,把第四份藏到了自己的口袋里:“你做到了吗?——*是的*。”

基恩(4;2) 有一点进步,因为他用掉了剩下的,而不是把它看成是不可分割的。他把蛋糕二分,把一半给A,然后把另一半再二分,把四分之一分别给了B和C。“他们得到的一样多吗?——*不,这个(A)得到的更多*。——你可以怎么做以确保他们得到的一样多呢(用新的蛋糕)?——(他把蛋糕分成两份,然后再分成四份,把其中三份分别给了A、B和C,把最后的一份放在一边。)——这个呢?你该怎么处理它呢?——*我不知道……我必须把它切一下!*(他把它切成两份,把额外的八分之一分别给了A和B,这样C就少了八分之一。)——他们对此都感到高兴吗?——*是的*。——这个可怜的娃娃(C)该怎么办呢?——(基恩现在拿走了C的四分之一,把它分成两份,所以现在C有两个八分之一了。)”现在基恩满意了,因为

每个娃娃都有两块,虽然它们是不相等的(*A*和*B*分别有1/4+1/8,*C*只有1/8+1/8)。

罗格(4;11)　逐渐向三分靠近。刚开始的时候,他把蛋糕分成两个半份,把其中一半再次二分。*A*娃娃得到了一半,而*B*和*C*只得到了四分之一:"现在对了吗? ——*不,那个更大*(*A*所得到的,他把它分出四分之一给了*A*,而将另外的四分之一再次二分,将八分之一分别给了*B*和*C*)。——现在哪一个得到的更多啦? ——*那两个*(*B*和*C*,分别得到了1/4+1/8)。——好,让他们分的一样。——*我会这么做*(把四分之一和八分之一通过连续的二分以达到分给三个娃娃看似相等的数量的蛋糕的目的)。"在问了一些关于整体守恒的问题之后(参考后面的第6节),实验者又给他一块整个的蛋糕。罗格把它分成两块,把一半分别给了*A*和*B*,而*C*则什么都没给;然后他把这两半拿回来,把它们分成四分之一,把其中三份分别给了三个娃娃。对于第四块,他说道:"*还有一点剩余*。——但是不该剩下呀。——(他把最后的四分之一再分成四份,分别给了*A*和*B*十六分之一,而给了*C*十六分之二,所以现在*A*和*B*得到了1/4+1/16,而*C*则得到了1/4+2/16。)——他们得到的都相等了吗? ——*是的*。"

思高(5;6)　在那些该水平二分取得进步的儿童中找到了最好的回答。首先,他把蛋糕二分,把一半给了*A*,然后把另外的一半再二分,把四分之一分别给了*B*和*C*。但是然后他把给*A*的一半又拿回来了,又把它二分。把四分之一给了*A*,而把剩下的四分之一放在一边。最后,他拿过来最后剩下的四分之一,直接把它分成了三份,把三份(不相等的)分别给了三个娃娃:"很聪明! 你已经做对了。现在给你这个,看看你能不能一次把它分对呢。——(但是思高仍然是上来先把它分成两份,就像他之前做的一样,上来就能进行三分仍然不在他的考虑之内。)"

这些儿童比那些接连不断地切下一片一片来的被试进步了,因为他们从开始就尽力去发现一种能够用掉整个蛋糕的方法。结果,他们的部分是不相等的,因为不能直接地达到三分。相反地,他们通过不断地二分逐渐逼近,但是这么做只是因为从开始就想用掉整个蛋糕。将数量分成三份实际比分成两份更困难,因为为了在第一次分割时就用掉整体,一个人必须预期第一部分和它的补偿部分之间的关系。这种关系在二分的时候很容易,因为第一部分和它的补偿部分之间是相等的,但是对于三分而言却更困难,因为第一部分只需要补偿部分的二分之一。因此,当要求分完整个蛋糕时,那些力图达到三分的儿童采取了最省事的方法,预期第一部分和它的补偿部分是相等的,并且在分第二半的时候也是重复同样的过程。需要强调的是,二分是逻辑分割(不考虑两个补偿集合的相等性)的自然形式,所以只要儿童想要分割整体,他们就会自动地倾向于使用它,尽管之后他们在三个部分之间发现了不相等。

总之,我们所举例的这些儿童,或者在开始的时候不能预期要将整体分完的需要,而直接分出来三分(并且接着随着分割的继续导致份数不相等),或者预期到了要将蛋

糕分完,但是却使用二分的方式,因为他们不能预期相等的三份(指第一部分和剩余部分1:2的关系)。我们再举一些在这两种程序之间摇摆的儿童的例子。

安特(4;5) 开始的时候把蛋糕分成两半,把其中一半再次二分,把四分之一分别给了A和C,把一半给了B,这样他感到满足了。但是实验者递给他另一块蛋糕,要求他公平地将它分出去。安特首先将它分成平行的近乎相等的四份,然后将外面的两份二分,把两份八分之一的给A,把四分之一的那份给B,把剩下的四分之一的那份和八分之一的两份给C:"现在公平了吗? ——*是的…… 不*(他把B的四分之一切成四个十六分之一,这样B就像C一样有了4份,A仍然是两份,即便这样现在分出去的也是不相等的)。——用一块新的蛋糕试试,但是不要把蛋糕切得太小。——(他沿着圆形蛋糕的三条线切除三个部分,把这些分出去,而忽略了剩下的。)——好,再拿一块新的整的蛋糕,把它分得一块也不剩下。——(安特把这块蛋糕切成两等份,之后又把其中的一份切成三个不相等的部分,把另一份切成五个部分,这样就得到了八个部分。他以武断的方式把这些部分分给三个娃娃)"

韦伯(5;2) 开始的时候把蛋糕切成两个半份,之后又把其中的一个半份二分,把半份分给C,而A和B每个分得四分之一:"那样公平吗? ——*不,他们中有一个人有整个的一块*(他把C的一半分成两个四分之一,留给自己四分之一,指着剩下的四分之一说道)*我们必须把这块吃掉,否则就得再带一个娃娃过来*。——没有娃娃了。用这块蛋糕试试。——(他通过两次二分将蛋糕分成四份,给了A和B每个人四分之一,而把剩下的两个四分之一给了C)——试着在这个圆形的纸上画线,给我看看你会怎么分给这三个娃娃。——(他跟原来一样又做了一遍)——现在用这个试一下。——(这次他切出三小块,把它们分给三个娃娃,之后对那个不规则的剩下的部分说)*这块待在这里*。——但是我们不能剩下呀。用这个再试一下。——(他把它切成四份,给了每个娃娃四分之一。然后他把最后的四分之一切成三份,给了每个娃娃一份。)"

里奥(5;7) 在韦伯结束之后开始,首先他将它分成了四份,然后把第四份三分。我们通过另外一块蛋糕重复该实验,看看三分是有计划的呢,还是偶然的。但是这次里奥首先切出三小块,剩下了很大的一块,然后又切出三小块,剩下一块小的部分,最后将其二分,分给A和B。发现A和B现在每个都有三块而C只有两块后,他简单地只是将C当中的一片分为两半。当再给他第三块蛋糕的时候,解决方法也没有提高。里奥重新回到双二分的方法,而忽略了第四块的四分之一。

这些被试确实从二分和连续切分中选择了各种各样的方法,但是他们并没有表现得比前面的两组更聪明,因为他们不能将两个要求联合在单一的预期行动之中,那就是:(1)部分之间必须相等;(2)它们的数量一定要和被试数量相等(并且不能有剩余)。

在对这一部分进行概括的时候，我们必须看一下在水平2A的儿童是如何三分矩形和正方形的。否则的话，我们可能会认为，三分圆形蛋糕只是一个特例。当二分圆形的时候，只需要通过画一条直线，这和对称的基本类型相呼应；而圆形的三分，则要求画三条从共同的中心发散出来的直线。三分矩形和正方形则相对容易，因为部分之间是平行的，并且最终的结果是基于中间的部分对称的。因此，看一下，当蛋糕是正方形或矩形的时候，解决圆形分割方法会不会出现，这是有趣的。

我们故意避免一开始就采用矩形，因为由于儿童很容易偶尔蒙对正确的解决方法，它们的简单性就很容易被误导。当被试切出的第一块碰巧是三分之一的时候(他可能更倾向于是出于定性的二分，或者在没有考虑它的大小的情况下简单地切出一块)，这几乎是会必然发生的。当他接下去二分剩余部分的时候，看起来就好像从一开始他就精确预期到了三分一样。

第一个例子是连续的分割的例子。

鲍格(4;5)　把矩形切成平行的几条。最后，他切成了八块这样的条，把它们分给了三个娃娃。给了A三条，给了B和C各两条。在第二次尝试的时候，他最终切成了七条，第三次尝试，他切成了四条(连续切分)。这一次他仅仅是简单地把第四块放在了一边。当告知要用掉整个蛋糕的时候，他又重新开始将蛋糕切成小的条了。

马尔(5;11)　把矩形切成了五块："你切成了几块？——(他像第1阶段的儿童一样数着切的刀数)*4块*。——再试一下(用新的矩形)。——(他切出三小片，给了每个娃娃一片，留下剩下的)——再试一次(第三块矩形)，这一次不要有剩余。"他最后切成了八块，但是他认为他只有七块，因为他是数的刀数。另外一块矩形被切成了七块，三个娃娃每个都被给了两块，而第七块则被忽略了。对正方形，他也是采用类似的方式处理。

之后，给他一块形状类似香肠的黏土模型，要求将它分成三份。马尔首先切出三块小片，放在手里攥着，然后切出七片，将它们依次分给娃娃。第二次尝试的时候，他把香肠分成了四份，分出去三份，而忽略了最后的四分之一。第三次尝试，他直接把香肠分成了相等的三份，但是这次成功地三分是由于运气，因为在另外的香肠中并没有重复，他最后的香肠也是分成四份。

下面是连续二分方法的例子。

罗格(4;11)　将矩形份分成四份(通过双二分)分出去三份。第四份的时候他开始猜了："*还有剩下的*。——那对吗？——*不，不对*。"但是在下一次尝试的时候，他也没有成功。当给他一个正方形的时候，他仍然把它分成四份，但是要他把第四

份推到一边:“*成功了*(数着三块,但是实验者加上了最后的四分之一)。*哦,不!是错的。并没有成功*。”

吉斯(5;6) 是一个有趣的能成功三分香肠,但是不能成功三分矩形的例子。在切分矩形的时候,他把它两分,一份给了A,而另一块则保持完整地给了B和C。但是他成功地将香肠分成了连续的三份。再给他一个矩形的时候,他还是分成两份,尽管这次第二个半份,他又二分了一下,分别给了B和C。当让他分正方形的时候,反应也是一样的。

阿姆(6;0) 在四分香肠和矩形的时候都是受限制的,每次他都发现有一块多出来。当分第二块矩形的时候,他声称他想要将它分成三份。但是他所做的却是将它二分,然后把其中的一半再次二分。它没能将自己从这种格式当中抽离出来。一个正方形也被以相同的方式四分,他给出了前面的三份,然后他将最后的一份成功地分成了三份。

最后,下面是一些混合解决方法的例子(同时想到两种方法)。

简恩(4;8) 通过互相垂直的两刀把矩形切成四份,把第四份拿走。他的第二次尝试也是一模一样的,但是他的第三次尝试有所不同,因为这时他切出三小片而忽略掉了剩下的。他继续在两种方法之间摇摆,直到进行了多次二分,偶然间切出一片小于一半的蛋糕。他把另一块切成两半,所以由于运气,他最终切出了几乎相等的三部分!他自己很是惊讶,以至于当把它们分给三个娃娃的时候,他连续数了几次:“*1,2,3*。”但是在下一次尝试的时候,他没能再次成功。

奥尔(5;8) 切掉了正方形的三个角,把它们分给三个娃娃,剩下比一半还大的一块没有分。他把第二块正方形分成四份,分出去前三块。他开始从剩下的那四分之一当中切出一片一片的,但是因为想给每个娃娃一样的数量,他还是剩下了很小的一块:“*还有很多,这一小块剩下的是一样的*。”

吉奥(6;0) 通过交叉的两刀,想要将一个正方形四分,但是正当他要将第二半分为两半的时候,他已经切了它,却停住了,并且说道:“*不,我会再次切成四份的*。”(就像切矩形的时候一样。)然后,他拿起另外一个正方形,从角落里切出三个三角形的部分,剩下其他的不管。

明显地,三分矩形比三分圆形要容易些;而三分正方形虽然有点难度,但是也比圆形容易;而三分香肠形状是最简单的(因为它就像一个被拉伸的矩形)。然而,我们所看到的解决方法,对所有的模型却都是相同的。即便是当部分是平行的,而非从共同的中心发散出来的时候(就像当蛋糕是圆形的时候,他们将其切成三角形的部分一样),也为此提供了一个更为简单的行为格式,因为它只包含着两个互补的部分。三分暗示着一

个更为复杂的预期格式,因为互补于第一个三分之一的部分必须被再次分割,而第一部分本身则不必,如果之前列举的那些条件(部分之间要想等、无剩余地分割等)都要考虑到的话,那么就困难了。

第四节　亚阶段2B和阶段3:成功三分,渐进于亚阶段2B,成功于阶段3

大约在6或7岁的时候,才能实现成功地分为3个相等的部分。这种成功不是通过试误,也不是由于运气,而是通过运算性的预期的保证。因此,虽然分半在阶段2被掌握,但它只包含着直觉性的预期,三分却是要到具体运算阶段的开始才能完成,而在之前则不能。但是这种进步也不是瞬间的。我们在第3节水平2A的反应和阶段3的反应之间发现了中介的行为,因为问题只是通过逐渐发展的阶段来解决的。概括而言,发生于6岁和7岁之间的水平2B,有些聪明的儿童在4岁或者5岁的时候就能达到。下面是一些模型为圆形的例子。

罗布(4;3)　通过水平的一刀将蛋糕分成两半,但是下面的一半比上面的一半小一点。然后他将上面的斜着一切,这样将蛋糕切成三份。这些虽然不相等,但是差异却很小(大于1/4小于1/2),并且没有剩余。第二块蛋糕通过水平的两刀被切开。再次地,这三个部分在大小上是大致类似的。但是圆形的蛋糕则被切了三次,所以一共被切成了四个部分,最后的一部分又被切成很小的小块,剩下一点尚未利用。第二块圆形的蛋糕通过垂直的两刀被成功地切成了三份。所以,尽管年龄不大,罗布的反应却已经在水平2A和正确的解决方法之间了。

科尔(5;6)　首先将蛋糕分成四份(双二分),然后将最后的四分之一切成三份。第二块蛋糕先是简单地被二分,之后每一半又被分成三个部分,分给三个娃娃。但是再给他第三块蛋糕,他几乎是立刻地就将它分成了相等的三个部分。给他圆形的纸蛋糕,他在刀数和切出的部分数量之间经历了稍许的困惑之后,也再次成功了。

胡(5;8)　开始的时候切成了一半和两个四分之一,之后第二块蛋糕被竖直切成了近乎相等的三块。圆形蛋糕他首先切成了四份,因为他混淆了刀数和切出来的部分的数量。

塞姆(5;9)　最先采用的双二分,但是最后采用了三分。后面他又对圆形蛋糕也重复了这两个阶段。

麦克斯(6;0)　开始的时候也是切成了一半和两个四分之一,但是接下来他也是通过三分切成了近乎相等的三份。

赛斯(6;2) 开始的时候切出来几个小片,不断地切并不断地把它们分给三个娃娃。第二块蛋糕他切出三个大片,留下剩下的。最后,他成功地将第三块蛋糕切成了相等的三个部分。

劳尔(6;2) 首先通过二分法将蛋糕四分,忽略第四个四分之一。但是第二块蛋糕,他首先在水平的直径以下切了一刀,然后将上面的部分切成两半,所以最后他切出来的三份几乎是相等的。第三块蛋糕他重复了这一过程。但是第四块蛋糕他从中心发散出来的线开始切,将它切成了三块近乎相等的三角形部分。这种方法在切圆形蛋糕的时候被再次重复。

下面我们呈现几个在同一水平,试图三分矩形和正方形的例子。你可能会注意到,在水平2B,三分矩形和正方形比三分圆形要更为容易,这一点是很明显的。一些儿童只是在第二次或第三次尝试的时候解决了这一问题,就像在三分圆形的时候那样,其他的则是立刻就解决了矩形或正方形的三分问题。

罗布(4;3) 被要求三分一个正方形(他对三分圆形的反应已经在上面给出了)。他从一边切除一块,然后将剩下的进行平分,这样就得到了三块几乎一样大的蛋糕,尽管它们在形状上是有差别的。

保尔(5;6) 把第一个正方形分成四个矩形,把第四个矩形分成三块。下次尝试的时候,他分出了三块相等的矩形的部分。

思高(5;6) 开始的时候将蛋糕分成五份,将其中的三份分给娃娃,留下两块。下次尝试的时候,他分成了6块,每个娃娃被分得两块。第三次分割产生了四块,他把第四块进一步分割成三块。最后一次,他立刻就能进行三分了。

韦伯(5;8) 把第一个矩形分成了四块,把第二块分成了三块。

科尔(5;9) 有一点进步,他在第一次尝试的时候就把矩形分成了三块,尽管部分之间是不相等的。在第二次尝试的时候,他分成了相等的三块,一个正方形被他立马就分成了相等的三个矩形。

胡(5;8) 在三分圆形的时候经历了很长时间,但是在三分矩形的时候他第一次尝试就成功了。

芒(6;4) 没能成功地三分圆形,但是他一开始就成功地三分了矩形。

基德(6;5) 是个一样的例子,他对矩形说道:“这个更容易,因为他是长的。另一个(圆形)太宽了。”

对于大部分通过三分的儿童而言,在他们最终达到充分的三分之前,都进行了对水平2A试误阶段的反思。他们中的大多数开始的时候用二分的方法,这种方法比那种一片一片切割的方法要先进一点,因为它暗示着从一开始就意识到不应该有剩余。然后

他们调整了自己的格式,直到逐渐接近所要求的三分。但是其他人则是通过从整体中切出三片来,然后逐渐增加切出的这三片的大小,直到他们最终直接达到了三分。虽然这些儿童所构建的部分并非完美的三个部分,但是从一开始他们就意识到了它们应该相等,并且知道一定不能有剩余。

水平2B没有通过初步的试误,就不能解决圆形的三分问题,而三分矩形和正方形的问题,被处于相同水平的更为进步的儿童立刻就解决了,对于这种差异,我们只需要参考基德所做的评论:矩形"越长",在接下来的三分中预期三分就更容易。它和矩形与正方形的进化过程却是一样的,尽管它可能速度更快一些。因此,我们必须排除,三分困难是由于将要分割的整体的形状造成的这种假设。如果部分的七个特点(第2节)都要遵守的话,那么三分总是会比二分更困难,这是由于一个简单的原因,定性的二分暗示的只是两个互相补偿的部分,而三分则远不止于此。这种观点可以通过很多儿童都克服了武断地不断分割,而采取连续的二分来达到三分的目的得以说明。

最后,关于圆形的三分和正方形与矩形的三分之间的差异,我们还需要再加一点评论。那就是正方形和矩形的三分没能解决,而圆形的三分能够解决的案例很少。另一方面,是正方形的三分先解决还是矩形的三分先解决,这依赖于是哪种图形先呈现,这是常规而没有例外。明显地,这种转移会受到物体的感知结构的限制。即便是矩形的三分被立刻解决了,这也并非运算性的,因为它还没有概化到所有的案例中,特别是圆形之中。这一点也证明了这种限制。

最后,通过比较的方式,我们呈现三个在阶段3(水平3A)三分圆形的典型的例子。这些被试是获得直接解决方法的孩子当中最年幼的,这也是该水平与众不同的特征。

罗斯(6;8)　立刻将圆形切成了三个相等的部分,尽管它们都是平行的。

卡尔(6;8)　通过从中心发散出来的直线,立刻将蛋糕和纸切成了三个三角形的部分。

沃特(7;6)　将圆形蛋糕切成了三个水平的横条。当实验者问他可不可以以不同的方法切出这些块的时候,他开始从中间切起,好像将要切成四块。但是他立刻矫正了自己,最终切成了三个相等的部分。

尽管儿童继续看着蛋糕被切成一片片地(这一点并没有什么特殊的),但是只有到了水平3A,他们才能达到最后两个被试那种可能是最容易的成就。就儿童而言,除非这些行为和操作是出于儿童的自主性,否则就像其他各章的例子一样范例是没有用的。这些行为和操作虽看似足够简单,但是却总是会掩盖非常复杂的初级的加工过程。

第五节　亚阶段3B:五等分和六等分

在结束前一部分的研究之后,我们可能会问:三分当中的成就,如其所暗示的那样,是一种对必然相等的运算预期,它是否能够促进五等分甚或是六等分呢。这些和二等分与三等分之间并没有必然的区别。我们的解释将会很简单,并且可以立刻说明,五等分和六等分会更加困难,正确的解决方法要到水平3B才能达到。然而导致最终正确的解决方法的阶段却是和之前的三等分是一样的。

首先,这里有一些阶段2的例子,在这些例子中,简单的分割占主导地位。

克里(5;6)　被告知要首先把火柴放在蛋糕上,以说明他怎么来把蛋糕分成相等的六个部分:他把火柴从周长开始放,却没有在中心交汇。然后他沿着之前被火柴占据的线(已经用铅笔标出)切了一些小片。在后面的三块独立的蛋糕中他也做了同样的三次,每一次都留下一块没用部分:“*我会把剩下的一块给猫*。”

塞姆(5;9)　如果回忆一下的话,我们会发现当问题只是三分的时候(第4节),从长远来看他是成功的。在分成五份的时候他失败了:他所做的是把它们一片一片地切下,之后把它们分出去,留下一块没用的剩余部分。再给他另外一块蛋糕,要求将它分完,他把它切成了五个连续的部分,只分出去前面的五块。之后,他分出了六份,但是他从来没有成功地分出过五份。

麦克斯(6;0)　在经历了初步的失败之后,也成功地完成了三分(第四节),他也没能将蛋糕五分。他切出一系列小片(总共8片),并且在切完之后,只是试图使它们与娃娃的数量对应:“*三个太多了!*”他把另一块蛋糕切成了四份(通过双二分),然后分别在第一个和第二个四分之一上画了一条斜线,将其斜切(得到6片蛋糕),最后他又将第四个四分之一进行了斜切,总共得到七块蛋糕。他把第二块蛋糕切成了六块。第三块蛋糕他首先画了一个小的同心圆,将其变窄。毫无疑问,简单地减少圆的大小也会减少部分的量。然后,麦克斯将内部的圆切成六块,而忽略了外面的环。最后的蛋糕被他切成了平行的不相等的条,甚至这个时候,他也只是切成了七块。

厄恩(6;6)　被要求将蛋糕分成六份。首先他在圆形的纸上画了六个小圈正对着每个娃娃,余下比一半还要大的纸还没有用。但是,即便是小圆圈的数量与娃娃的数量也是不对应的,因为他比自己想画的多出来两个。但是接下来,他还出现了一个有趣的行为:出于不明朗的原因,他在某些小圆圈里面又画了更小的圆圈,然后将两个同心圆之间的空白部分分为六个小的部分。因为圆环很小,所以他们这么做并不存在什么困难。实验者然后告诉他要把整个的蛋糕分成六份,用火柴

来表示会在哪里切。这次他用了二分的方法，分成了两个四分之一和四个八分之一，也就是说不相等的六个部分。当被告知这些部分要相等的时候，他把另一块蛋糕切成了加起来不到蛋糕一半的两个部分以及加起来比四分之一略大的四个部分！他没有表现出比这种解决方法更多的进步。接下来，他被要求要将蛋糕切成三块：他的第一次尝试是切成一半和两个四分之一，但是到了一定阶段(水平2B)他达到了正确的解决方法。可是在六等分上他没能得出任何的结论。

索尔(6;10)　保持它们的基线接触，切出一些小的三角形。他沿着蛋糕切，所以最终的结果就像星星一样，中间的圆圈仍是完整的。但是，他最终切出来的是七块而不是六块。除了切出来的块数不断增加之外，他之后的努力也是类似的，先是八块，之后是九块，但是我们希望的只是六块。

瑞斯(6;10)　简单地随机地从整个面积的不同部分切出六小块。当被要求将它全部切完的时候，他也像索尔一样，从边缘切出八个三角形的形状，而中心则没有利用。

因为五分和六分比三分更困难，接连不断地切割的方法在水平2B的时候仍会出现。然而，年长的儿童很少以单纯的形式求助于这种方法。更经常的是，他们构造了某种整体的形状，就像索尔和瑞斯所构造的星星一样，或者他们会求助于二分。下面是在水平2B的五分和六分问题中所遇到的第二种类型的解决方法。

思高(5;6)　被要求在五个娃娃之间分一块蛋糕，但是将他局限在了两次二分之中，当发现最终的四块和娃娃的实际数量不相等的时候，他感到很惊讶："蛋糕不够。"然而，他两次或三次地重复着他的策略："像这样可不可以呢？——不能(但是他还是在一直地尝试着！)"

西尔(5;6)　当被告知要分成六份的时候，首先把蛋糕分成了四份，然后把四分之一中的两份二等分，这样就得到了六块不相等的部分。他被告知要记住部分一定要相等，之后他把下一块蛋糕分成了五份，在开始着手这么做的时候就注定了不能成功！这时，分出来的第五个四分之一被简简单单地分成了两半。第三块蛋糕被他直接分成了六个部分，但是这种成功是偶然的，因为他在后面并没有重复。在分第四块蛋糕的时候，赛尔几乎执行的是三次二分：两个四分之一和四个八分之一。

艾利(5;6)　也采用了和西尔相同的二分的方法，分出了六块：首先通过双二分分成了四块，然后再对其中的两个四分之一进行平分，最后得到两个四分之一和四个八分之一。"现在你觉得公平吗？——(他通过从两个四分之一中拿出来一点放在两个八分之一上，增大了它们的大小，但是另外两个八分之一则未动。)——再试一次(用另一块蛋糕)。"他再次产生了两个四分之一和四个八分之一。

利亚(5;7) 产生了四个四分之一,他将最后的四分之一平分,最后得到了五块。

里奥(5;7) 也是同样的问题,他将蛋糕首先分成了两个部分,然后将其中的一半平分,将另一半三分,这样分出来的五个部分仍然是不相等的。"那样公平吗?——*不,因为他们中有些人比其他人得到的更多*。"

马尔(5;11) 被要求将圆形蛋糕切成五份,他先把圆形二分,然后把其中一半切成平行的长条。对于另外的一半他也是这么做的。然后,他用垂直于前面的方法将最后一块切成两半。

米克(6;1) 在开始的时候,就以比之前儿童先进的形式反应,这预示着阶段3的开始。在把蛋糕切成六份的时候,他先将它二分,之后将每一半都分成了三个不相等的部分。但是在他下一次的尝试中,为了矫正这种不相等,为了保证部分相等,将部分的数量增加到了八块。他的第三次尝试也是一样。下一次,他成功地将数量降为了六块,但是部分又不相等了,并且和第一次二分时所沿的直径没有关系。

最后,这里是一个混合的案例。

赛弗(6;7) 被告知要将蛋糕分成六个部分。他把六个娃娃以相同的间距放在蛋糕的外围,但是他不是根据娃娃的位置给他们六块蛋糕,而是画了很多的线(14条),可能他认为如果每个人都给几条蛋糕的话,最终的部分也更可能相等。"我要求的是几块?——*六块。我分了很多*。——好,给你另一块。——(他把蛋糕分成四块,将其中的两块四分之一平分。)——你分的蛋糕一样大吗?——(他把另两块四分之一的蛋糕也平分,但是发现一共得到了八块蛋糕。)——很好,给你这块新的蛋糕。你认为中间的可能会帮助你吗?——*是的*(他把它分成两个部分,然后把每一半分成三块大约相等的部分)。"

五分和六分问题的解决方法和二分、四分以及三分的解决方法是相同的。唯一的差别是原始的(不完全的和错误的)解决方案比三分的时候持续的时间更长,覆盖整个亚阶段2B。这是可以预料到的,因为随着要求分割的部分的数量增加,预期行为的困难也增加(除了四分比三分容易之外)。更为重要的是,我们可以很轻易地预料到,儿童会通过部分之间不相等的这种试误方式,来进行五分和六分。但是,分割部分的数量的增加,却使得儿童求助于留下很大剩余的连续分割,或者,更多的是各种各样形式的二分。

我们可以推断的是,无论什么时候儿童被告知不能有剩余,他们都会自动地求助于二分,将其视为切分的最自然的形式。

另一方面,在水平3A,三分的问题立刻就解决了,并且这时我们发现儿童也可以解

决五分和六分问题。但是即便这个时候也还是有些迟疑。下面将要给出的例子是一些能够不加初步试误地进行三分的儿童,并且三个部分的大小之间几乎不存在差异;然而相同的儿童却不能不加试误地进行五分和六分。

罗斯(6;8)　他三分时的反应已经在第四节的时候给出了,他被要求将蛋糕分成五份。开始的时候,他通过连续的划分将整个蛋糕分完了,但是分成的却是7个部分而非5个部分。接下来他试着采用双二分,但是很快拒绝了这种假设。最终,蛋糕被他分成了近乎相等的五个部分,并且这些部分之间是和三分的时候一样,是平行的。

卡尔(6;8)　开始的时候将蛋糕分成了五个不相等的三角形的部分,前面的两块占据了整个蛋糕的一半(尽管并非通过二分得到的)而非五分之一。但是,在他第二次尝试的时候,在构建五个近乎相等的部分的时候,却几乎没有困难。

维特(7;6)　在第一次尝试的时候,也成功地将圆形进行了三分。现在他未加犹豫地将圆形进行了二分,又将每一半进行了三分,最后得到了六个相等的部分。在构建五个部分的时候,他就没那么顺利了。在第二次尝试的时候,他进行了连续的划分,直到没有一块剩下,但是这次他切出了七块。最后,在切第三块蛋糕的时候,他通过增加切出的部分的大小,成功地预期到了分割出的部分的数量,得到了五块相等的部分。六等分也通过采取开始时的策略,成功地被解决了。

玛丽(7;2)　在六岁的时候,先将蛋糕进行了二分,之后将其中的一半进行了三分,将另一半进行了四分(不是通过二等分,而是由于错误对应而造成的错误)。她第二次尝试的时候就成功了。

尔弗(8;2)　也是要求六等分,开始的时候得到了五块不相等的部分。在切第二块蛋糕的时候,他首先画了一个竖直的直径,之后画了两条斜的直径(形成一个字母X),这样就得到了六块相等的部分。

顾恩(8;2)　开始的时候将六个娃娃按照相等的间距放在蛋糕的外围,然后切出六块小的部分分给六个娃娃。因为这些部分是不连续的,这一点和阶段2时候连续不断的分割类似。但是顾恩增加了部分的大小,直到他不留剩余地得到六个相等的部分为止。

布尔(9;2)　仍然处于试误阶段,切出七块不相等的部分,接下来他发现了和尔弗一样的画出三条直径的方法。

尽管每一个被试最后都成功地分出五个或六个相等的部分,但他们都先要经历一定数量的试验阶段,尽管在三分的时候这个阶段已不必要。只有到了在水平3B,我们才发现,他们表现出了和三分一样的五分和六分的保险措施。

鲍(9;7) 将圆形切成了三个相等的部分，然后他进行了二等分。五等分从一开始也以极大的保险(只有一块是不相等的)得以实施。

但是，让人惊讶的是，六等分应该出现得比三等分更晚一些才对。

第六节 部分-整体关系和总体守恒

像第二节中所提到的，部分-整体关系，像那些处理嵌套的[1]逻辑集合(logical classes)或连续整体(参考第五章)的分割一样，在早期的研究中也一再重现。不管内容是什么，当分割亚集合的时候，仍处于直觉和前运算水平的儿童还不能理解不连续的整体。而当分割部分的时候，连续的整体则被作为部分的整体被保留。相反的，当儿童学会了执行具体运算的时候，不管这些包含的是逻辑归组还是部分的成分，他都自动地意识到了部分在逻辑上是可移动的，整体因而被保留，因为它对应着(真实的或虚拟的)部分的集合。毫无疑问，整体的守恒问题在我们所关注的分割面积问题当中起着决定性的作用。特别地，那些依赖于不用尽原始总体的简单分割的解决方案，是导致建构的部分和恒定的总体之间必然关系建立失败的原因。唯一的问题是，这种关系的影响有多深远？在第2节，我们陈述了部分-整体关系是分割的七个特点中必不可少的特点之一。为了更精确地了解哪一部分在这种关系中起着作用，我们要求儿童在访谈结束的时候回答，是否所有的部分加起来等于原始蛋糕的大小。我们的第一个例子在他的第一次尝试中还不能二分蛋糕。

索姆(4;8，参见第2节) 在经历了几次试误之后对蛋糕进行了二分："这两个娃娃的妈妈带给他们几个蛋糕呀？——*一个*。——我们现在有几个呢(两半)？——*两个，两个一半的蛋糕*(指着从一个蛋糕切除两块之后的剩下的另一块蛋糕，大约等于整个蛋糕的2/3)，*那个被切了小一点*。——对，但是这里有几块呢，就像我们开始的时候？——*我们原来有一个整个的蛋糕，现在有两个了*。——对，但是看，这里(整个的蛋糕)和这里(两个一半)蛋糕的数量相等吗？——*不，那里(两个一半)更多*。"之后，当索姆为三个娃娃切出三块蛋糕之后，剩下一块没用的，实验者把四块蛋糕合起来，将其与另一块类似的完整的蛋糕进行比较："这些蛋糕合起来和这个整个的蛋糕都有相等的量可以吃吗？——*不，这个(切成块的)更多*。——用这些蛋糕可以做成几个这样整个的蛋糕呢？——*更多*。——但是这(整体)是几个蛋糕？——*一块蛋糕*。——但是这些蛋糕并不是可以吃到更多，是

① 等集合的(E. L.)。

吗?——*是的,当然可以,因为它更多。*"

下面,我们呈现几个成功地进行二分却没能进行三分的被试的例子。

基恩(4;2) 首先把蛋糕分成两份。这两块蛋糕被放在一个娃娃的面前,将一个整个的蛋糕放在另一个娃娃的面前:"这个娃娃吃这些,那个娃娃吃这个。他们吃到的一样吗?——*不。*——它们加在一起不相等吗?——*不,那不是一回事。*——哪一个更多?——*那一个*(整个的蛋糕)。——为什么呢?——*因为它被切了。*——好,看着。假如我有这个(两个半块的蛋糕),你有那个(整个的蛋糕),我们两个吃到的蛋糕不一样多吗?——*我吃到的更多。*——为什么呢?——*我的是圆的,你的已经被切了。*——在我们把它切开之前(指着两个一半的蛋糕),这个妈妈带来了几个蛋糕?——*一个。*——好,从他们那里我们可以拿回几块呢?——*两块。*"

另一方面,当基恩把一块蛋糕切成六块的时候(分给三个娃娃),这六块蛋糕然后合起来放在了一个娃娃的面前,而另一个娃娃则给了两个一半的蛋糕,而第三个娃娃则给了整个的一个蛋糕:"他们吃到的蛋糕一样多吗?——*不,这个*(六块)*更多。*——为什么?——*因为它更多。*——另外两个呢?——*这个*(整个)*更多。*"基恩持有这样一种观念,即整个比两半更多,而比更小的几块的集合体更少。

派(4;8) 试图通过二分(第3节)的方法将蛋糕进行三分,现在他被要求将一半加两个四分之一与四个四分之一进行比较:"这两个娃娃吃到的蛋糕会一样多吗?——(他数了数)*一个有四块,而另一个有三块。它们不相等,这一个更多*(4/4)。——假如有两个妈妈。这个妈妈可以做成几个整个的蛋糕,另外一个妈妈可以做成几个才能分给这些孩子?——*两个。*——好,从这些(1/2+2/4)当中你可以做成几个蛋糕?——*一个。*——用这个(4/4)呢?——*一个。*——好,那么这两个娃娃吃到的是一样多的!——*不,那个娃娃有四块可以吃,而这个娃娃只有三块可以吃。*——但是从这些蛋糕(1/2+2/4)中我们可以做成几个蛋糕呢?——*一个。*——从这些(4/4,还要减去在这时突然滚下桌子的1/4)当中呢?——*一个,不……两个,不……一个,*(他把剩下的三块集合起来说道)*有一块丢掉了。*现在它们都有三块了,他们吃到的是一样的。"派还缺乏对单位的理解,导致他不管它们的大小,而将它们视为是相等的。所以,他拒绝承认4/4=1/2+2/4,尽管他完美地意识到了每个集合都能构成一个蛋糕!

浩克(4;2) 是另一个方法二元的例子。出示给他三个娃娃。将整个的蛋糕分成10块,给第一个娃娃。将浩克自己二分的蛋糕给第二个娃娃,而第三个娃娃则被给予一个整个的蛋糕。"好,现在看着。一个娃娃的妈妈给了这个娃娃这些,给另一个娃娃这些,给第三个娃娃这个。他们会吃掉给他们的所有的蛋糕吗?——*是*

的，如果你吃了太多蛋糕的话你会变胖，如果你吃的更多的话你会肚子疼。——对，那么你来告诉我，这三个娃娃将会发生什么呢？——*那个娃娃*（十块的）*将会肚子疼，那个娃娃*（两半的）*将会变胖，但是这一个不会。她吃的没有那么多，只有这一块*（整个的！）。"浩克然后被要求从一个整个的巧克力和分成两半的巧克力中选择一样：没有犹豫，为了得到更多的，他拿了分成两半的那个。但是片刻之后，他承认了一个分成17块的蛋糕与另一个完整的蛋糕大小一样："*是的，它们是一样大的。*——为什么呢？——*因为*……——可以吃到一样多的吗？——*不。*——你会选哪一个？——*那个*（整个的蛋糕）。*它更多。*"因此，对于浩克而言，总量是随着分出来的部分的数量而增加的，除非这些部分很小。换句话说，儿童还没有关于整体的运算守恒，而只是一系列类似于感知调节的直觉调整。在从错误估计向正确估计转变的过程中，两种错觉是相互抵消的。

安特(4;5)　意识到了，分成部分的蛋糕可以被重新组合为整体。当将一个整个的蛋糕被分成三部分之后，他被问道："这些等于几个圆的蛋糕？——*三个。*——什么？三个圆形的蛋糕和我们刚开始分的蛋糕相同吗？——*不，是一样的。*"然而，他拒绝承认部分的各种各样的集合和整体相等。例如，将一个整个的蛋糕给一个娃娃，将一半加两个四分之一的蛋糕给另外一个娃娃，将两个四分之一加四个八分之一的蛋糕（这些是安特之前自己切成的蛋糕）给第三个娃娃。"他们得到的一样吗？——*不，那一个*（整个的）*最多，因为它是圆的。*——但是，他们吃到的量是相同的，是吗？——*不。这个*（整个的）*吃到的更多，那一个*（第三个娃娃）*吃到的更少。*——但是看着这个（实验者将蛋糕切成两半）。这个蛋糕的量和那个蛋糕（整个蛋糕）的量相等吗？——*不，那个*（整个的）*更多。*"之后当分割矩形的时候，他也是声称整体比两个两半加起来更多一点。

罗格(4;11)　认为将蛋糕切成七份，意味着比切成两半更多了。"*那个*（有七块的娃娃）*吃得更多。*"另一方面，他也认为，一个整个的蛋糕比两个一半的蛋糕，能吃到的更多。然而，他也承认这些集合中的任意一个（7/7，2/2，等）都能重新被组合成一个整体，但是他不承认它们这时是相等的，因为总体被分割了。

吉斯(5;6)　也承认部分和总体是相等的，"*它们是一样的。*"但是当要求他们从整个蛋糕和两个一半的蛋糕中选一样的时候，他选择了整个的蛋糕，因为"这样我可以吃到更多"。

我们可以看到，这些回答有多么矛盾。被试知道，整体可以从破碎的部分重新建构成它原来的样子。浩克、安特和吉斯甚至确定地说"它们是相等的"，就返回起点这个意义而言也总是可能的。但是同时，他们也同样固执地认为部分之和不等于总体："不，它们不一样。"基恩这么回答。当他们的注意力集中于行动（就其功利性而非自我中心的方面而言，而非就其操作性的特点而言）的某些特征的时候，更显示出了相等性的缺

乏。多数儿童都确定地回答,整体中能吃到的和部分所组成的集合所能吃到的不相等。

儿童的判断之间存在不一致,说明他们的思维模式还不是运算性的,而是直觉性的,以至于与感知调节相比,他的说明只是简单地表达或调整。相同的现象,在阶段2当相等的部分面积从相等的总体中被减掉的时候,也是一样的(参考第十一章)。有时候,被试说完整的蛋糕比两个半块或三块能吃到的更多"因为它没有被切"(基恩)。另一些时候,我们发现,他们认为部分的集合能吃到的更多,因为它们的数量更多:"是的,当然它们(能吃到的)更多,因为它有很多(塞姆)。"但是即便是到了这个时候,当切出的块儿很小的时候,这种观点也不会停止发挥作用,这是感觉对比最明显的例子。当部分很小的时候,他们认为部分的总量比整体的量要少,可能是因为一口能吞下的话,会让他们感觉少了。在这两种判断模式之间,我们甚至发现了对相等性的短暂的认识,这是因为两种互相对立的因素:部分的数量和面积的大小,它们是互相补偿的。因此,短暂地,浩克也承认了17块蛋糕的大小等于与它被分开时相等的总体类似的大小。

我们需要理解这种矛盾的原因:一方面,被试承认部分恢复到原来的整体是可能的,但是另一方面,他们又否定部分之和等于总体。这种特殊的矛盾,与发生在相同水平的关于守恒问题的其他矛盾一道,可能通过E. Meyerson所建议的观点很容易地去解释。他认为儿童可能意识到了可逆性,但是缺乏同一性:他们承认A可以转化为B,B也可以转化为A,但是同时他们却不承认A和B在量上相等。但是实际上,这种解决方案比简单地玩文字游戏要复杂得多,因为有两种可逆性和两种同一性,他们对应着两种不同的思维方式。运算的可逆性不同于直接的(或武断的)操作。与这种形式的可逆性相对应,我们得到运算的特性,它是直接的操作和它的相反操作的产品(如$+1-1=0$)。运算的特性和可逆性依赖于逻辑"归组"或数学"归组"。在这些结构能够得到具体表达以前,我们可能会发现对返回起点的(经验性的)可能性的直觉的启示。这些前运算的直觉暗示着某种不完全的可逆性,它们在前运算的识别中也有相匹配的成分,这暗示着某种概括源;因此,部分可能被认为产生于整体,就像对儿童而言,云产生于烟一样。

现在矛盾是清晰的了。这时还不存在完整的总体与任意部分之和的相等,因而总体守恒也是不存在的,但是这是因为还没有真正的可逆性,不管是对与精确的必要的直接运算相对应的逆运算而言,还是真正意义上直接的运算而言!这一章总体都是在说年幼儿童的最早类型的分割并非源于支配行为的预期格式,这种格式在本质上是运算性的,与围绕着对部分理解的各种各样的条件相一致。不管行为是采取连续和经验分割的方式,还是采取二分的方法,以达到三分或五分、六分的目的,它不变的特点是试误。因此这种行为还不能被称作真正的运算,因为真正的运算暗示着掌握了确定的可逆能力,如对相对应的逆运算的否定。这里,当部分被整合为原始图形的时候,对分割部分的重新组合并非行为的逆运算,或者如果说它是的话,那也只是近似的,因为最初的分割缺乏整体的计划,只是伴随着实际的分割行为一点一点地切下来罢了,而没有计算原始蛋糕的整体等。只有当后面的运算沿着固定的和预先计划的路径的时候,构成

特定整体的部分的重新组合才是切割的逆运算，因为只有这个时候这条路径才可以被模糊地逆转。这是真正的可逆性的条件，也是整体守恒、整体定量的同一性以及整体部分之和的条件。

我们所引用的回答，可以通过两类不同类型的定量来评价。第一种是“密集的”，是从部分-整体的关系中得出的。只要存在运算的形式，就会有整体的守恒，可想象为部分之和。这种运算纯粹是定量的，因为它只能解释“部分”特征的前六个特征（第2节）。如果没有总体的守恒，也不会出现密集型可逆运算；只要存在守恒，它们的组合就能保证恒定性。另外一类定量是宽泛的，表现为部分本身之间的定量比较。只要分出的部分之间是相等的，这种比较就是度量的，这暗示着一系列单位概念及相应部分的建构。后一种定量依赖于前者，因为如果没有总体的守恒，在这之前也不会出现单位的理解。派的例子就说明了这一点：当三块（1/2+1/4+1/4）与四块（4/4）相比较的时候，当后者中的四块有一块掉到地板上时，他轻松了：“有一块没了。现在它们都是三块了，它们可以吃到的是一样多的。”也就是说3/4=1/2+1/4+1/4，因为在这里所有的块都被视为相等的，尽管它们都是同质的单元。

与此相反的，分割越是精确的和运算性的（不管是密集定量还是度量定量），部分之和和总体之间的关系越是存在着清晰的必然关系，整体本身的守恒也是。现在我们来举几个过渡的例子。

以胡（5;8）为例：“现在这里有这些块蛋糕，那里有一个整个的蛋糕，它们能吃的蛋糕是一样的吗？——*不，那个（3/3）更多，因为它有三块。*”但是当稍后问相同的问题的时候，他回答道：“*是的，是相同的。*——那么在之前你是怎么想的呢？——*我把它当成了三个蛋糕。*”

罗斯（6;8） 也是一样，当将五个五分之一，三个三分之一和一个整个的蛋糕相比较的时候，他首先说道：“*那个（5/5）能吃到的最多，这个（1/1）有很多。*——这个（1/1）和那个（3/3）呢？——*这个（1/1）能吃到的更多，因为那个（3/3）很小。哦，不！它们吃到的是一样多的，因为那个（3/3）是一回事，只是它被切了罢了。*

下面是一些在定义上能够很好守恒的例子。

莫格（5;11） 将三个切成三份的蛋糕和整个的蛋糕加以比较：“我有这个，你有那些。我们吃到的蛋糕是一样多的吗？——*是相等的，因为我把它切了。*——是完全相等的吗？——*是的。*”之后，他把蛋糕切成四份：“妈妈带来了几个蛋糕？——*一个。*——那么你用这些蛋糕能制成几个蛋糕呢？——*只能做一个，因为只有一个蛋糕（在切之前）。*”

劳尔（6;2） 将四个四分之一和一个整个的蛋糕加以比较：“*它们能吃到的是*

一样多的,因为它们是同一块蛋糕;它们大小相等。那里是四块,这里只有一块。只有这一块,我把它做成块儿,把它们发出去。但是它仍然是相同的蛋糕,它还是圆的。如果我把它们合到一起,还是一回事。"他被要求将一整个的蛋糕和十六块蛋糕相比较,这十六块蛋糕是通过对一整个蛋糕进行连续十六次分割而得到的:"谁吃到的更多呢,是有这么些块的你,还是只有这一块的我呢?——*把它们合起来还是一回事!你把它们合在一起就会得到那个蛋糕。你可以将它们合在一起,这是一回事。*——你可以把这些做成几个蛋糕?——*一个。*"

卡尔(6;8)　将三个三分之一和一个整个的蛋糕相比较:"谁能吃到更多?——*是一样的。*——为什么?——*因为如果你把它们合在一起,你会得到一个一样的。*——这些呢(9/9和1/1)?——*也是相同的,因为你已经把它们分开了。*——但是为什么是一样的呢?——*如果你把他们黏在一起,你还是会得到一个。你把它们放回去还是一回事。*"

维特(7;6)　3/3　v. 1/1:"*还是相同的,因为我已经把它切成块了。*"

即便是年幼的罗布,尚处于水平2B的分割水平,也确信了整体的守恒(尽管他不能解释它)。

罗布(4;3)　"我要吃掉这个(1/1),你可以吃掉那个(3/3)。我们吃到的一样多吗,还是我们当中有一个吃到的更多呢?——(他大笑着)*这是一回事。*——为什么呢?——*因为……*"对于五分,他的回答也是一样的。

我们立刻就能够发现,对于所有的儿童而言,整体是如何等于部分之和的。因此,不管部分的数量是多少,也不管它们是如何排列或分散的,它的量总是恒定的:吃掉一个整体和吃掉三个三分之一,或是十六个十六分之一,是一样的。上面所有的被试,当切分成三分之一或者是五分之一的时候都处于水平2B或水平3(尽管切分的水平并不总是和守恒的水平完全对应的)。因为他们或者具备了分割(水平3)的预期格式,或者具备了近于运算性的直观表达,他们的行为和运算有了足够的可逆性以确保恒定的存在,并且这些类似于劳尔和卡尔的儿童以最为清晰的方式认识到了。

第七节　总结:分割面积和对分割部分的理解

本章中的各项发现在三个方面具有重要意义。它们包括空间作为一个整体分割的问题,连续数量的分割和嵌套逻辑集合之间的平行问题以及部分就其形状分割的数量化问题。

认为对连续空间数量的分割比对不连续的逻辑或数字元素的复合体的理解包含着更为基本的加工，这似乎是合理的。因此，当一个集合被分为亚集合的时候，记住最初的整体是不容易的。它的重新建构一定暗示着逻辑加法或重新组合的精确运算。分割将亚集合从整体集合中分离出来，前者然后获得了某种程度的独立性，因此儿童很容易忽视它们仍然是和被分离出来的整体相关的。但是当一个蛋糕被分成几块的时候，它仍然带有蛋糕的表面特征，因此每一块蛋糕都应该连同整体的蛋糕以及它们的补偿集合被记住。我们甚至可以说集合或亚集合的分割和重新整合是某种程度的抽象运算，而分割一块蛋糕和重新将蛋糕整合起来则是直觉的和具体的。

然而，在这些事件中，即便是当蛋糕为圆形或是正方形或矩形的纸的时候，对于年幼的儿童来讲，面积的分割也会遭遇到极大的困难。在各个方面，它的复杂性都类似于逻辑分割或包含集合之中部分集合的嵌套关系。这些困难并不限定于这块或那块，或者是三分或五分，而是在分半和二分的时候也是很明显的（如，分半理解中明显的是，不管那些部分的相等性，将两个补偿的部分切开）。

因此，儿童在所有分割当中的失败，都是由于不能预期部分和整体的可能关系。他们首先是进行简单的分割，将几个部分并置，没有任何部分之间以及部分与整体之间预想关系的存在。确实地，只要是整体包含着虚拟部分的整合，那么整体就会被忽略，这也就是为什么儿童不能进行正确分割的原因。正如我们所提及的，当要求将一个整体分成两个的时候，处于阶段1的年幼儿童仅满足于切出两片不相等的小片，而留下整个剩下的大块。这种方法在三分和五分的时候也重新出现了。

明显地，我们所指出的这些困难会出现，只是因为还没有意识到所要求的部分和被分割的整体之间的必然关系。这个领域和我们所研究的其他领域一样，事实是清楚的：想法并不能单独产生预期格式，因为表征不能预见到可能发生的事情，除非它由行为所引导。只有当儿童达到了行为协调的水平，形成了可逆的运算组合之后，我们才会发现运算性预期格式。这些是类似于归组这样的组合系统的心理成分。在这些归组被建构之前，行为只能依赖自己的资源，也就是说各种各样的试误行为。在所呈现的案例中，我们看到，儿童首先是从连续不断的切割开始，而没有总体的计划。

我们或许可以得出结论，面积或者连续整体的分割运算等同于集合或不连续集合的分割运算。两者之间存在着分割和重新整合之间的互惠关系，或者对于逻辑集合而言，存在着集合总体结构中亚集合之间的嵌套关系（这里的互惠是指直接运算和逆运算之间的相互依赖）。唯一的差别在于，对于集合（classes）或不连续的集合而言，分割和部分之间的嵌套关系依赖于临近性。[①]除了逻辑和亚逻辑[②]的这种差异，运算不仅是类似的，而且它们出现于具体情境的相同年龄（也就是说阶段3的开始）。更重要的是，无

① 无论是空间的还是概念的，但不是在感觉连续体上面（E. L.）。

② 也就是说空间的，参考第十四章，第二和第三节（E. L.）。

论是对连续整体的亚逻辑分割而言,还是对集合的逻辑分割而言,在所有的分割之中,二分都占有特殊的位置。就集合(classes)的逻辑分割而言,最简单的分割就是将集合B分割为两个补偿的亚集合:A和A'。集合(classes)的加法归组,首先依赖于这些亚集合的重新组合,因为归组与一系列的二分分割相对应,如$A+A'=B$,$B+B'=C$,$C+C'=D$,等。在部分领域也是这样,二分是最喜欢的一类分割:它在阶段2开始出现,年长的儿童在尝试进行三分或者之后进行五分的时候经常求助于连续的二分(并且确实地,不管这种方法有多么错误,它总比早期的经验性的连续分割更为先进)。

本章所研究的事实不仅说明连续面积的分割和逻辑集合的分割之间存在着类似之处,并且说明对分数的理解甚至分半的理解依赖于定量的或密集的次级结构。在分数的广泛性特点被遵循以前,也就是说部分之间被相等之前,它们首先要被建构为整体的必要部分,既可以被拆分,也可以被重新组合。一旦部分的这种理解被建构了,让各部分之间相等也就相对容易了。因此,虽然分割运算的具体表达是一个漫长的过程,分数概念却逐渐逼近部分概念。因为从属于整体的部分之间也是互相之间相关的,当这一点被达到的时候,分数的理解也就完成了。

李占星译,朱莉琪审校

第十三章　面积或体积的翻倍[1]

目前我们所考虑到的有关面积或平面测量的运算，以及那些有关体积或三维空间的运算，可以分为两类。或者它们可减缩为逻辑的加法或减法，或者它们是逻辑的而非数字的乘法。通常的，这里所包含的元素或关系可以通过定量的方式来表达，但是以这种方式来计算面积问题却还不是我们所关心的。这一问题包含着数学的乘法运算，已经超出了逻辑上的乘法运算：一个由2×3的线性单位所组成的矩形可以得到六个正方形单位。

例如，我们在第八章研究了两维和三维的测量问题。这种测量方法是在矩形的每条边上对单位进行连续的应用，但是它不包括这些单位的数学乘法。相反地，单位以线性的方式被排列，形成一个包含有两个维度或三个维度的矩阵，这意味着运算格式来源于逻辑乘法而非数学乘法。坐标轴的建构是类似的，因为这些坐标轴是以定量的方式而非数学乘法的方式来表达这一矩阵的。在第十一章，我们研究了面积的守恒和测量，但是正因为所研究的问题是这些，所以所有的被试要做的只是将已经做好的面积单位（正方形、矩形、半正方形、等边三角形等）加以应用，而非以线性测量的函数的方式来计算面积。所以，这里数学乘法也是没必要的。最后，在第十二章我们解决了面积的分割问题，但是由于这一过程包含着将整个面积分割成部分面积的过程，所以这里所包含的单位全部都是正方形的，而面积和边的长度之间的数学关系是不相关的。

现在我们必须来考察一下测量面积和体积的问题了，因为它包含了数学的乘法。换句话说，我们应该分析一下在图形的边的测量和它们的面积或体积测量之间存在什么关系。这一问题比之前提到的那些问题（即第八、十一和十二章）要复杂得多。结果，直到几何被正式地纳入到学校的课程之后，我们才会发现儿童能够利用正确的解决方法。这种不断增加的困难的原因在我们后面的分析中将变得清晰。

这并不意味着我们应该检验一下，儿童的思维是以什么样的方式来适应学术指导的。那将是非常有趣的一个话题，但是它是教育心理学所关注的话题，而非发生心理学（genetic　psychology）所关注的，因此，它不适用于本研究的工作。所以，我们不会问儿童是如何理解一个2×3的矩形得到6的面积的[2]：事实上，他们似乎直到阶段4这一

① 本章和Mlle U. Galusser合作完成。

② 见本章结束的补充部分。

话题被引入到学校的课程之中时，才能获得这种理解。而之前我们所探讨的问题，却像在第十一章的那些问题一样，能够自发地得到解决。

但是，尽管将数学乘法应用于面积的计算不在我们考察的范围内，它所引起的智慧问题却可以通过将教室里面的联系减小到最小来加以分析。我们的方法不强迫儿童采用数学的形式做出最终的回答，而是探明潜在的运算机制。相应的，被试只是被要求将面积或体积翻倍。我们不坚持精确的答案，因为那样的话不仅包含数学乘法和加法，还包括平方根和三次方根。然而，我们会发现，让儿童回答这样的一个问题是相对容易的：被试是如何建立长度与面积或体积之间的关系的，它是如何用数学乘法替代逻辑乘法的。

第一节　方法和结果概要

首先呈现给被试一条2 cm或3 cm的直线，要求他画一条二倍长的直线。给他一把2分米的尺子和纸条，但是实验者避免使用任何有关使用这些东西的言语提示。

然后，给他一个3 cm×3 cm的正方形，要他画出另外一个两倍大的正方形。这里，实验者必须坚持想要的是另外一个正方形，否则的话儿童会简单地画出两个在一起的正方形或者一个矩形。此外，他必须强调清楚它的面积(而非像边这样的其他维度)，必须是两倍大。就像在第十一章(第1节)一样，编一个故事，告诉儿童这个模型代表了一个正方形的地，有足够的草可以让一头牛吃，他必须画出另外一个正方形的地，以保证两头牛都能吃到和第一头牛吃到的草一样多。作为对立的实验，实验者将一个单位土地(一个和模型一样大的正方形)的一个角叠放在大的正方形的上面，问被试没有被覆盖到的土地的部分是否真的包含和单位土地一样多的草。如果必要的话，这个未被覆盖的部分可以用剪刀剪下来，然后让儿童将它的元素重新归组，看看它是否和单位土地的大小相等。

但是仅仅是画和建构还不够：我们还呈现给儿童一些制作好的正方形的选项，要他们选出是边长为3 cm的正方形的二倍的那一个。总共有四个这样的正方形，它们的边长分别为4 cm、4.25 cm、5 cm和6 cm(边长为4.25 cm的那个正方形面积接近9 cm^2的二倍，因为它的面积是18.0625 cm^2)。关于画图的问题在这些制作好的正方形中也被重复。

接下来我们进行类似的访谈。它们涉及圆形土地、正方形土地和不规则土地，这个不规则的正方形边长为4 cm，但是它的角上少了一个边长为2.5 cm的正方形。

对于立方体的翻倍(doubling)，我们不要求他们画出来，而是仅仅呈现一个边长为3 cm的立方体模型和几个边长更大的立方体，其中最大的边长为6 cm。要求儿童选出哪一个立方体是立方体模型的二倍。同时要求他们回答有多少的单位容量可以放进这

个他所选择的立方体里面:最初的立方体(或单位立方体)充满沙子或小的木制立方体,之后放进被试所选择的立方体里面,以帮助他们理解问题。

基于已经描述过的那些阶段,我们注意到儿童对这些问题会产生如下反应。在阶段1,所有实验都不能进行。在阶段2,从4岁或5岁到7岁或7岁半,出现了翻倍的迹象,但只是尺度上武断地增加。即便是对于2 cm或3 cm的长度的翻倍,也是这样的:被试不是重新利用直线,作为测量的单位,而是仅仅画了另外一条突出来长一点的直线,完全没有任何精确的对应关系。不用说,这些儿童在正方形的翻倍上也是不成功的。他们尽力画出一个比模型更大一点的正方形,但是他们甚至不能这样做,因为他们缺乏对序列的预期格式(参考第五章,以及最大可能正方形的实验)。当要求从四个给定的正方形中选择正确的一个时,他们总是做出随机选择(所以偶尔他们也会蒙对),也不能在一系列更大的面积和在这些正方形草地上吃草的牛的数量之间建立对应关系。对于其他的二维图形和立方体而言也是这样的。

在水平3A,儿童经常做两件事。或者他们将两个与给定模型相等的面积或体积并列而忽视形状的要求(两个正方形变成了一个矩形等),或者他们简单地将所有的维度加倍。换句话说,他们只在直线的翻倍中是成功的,尽管在那个时候还没有进行测量(将测量单位精确地加以应用),而仅仅是基于视觉转换形成直觉判断。当将一个正方形加倍的时候,他们或者产生了一个由两个正方形并置组成的长方形,或者画了一个是原始正方形4倍的正方形,因为他们只是简单地将四条边加倍了。三角形也以相同的方式被处理(或者他们画了两个互相接触的三角形,或者他们简单地将三条边加倍)。当翻倍圆形的时候,他们只是将它的直径加倍了。当要求从几个正方形模型中选出是刚开始呈现的正方形(或三角形等)两倍的那个时,这个水平的儿童拒绝接受正确的大小,即便当实验者要求他们将从第二个单位模型(放在较大图形的角上)中突出出来的元素重新组合,以证明剩余面积本身也是一个单位的大小时也是这样。当发现一个立方体有两倍的容量时,在这个水平的儿童坚持选择一个更大的,因为他们不相信一个实际上两倍容量的立方体能够装上两倍的沙子或小的木制立方体。

在水平3B,一维或多维的测量最终得以实现(参考第二章和第五至八章)。这是当前行为(翻倍面积或体积)发展中的一个有趣的转折点,但是在这一水平,问题仍没有运算性地解决,为解决问题而付出的努力也仍然是经验性的。当然,直线的翻倍是个例外。儿童能够测量一维,因而也能精确地利用单位长度。但是当翻倍正方形的时候,他做了和水平3A一样的初步尝试:他把边进行加倍或者将两个正方形并置形成一个矩形。但是,一旦他将边长都翻倍了,便意识到了最终的产品不是他想要的,之后继续尝试其他各种可能的方法,以建立边长的长度和面积之间的关系。即便这样,他也没有解决问题,因为他还没有进化出解决问题的必需的运算。相同的过程也适用于三角形和圆形,被试将直径进行加倍或者武断地增加它们的值。但是同时也意识到了努力的产品和自己想要的翻倍面积之间的差异。通过一些组合的方式,将立方体加倍以恰当的

方式得以解决,但是这一行为仍是经验性的而非推导的。

最后,在形式运算水平(阶段4),儿童尽力计算边的长度和面积之间的关系或者边长与体积之间的关系,不再仅仅满足于经验性的计算。

第二节　阶段2:甚至没有长度的翻倍

甚至到了阶段2,儿童还没有开始面积和体积的翻倍,因为他们甚至还不能进行长度的翻倍,这是由于缺乏运算性测量的能力,特别地,他们还不能进行单位叠加。

艾利(5;2)　"这是一条小路(直线,2 cm),你给我画一条是这条两倍的路。——(他画了一条3 cm的线。)——你是怎么做的?——*我像这样,画了一条更大的线。*——我可以把我的路放在你的路上两次吗?——*是的。*——好,现在,这里有一块够一头牛吃的草地。你给我画一块够两头牛吃的这样的草地。——*我们需要更大的正方形。*——是的,对,这里是一些选择。你会选哪一个呢?——(他拿起边长为4 cm的正方形,也就是说靠近边长为3 cm的正方形的那个。)——这个(4.25 cm)可以吗?——*是的。*——这个(5 cm)呢?——*是的。*——这个(6 cm)呢?——*不,太大了。*——好,你来画一个更好的,是那个(3 cm)的两倍。——(他画了一个边长比4 cm多一点的正方形。)——好,这次我们有一个圆形的地。给我看一下哪一个是它的两倍。——(偶然地,他选择了正确的圆形。这是让人惊讶的。因为不管是对什么的翻倍,包括直线,他都是简简单单地构建出一个看起来大一点的图形。)——现在我们有一个这样(三角形)的地。给我看一下哪一个是它的两倍。——(他选择了3倍面积的那个)——你可以画出一个吗?——(听说第一个三角形相当于一块蛋糕的时候,他画出了一个两个并置的三角形的轮廓,然后他在中间画了一条线将它一分为二)"

比亚(5;4)　画了一条2.4 cm的线作为2 cm长直线的二倍,画了一条3.6 cm长的直线作为3 cm长直线的二倍。当要求画一个二倍于3 cm边长的正方形的另外一个正方形时,它实际上却画出了一个更小的;在第二次尝试的时候,他的确画了一个大一点的。当要求选择一个模型时,他选择了将两头牛放在5 cm边长的正方形上,认为这一正方形是边长为3 cm的正方形的二倍,而在6 cm的正方形上他放了3头牛。在处理三角形和圆形的翻倍问题时他也没有成功。在画一个二倍于原始三角形的三角形时,它只是画了一个更长一点儿的。

里尔(6;6)　处于水平2B,而之前的两名被试处于水平2A。他的反应处于该水平和阶段3之间。在画一条直线是2 cm长直线的两倍时,他只是画了一个更长一点的(2.5 cm。)。"但是它只是有一点大罢了。——*像这样呢*(画了另外一条大约

5 cm 长的直线)?——看(对这条线和原来的直线进行测量)。他太长了。——好,*那么,像这样呢*(第三条线稍微短一点,大约 3.3 cm。)。"但是当进行正方形的翻倍时,里尔的回答几乎在水平 3A 上:他先画了一个等于原始正方形的正方形,然后画了另外一个并置的正方形,组成一个矩形。当要求从一套当中选一个时,他选了那个四倍大的正方形。三角形和圆形的翻倍也只是扩大了一点儿,但是实验者引入了前面有关分蛋糕的问题。里尔画了两块彼此相邻的蛋糕(尽管他的切分很差,他的分割线也没有经过中央)。

这三个例子足以说明在阶段 2 所获得的各种方面的反应。这些当中最有趣的是儿童不能完成直线的翻倍,却能够成功地精确地将直线进行二分(参考第七章),儿童在二分时的成功却没有翻倍时的成功与之相对应,这说明两类反应都是直觉的而非运算性的。从直觉的观点来讲,将直线一分为二以及从感觉上丈量两个部分是否相等,是一个相对简单的事情,这就是为什么它能够在阶段 2(水平 2A,参考第十二章第三节)的开始就能实现的原因。与此相反,将直线翻倍却包含着真正的运算,因为原始的直线必须被应用两次,这是测量关键的运算机制——将给定的长度作为测量单位进行叠加。将直线的一部分进行翻倍时所遭遇的困难并不是一个单一的发现,尽管它看起来可能让人感到惊讶。它在整个阶段 2 都会发生,就像早期实验[①]要求儿童在一段公路上标记下交通工具以一定速度所驶下的路程的时候所表现出的那样。在这个水平,他们的部分或者是武断的,或者是逐渐增长的(暗示着因为到达了"更远"的距离,它们的日常延迟也变长了)等。他们不知道怎么来叠加单位部分。在长度和距离问题上的不守恒,加上在线性测量中所遭遇的问题(以上参考第三章到第六章),一起解释了在执行单位叠加时的失败。

但是,问题仍然存在。为什么儿童不能将给定的模型直线进行翻倍,而仅仅是画得更长一点,却能够完美地将一块蛋糕进行翻倍(就像他们能够切分一个蛋糕或一块大蛋糕时那样)呢?原因就在于一块蛋糕是一个感知的整体,它的形状和它的维度是紧密联系的,而对于直线却不是这样。换句话说,将相同的形状复制两次在心理上并不等于叠加度量单位,尽管重复行为是单位叠加发展的起点。在该水平,儿童即便能够成功地切分蛋糕(参考第十二章)却没有任何测量的事实支持这种解释。

当要求阶段 2 的被试复制原始图形的形状而将它的面积增加一倍,而非仅仅画出两块放在一起的蛋糕或一块两倍大的蛋糕的时候,就像在直线翻倍问题中那样,他也没有成功。在所有的案例中,我们发现他画或者选了一个只是略大一点的图形。这与阶段 3 的时候儿童将正方形或三角形的每条边或者圆形的直径进行加倍是形成鲜明对比的,这可能暗示着这些年幼的被试对于翻倍面积的意思采取一种更为谨慎的态度,如果我

---

① 《儿童的运动和速度概念》,第十章。

们回想一下,有时候他们碰巧也会正确地解决了翻倍问题,就更是这样了。但是,这并不是说,直觉比相应的运算或接近运算的行为更精确,尽管在其他的领域确实有这样的例子。阶段2这些反应的背后是因为他们还完全不能区分线性部分的翻倍和面积的翻倍:因为直线只是增加了一点,当直线成为平面图形的一部分时,那么边长(或圆形的直径)长度的稍微增加都会不可避免地导致接近原始图形面积二倍的结果,尽管当被试将边长加长的时候他未必会想到面积。只要他发现了怎样将直线精确地翻倍,那么他也开始将正方形和三角形或者圆形的直径也进行翻倍。这种发展当水平2B直线的翻倍更为成功的时候就能够看到,而面积的翻倍也相应地接近亚阶段3A的水平。

第三节　亚阶段3A:正确地解决长度翻倍问题,通过简单地翻倍边长解决面积翻倍

在水平3A,儿童能够翻倍直线部分(尽管他们不能精确地测量它们),但是因为仍然不能区分面积的增加和边(或直径)的长度的增加,他们或者忽视必须产生相同形状的要求,或者简单地翻倍相应的边长。如果不能复制原始的形状,对于正方形的翻倍问题,他们会画一个2:1的矩形,而对于三角形的翻倍,他们会将原始三角形的底边加倍等。对于后者,他们的解决方案代表了一种介于单位叠加和产生二倍于原始图形的不太成熟的方法(就像在阶段2中翻倍蛋糕时那样)。

格拉斯(6;11)　在翻倍直线部分时没有困难(尽管这个过程并非从这一问题开始的,因为担心它会影响其他的回答)。当要求从几个选项中选择一个正方形时,他首先选择了5 cm边长的,之后是6 cm边长的正方形。然后实验者将9 cm^2的正方形放在36 cm^2的正方形的右下角,问他余下的L形的27 cm^2的面积是不是和小的正方形的面积一样大。他承认它更大。相同的程序在测量18 cm^2的正方形时也被重复,现在他承认L形的图形看起来和小正方形的面积一样大。"好,现在画一个是这个图形(9 cm^2)两倍大的正方形。——*那里*(画了一个四倍大的正方形)。——再试一下。——(他画了一个6 cm×3 cm的矩形,表明他理解了问题,却放弃了不改变原始形状就能解决问题的希望。)"当要求选择一个是模型大小两倍的三角形时,他选择了那个边长是原始图形两倍的三角形,当两个被叠在一起时,他再一次地意识到了错误。"这一个(正确的那个)呢?——*它太小了*。(他将它叠起来,检验未重合的部分)*是的,太小了*。——好,给我画一个正确的大小的。——(他画了两个底边对底边的三角形,形成一个菱形。)"当图形为圆形时,他立刻就选了那个为原始直径两倍的:"看(叠起来)。——*它太大了*。——那一个呢(正确的选项)?——*它太小了*。——好,那你画一个。——(他画了一个接近模型大小四倍

的圆形。)”

简恩(7;2) 在首次尝试的时候,画了一个4 cm的直线作为2 cm直线的二倍。“这是个什么图形?——它是正方形。——画一个两倍大的(正方形是9 cm^2)。——他画了一个36 cm^2的正方形,指着其中的一条边说)*我可以在那里画两个*。——(实验者给了他那个3 cm边长的正方形,把它放在画的图形的上面。)——*在这个上面可以放4个*。——然后呢?——*如果只有两个它会变长*(画了一个6 cm×3 cm的矩形)。——好,画一个是这个(3 cm×3 cm)两倍的正方形。——(他画了两个正方形)”

给儿童两个小的立方体(边长为3 cm),两个都充满了沙子,再给他一系列大一点的立方体,让他选一个能够盛下两倍这么多沙子的立方体。他选择了一个边长为6 cm的立方体,并且当发现沙子不能盛满它的时候感到惊讶。给他那个能盛下两倍容量的立方体,他很确定地说它不能盛下所有的沙子。在发现错了之后,他感到很诧异,认为实验者一定是把沙子压缩了。“*我不明白。一定是沙子没有碎,你可以压一下它。*”

洛尔(7;7) 眼睛看着画了一条两倍的直线:“你怎么做到的呢?——*我仔细地看着*。——这个(正方形的)呢?你能画一个两头牛可以吃的相同形状的么?——(他画了两个正方形,形成一个矩形)——但是我想要一个形状一样的。——(他眼看着将图形的边长增加了一倍)——你能把两个像我这样的正方形刚好放到你那里面吗?——*是的*。(他试了一下)*哦,不!四个*。——对。我们再试一次吧。这里有一个正方形,现在画一个两倍大的。——(再一次地,他画了一个两倍边长的,但是接下来他把它分成了两个矩形,来掩盖这种错误)*这样的话就是两个*。——看(把单位正方形放在角上)。——哦,不,四个!”——实验者接下来转换到容量问题,让洛尔选择一个能盛得下两个边长3 cm立方体沙子的箱子。他选择了边长6 cm的,并且试了一下,然后继续选了一个边长5 cm的立方体。“有多少这么多的沙子可以放在那个大的箱子(6 cm边长)里面?——*四个*。——试一下。——(他试了一下)*哦,不!八个!*”

里奥(8;9) 眼睛看着画了一个两倍长的直线。正方形,他把边长加倍,发现它是原来的四倍,所以他画了两个正方形,也就是说一个矩形。实验者给了他一个不规则的卡片(参见方法概述部分),他以武断的方式增加了它所有的维度:“但是我想要的仅仅是两倍大小的。——*你必须把他的所有的边都画得两倍那么大*。——看(把模型叠放在大的图形上面)。——不,它太大了。”最后,给他两个盛满沙子的立方体,要他选择一个能盛得下这些沙子的箱子。他选择了两倍边长的立方体,然后说它太大了。他很确定地认为那个正确的立方体太小了,并且当发现它确实盛下了所有沙子的时候感到惊讶:“假设我把两个立方体的沙子放在一个大的箱子里面,那个箱子会满吗?——*不,沙子将会到这里(接近顶端!)*。”

米克(9;4)　在将正方体翻倍的时候,将每条边都画成了两倍的长度。"那个小的正方形能进去两次吗? ——*不能*(并且当发现它能进去四次的时候,感到惊讶)。我不得不把这点拿走(一半,留下一个由两个单位正方形组成的矩形)。——但是它是什么形状呢? ——*一个矩形*。——你怎么把它变成正方形呢? ——*那是不可能的。即便大人也不能这么做*。——好,看看这些正方形,选择一个是那个(3cm)两倍大的。——(他指着6cm边长的正方形。)——(3cm边长的正方形占据了6cm边长的正方形的四分之一)对吗? ——*哦,不。又是四个*。——这一个呢(正确的那个,3cm边长的正方形放在它的角上)? 剩下的这一块能组成一个小的正方形吗? ——*不能*。——试一下(切下L形的图形)。——(他不知道怎么重构正方形。)——好,拿着那个图形(三角形)。你能画一个两倍这么大的图形吗? ——*这不可能*。——为什么? ——*如果你希望的话,你可以让它变得大一点*(将边长加倍)。——好,拿着这个图形(圆形)。画一个两倍这么大的图形。——*不对*(他画了一个略小于两倍原始圆形直径的圆形)。——从这里面选一个。——(他选了一个三倍于原始图形的。)——在这些立方体中哪一个可以把两个这么大的立方体放进去? ——(他选择了中间的立方体,然后说道)*它太大了。哦,不,它太小了,因为你不能把两个这么大的立方体放进去*。——好,哪一个是正确的呢? ——(他指了指边长6cm的立方体)"

这些水平3A的反应具有启发性。事实上,他们只在一个方面与阶段2A有所区别:被试现在可以将长度或直线的部分进行翻倍。他能仅凭眼睛观看来这么做,而不需要通过使用单位叠加来测量,所画的直线的长度却刚好是原始长度的二倍。但是,当处理面积和体积问题时,被试以阶段2相同的水平进行推理:他认为将更高集合的量进行翻倍就是将长度进行翻倍,所以他倾向于将正方形和三角形的边进行翻倍,将立方体的棱翻倍,将圆形的直径进行翻倍。因为现在他可以正确地对长度进行翻倍,当将直线的翻倍运用到作为图形部分的长度的加倍时,这对面积或体积的扩大比阶段2要大得多。

水平3A为儿童早期反应中的矛盾提供了清晰的说明。被试不能在面积或体积与决定它们大小的边长或棱长之间建立正确的关系。相反地,他把自己局限于一种直接的比例关系中,想象如果一个正方形的面积A^2对应边长A,那么一个两倍这么大的正方形$2A^2$将对应边长$2A$;类似地,因为一个容积是A^3的立方体棱长为A,那么一个容积为$2A^3$的立方体棱长将等于$2A$。这里面潜在的原则和在阶段2所发现的是相同的(在阶段1就发现了前兆)。这让我们联想到,当需要协调和当他们需要测量两个或三个维度来解决问题时,年幼儿童所遇到的困难。(但是之后我们会看到这种对应的原始类型是如何蔓延到面积和体积的翻倍问题中的,即便是逻辑协调的困难已经不再存在时。)就矩形的二维或三维图形而言,因为在所见的图形中儿童不能正确地定位元素,作为发展空间概念的共同中介,他们不可避免地只从线性的角度来思考。这并不是要否定他们存

在将面积视为被线条所界定的范围的直觉，也不是要否定他们存在将体积视为被平面所包围的空间的直觉。这种原始的拓扑直觉是发现维度的起点（参考第四章）。但是，正是因为面积或体积总是从它们的边界的角度来思考，线性因素才成为儿童头脑中最为主要的因素。所以，当要求他们通过建立精确的高级图形之间的关系（这种关系可能支配着线性成分，但是就整体的结构而言却是这样）来建构欧几里得结构时，他们试图仅就线性维度（如长度）来建构它。被这些长度所界定的图形之后被认为是直接依赖于这些长度的。当儿童达到了某种水平，在该水平长度的概念是被定性的运算（长度和距离守恒）所控制的，他们也就处于线条的运算测量之中了，但是对面积和体积的理解仍然几乎完全是依赖于对线性顺序的考虑的。确实是这样的。面积的减法、面积的守恒和将面积分割为基本的部分，都是在水平3A能够正确回答的问题，就像在第十一章和第十二章所显示的那样。但是，在所有的这些问题中，面积无一例外不是从边界线或部分的线条的角度考虑的，并未涉及线条长度和它们所决定的面积的量之间的关系。面积和容积的二倍（doubling）问题要求对这种关系的理解，在解决面积和容积翻倍问题时所出现的困难在于，这些儿童还不能建构这种关系，因为他们仍然是以线性的角度来思考问题的。

这些水平3A的反应说明了，为什么在计算面积和体积时所要求的数学乘法比加法和减法或逻辑乘法（参考第七、八、十一和十二章）更为困难。并非算数乘法本身比集合或关系的逻辑乘法更加困难，而是在它应用于面积或容积的几何图形时变得更加困难，因为它包含着边界线和面积或边界表面和体积之间精确关系的输出。这些关系不会进入儿童原始的拓扑直觉中。就坐标系统而言，它们是基于欧几里得空间的结构化，它们也包含着二维和三维的测量。无论是坐标轴还是测量，在水平3A都没有得到具体表达。甚至到了水平3B，当它们得到具体表达了，它们仍然是形成和采用关系间逻辑乘法的运算格式，尽管线性关系本身是通过度量的方式表达的。对于测量而言，数学乘法仍不必要。现在转向亚阶段3B的反应研究，我们将会看到，二维和三维坐标的建构和测量运算能否足以保证面积和体积运算的成功。

第四节　亚阶段3B：边界线长度和它们所包围的面积和体积之间关系的建立的实验

请读者回忆一下，在水平3B，无论是一维的（第五至第六章）还是二维或三维的（第七至第八章）长度测量均已经被掌握。同时，新建构的坐标轴（第十三章、第十四章）不仅支配着两个图形彼此之间的关系，而且支配着它们边界线以内元素之间的关系。这也就是为什么多维的测量现在是可能的了。这些发展足以打破之前儿童关于边界线长度和它们所包围的面积或容积之间直接比例的信念。这解释了为什么水平3B是从水

平2和水平3A的反应转向阶段4的反应之间的转折点。但是,尽管与早期翻倍面积和容积的努力相比,二维和三维的协调产生了关键性的进步,但是这种协调还不足以确保问题的正确解决。

罗格(8;6)　要求将一条2 cm的直线翻倍,他先测量了一下这条线,然后将它应用了两次。在告诉他要将一个边长为3 cm的正方形翻倍之后,他首先将它的边翻倍,但是立即说道:“*这样的话太大了。*”所以,他将边长为6 cm的正方形分成了两个6 cm×3 cm的矩形,并试着将其中一个分割,重新组成一个是原始正方形二倍的正方形,但是他没有成功。在将边长为3 cm的立方体翻倍的时候,他首先选择了一个边长为5 cm的立方体,然后将沙子倒进去。一个一个地,直到最终发现正确的那个立方体为止,尽管他仍然对它能够盛得下两个边长为3 cm的立方体的沙子感到惊讶。

卢克(9;3)　3 cm直线的翻倍:“*我测量的是3,然后我会延长到6。这样它就是两倍长了。*——好,这里有一个正方形。你来给我画一个两倍于它的正方形。——(他测量了一下它的边长)*它是3,我会延长到6。*(他画了一个边长为6 cm的正方形,然后把3 cm边长的那个正方形覆盖到上面。)——你认为周围的这些空间和这个(9 cm^2)一样大吗?——*是的……不,它有一点太多了。你可以把这个放在里面四次。*——所以呢?——*我会画一个小一点的。你可以减少1 cm,周围都是5 cm吧。*”之后,给他一个边长分别为4 cm、1.5 cm和2.5 cm的不规则图形。他量了一下这些边,但是他没有将它们翻倍,而是通过观察正方形获得了灵感,说道:“*对于这个边长为4的边,我会延长到6,因为那是4+2;对于这个1.5的边,我会延长到2.5,对于那个2.5的边,我会延长到3.5。*——我们可以说它刚好就是两倍吗?——*是的。你可以把一个地方都放到一条线上,然后剩下的将是另一条边的长度(垂直部分)。*——好。现在这里有两个充满沙子的箱子。我想把这些沙子全都倒进一个刚好能盛得下这些沙子的箱子里面。选一个箱子吧。——(他选了一个边长为5 cm的立方体,把沙子都倒进了里面)*它只占了一半。*——所以呢?——(他选了正确的那个箱子,并且证实了自己的选择。)”

克劳(9;8)　在进行的过程中,也从自己经验中有所获益。在将3 cm边长的正方形翻倍时,他首先选择了一个边长为6 cm的正方形。小正方形放了上去:“*它可以放进去四次。*”他选择了一个更小一点的,但是怀疑它是否足够大。相反的是,他发现这个正方形比两倍于边长为3 cm的正方形的面积还要大,因为当将原始正方形叠放到这个正方形里面时,两侧没有被覆盖到的L形的部分可以被重新组合成一个明显大于原始正方形面积的正方形。他的第三次选择是正确的:“现在给我画一个两倍于这个正方形的正方形。——(他画了一个近于正确大小的正方形,但是没有测量它。)——现在是圆形。从这些当中选一个两倍于这个圆形的圆形。——

(他选的一个有点大了,但是他画的一个有点小了。他把原始圆形放到了自己画的上面。)——你怎么做的?——*我想的是围绕着它(周长)的圆环,把它弄得大了一点*。——如果你把这个(直径)做成二倍长,将会发生什么呢?——*那样将会太大了*。"

查派(9;8) 测量了一下正方形,将它的边翻倍:"*不,那是错的。我可以把四个正方形放进去*。"他画了一个6 cm×3 cm的矩形。"但是你想要保持正方形的形状。——*好,像这样呢*(画了一个大一点的正方形,但是没有测量它)?——你可以用这些纸条来检查一下(将模型放进画的正方形里面,将纸条递给他)。——(他将剩余的部分进行拆分,将等量的面积叠放到正方形上)*那样太多了*。(对于立方体,由于从之前的经验中受益,他直接选择了正确的一个,但是看着它说道)*这一个太小了,但是另外一个太大了*。"他测量了一下,通过试误找到了答案。

赛姆(9;11) 测量了一下直线,将它进行了翻倍。为了将一个边长为3 cm的正方形翻倍,他首先画了一个6 cm×3 cm的矩形。"但是你忘记了保持它的形状。——(它画了另外一个矩形,但是这次大约为5.5 cm×3.5 cm)*不,它还是有点大*。(他再次纠正了它,并且通过增加矩形的宽度,减少矩形的长度,他逐渐达到了为3 cm边长正方形面积二倍的正方形。立方体:连续接近。指着一个立方体多余的体积,他说道:"*你可以把另外一个立方体的沙子倒在那里*。"……

布拉斯(10;3) 也画一个矩形来将正方形翻倍,接着他将长减小,将宽增大,直到达到一个正确大小的正方形的形状。对于立方体的翻倍,它几乎是立刻就选择了一个正确的箱子。

这些解决方法明显地比水平3A中所提供的那些更为先进。这些儿童开始的时候像其他的孩子一样将面积或体积的边长翻倍,但是立刻意识到了将原始图形的边翻倍之后,正方形的面积比两倍原始正方形的面积要大。这种增加的意识表现在两个方面。首先,错误很快被发现,或者在画的过程中,或者在画完之后,被试立刻发现了两个正方形的面积和它们的边之间的关系并非简单的比例关系,对于体积和它们的棱长也是。第二,可能也是更为重要的,随着问题一个接一个地提出,儿童现在从他们的经验中受益,所以他之后的建构不断表现出精确的直觉预期的痕迹。在该水平,儿童也试图通过改变部分的布置来重新建构或拆分整体(面积或体积),这和第十一章中有关面积守恒和测量的发现是一致的。我们看到他将大正方形的L形的部分进行了重新组合形成一个小的正方形,或者他在思想上将一个不规则的图形转换成一个拉伸的矩形,等等。赛姆和布拉斯都将矩形转换成了一个正方形,这样,开始的时候是两个边靠边的正方形,通过连续的接近,他们构建了一个两倍于原始正方形的正方形。在立方体问题中,这些被试研究了空的部分。换句话说,在选择了两倍于原始立方体的那个之后,他们注意到了它在体积上和沙子的差异有多大,等等。

为了发现边长和面积或体积之间的正确关系，似乎儿童现在已经有了他所需要的一切，至少对于像正方形这样的简单图形是这样的。他可以自己发现如果一个正方形的边是另一个正方形的二倍，那么它的面积比原始正方形的面积的二倍要大得多。他也因此意识到了面积只能是边长的倍数。换句话说，他可以发现边长和面积的关系是一种数学乘法的关系，而非简单的比例关系。然而，他还不能这么做。并且，尽管他已经具备了数量化关系和应用逻辑乘法构建坐标系统的格式，但是从逻辑乘法向数学乘法的过渡却还没有轻易地出现。

如果我们拿一个像实验中用到的边长为3 cm的正方形，每间隔1 cm水平或竖直地画一系列的平行线，我们就会得到9个面积为1 cm^2的正方形矩阵(图20)。这个矩阵可以是逻辑乘法的格式，它是一个双重输入的列表(double-entry　table)，输入是非对称的关系(位置顺序等)或集合(部分)。但是，它也可以是支配正方形的边长和面积之间关系的数学乘法的格式：3 cm×3 cm=9 cm^2。上面我们所列举的被试都拥有执行矩阵中所包含的逻辑乘法的必需的运算机制。因此，在处理它的关系时，他们能够协调9个单元格彼此之间的关系，因为他们拥有坐标系统(第十三章和第十四章)，因此能够根据两个坐标轴(长和宽)来定位元素。他们甚至能以这些有顺序的点之间的间距为依据，量化距离和长度的关系。从分割的角度来考虑矩阵的话，他们也能很好地理解正方形可以分为几个部分，在量化这些部分意识到它们的相等性时也是没有困难的。总而言之，他们能够构建图20当中的矩阵，进行关系和部分的逻辑乘法，这些都是通过定量的形式来表达的。

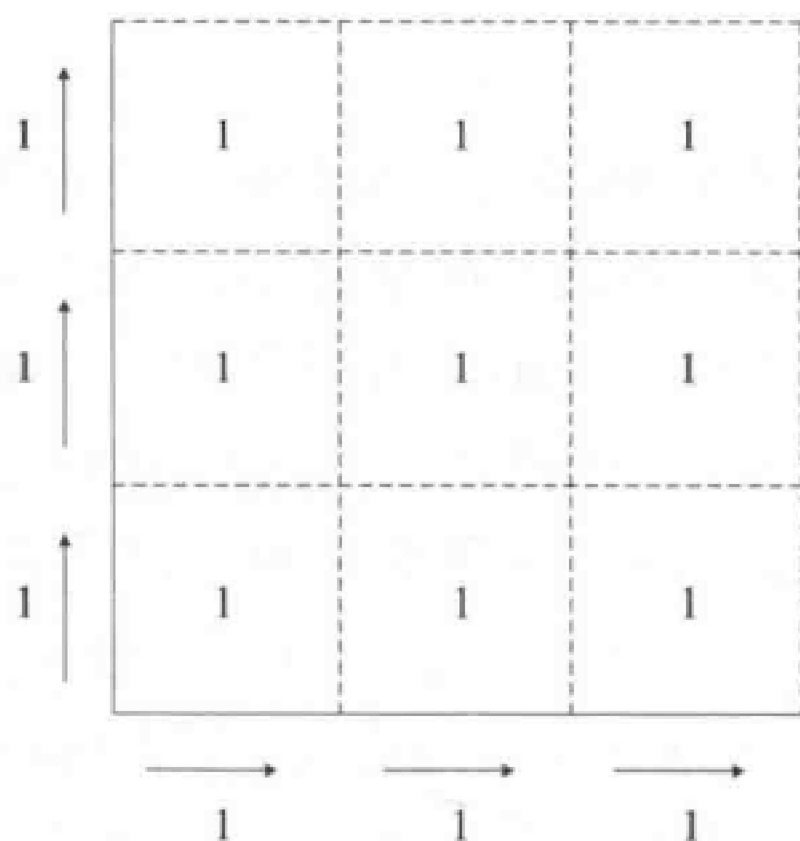


图 20

如果仅仅是处理已经提前给出定量形式的元素，从逻辑乘法转移到数学乘法，那么将不会有什么困难，因为这些儿童知道3×3=9，数学乘法不过是集合和关系的单一逻辑乘法运算的融合，也就是说它可以简化为顺序单位之间联系或沟通的系统。逻辑乘法的原则一旦被掌握，数学乘法的原则也就立刻被理解了，就像其他地方已经证明过的那

样。[①]但是要发现正方形的边和面积之间的关系并不简单是数学乘法的问题，或它应用于空间的问题。它包含着面积作为线性元素功能的计算，并且就像我们在本章当中所呈现的那样，儿童发现困难的是从一个向另一个的转移(从线性维度向容积测量)。尽管儿童已经掌握了数学乘法和逻辑或亚逻辑的乘法(包括坐标空间关系)，但是为什么水平3B的儿童仍不能执行这种转移，这一问题仍然存在。

因为阶段4是形式运算水平，看起来好像从线性维度来计算面积或体积包含着比数学乘法更为"形式"的机制。换言之，$3\ cm\times 3\ cm=9\ cm^2$可能包含着比$3\times 3=9$更高集合的运算。在有关连续整体分割的研究中(第五章)，我们发现在阶段3和阶段4之间，儿童对连续空间的表征存在着基本的转换，不论是一维的还是其他维度的。到了水平3B，包括水平3B，连续的空间被认为由有限数量的元素所组成，但是在阶段4分割开始朝着无限和连续的方向发展。

从不连续整体的数学乘法到它应用到面积或体积的计算，这些阶段和连续维度的分割紧密相关。给定两个长度为3 cm的直线，两者互相垂直但是却起始于同一点，$9\ cm^2$面积的计算等于将无限大的线所组成的面积无穷小地减少到$9\ cm^2$，就像在阶段4中的一条线变成无限的互相邻近的点的序列一样。因此，儿童在早期水平试图将面积和体积和线性的量相关联的时候才会出现系统性的困难。儿童将面积视为线所界定的空间，这也就是他为什么不能理解线如何产生面积的原因。我们知道正方形的面积是通过边的长度得到的，但是只有当我们能理解面积本身可简化为线的时候，这样的陈述才是明了的，因为此时两维的连续体等于一维的非间断矩阵。

现在我们理解了为什么通过将边长相乘得到面积与矩阵或图18中的坐标系统的构建是完全不同的事情了。两种运算机制之间的差异也就是由有限元素组成的矩阵和被认为由无限元素组成的连续结构之间的差异。

通过这种方式来看的话，儿童在水平3B试图解决现在问题的关键性的转折点和相同水平关于空间表征的其他问题的转折点是一致的。

第五节　阶段4：理解了面积或体积和边长的乘法关系

早期水平的儿童在解决翻倍面积和体积的问题时产生了这些有趣的反应，因为他们不能理解边长和二维或三维连续体之间的关系，但是在11或12岁开始的形式运算阶段所出现的反应，却也有他们自己的一些问题。这是由于真正的解决包含了平方根的使用，因此需要具体的学术指导。另一方面，与儿童是否开始发现边或线与这些线所界定的多维连续体之间的关系相比，我们不太关注解决方法是否正确。如果儿童能够理

① 皮亚杰和斯泽明斯卡，《儿童的数概念》，第九章和第十章；以及皮亚杰，《集合，关系和数量》，第十一章。

解面积或体积的运算包含着数学乘法,他就会不需指导构建出这种关系。但是,在儿童能理解这种计算的同时,并且经常是在这之前,儿童在学校被教给了解决这些问题的方法。因此,我们必须放弃追踪进化至最终结论的目的,取而代之的是,将会检验11—12岁儿童的反应,他们在学校已经开始了几何学的教育。

下面是一些在梯集合上复杂性不断增加的例子。

多克(11;3)　处于水平3B和水平4之间。和之前水平的儿童一样,他也是将线性元素重新组合,但是他像阶段4的儿童一样,引入了计算。他开始的时候,将边长3 cm正方形的边相乘,发现结果是原来正方形面积的四倍。但是之后他决定将边长变为4.5 cm,因为那是3和6的中点:“*还是有点多。我能计算出来周长是18 cm。*”

斯克内(11;7)　画了一个边长是原来正方形边长二倍的正方形(为原来3 cm边长的正方形,画了一个边长为6 cm的正方形),但是中途他停下了,说道:“*不,那样的话将会得到一个面积为36 cm²的正方形。那样是错的。*(他认真地考虑这一问题,最后说道)*我必须让边长变成4.5 cm。*——你怎么做出来的呢?——*这个正方形是9 cm²,所以它的二倍是18 cm²。然后我把它除以4,那样就会得到4.5 cm。*(他想了一会儿,然后补充道)*不,那样太多了。我需要将它变成4 cm*(一种经验性的猜测)。”

奇思(12;5)　“我想让你为我画一个正方形,它要是这个正方形的两倍。你会怎么做呢?——*我可以通过乘法计算出它的面积,然后将它乘以2,然后将结果除以边数得到面积。这个的面积是9 cm²,它的二倍是18 cm²。因为是4条边,我将它再除以4,得到4.5 cm,但是那样仍然不对。*——为什么不对呢?——*那样不会得到4条边。不,4.5×4.5太多了。你不可能做出来,你需要知道边有多长。*——如果你将3 cm乘以2会怎么样呢?——*那样是错的。你将会得到原来面积的4倍。*(!)——好,看一下这个盛满沙子的小立方体。你怎么样才能得到一个能盛下两倍这么多沙子的立方体呢?——*我需要称一下它有多重,然后将它相乘。或者我可以求出6个小的边长的面积,将它乘以2,然后再除以6,求出新的边长的面积:9 cm²×6=54 cm²,它的两倍是108 cm²。我将它除以6之后是18 cm²。我将18 cm²除以……除以……4,不,那也不行。*——如果你将每条棱都乘以2会怎样呢?——*不,那样将会得到原来立方体的四倍。*——从这些立方体中选择一个。——*好。我知道不会是大的那个*(棱长为6 cm),*沙子将会倒进去8次。*——那个呢(54 cm³)?——*是的,我想你可以把两倍的沙子倒进那里面。*”

瑞(12;10)　为了将一个4 cm边长的正方形翻倍,画了一个边长为6 cm的正方形:“*我把每条边都加长2 cm,因为那是4的一半。我知道怎么计算出它的面积:4 cm×4 cm=16 cm²。两倍的面积将会是32 cm²。我的是6 cm×6 cm=36 cm²。所以*

是错的。36−32=4 cm²。你需要在它的角上拿下一个4 cm²的小正方形。——但是它需要保持为正方形。——我们来试一下5.5 cm。那样是30.25 cm²。所以这样不够。试一下5.6 cm。”最后，他产生了一个边长约5.7 cm的正方形。

为了将一个边长为3 cm的立方体翻倍，它算出了3 cm×3 cm×3 cm=27 cm³。“*你会发现27 cm³的二倍是54 cm³。*”他试了一下4 cm×4 cm×4 cm=64 cm³，然后他放弃了。

阿福（11；11） “这里有一个正方形，你来画一个面积是它二倍的正方形。——*如果我将边长乘以2，我将会得到一个四倍那么大的正方形。*——是的，但是我想要一个二倍大的。——*我计算出它的面积，3×3=9；我将它乘以2，2×9=18；然后我找到18的平方根。4×4=16，没有18的平方根。如果我把它画成16，那会太小，5×5=25的话，那样太大。它的边长和4不会相差太大。*——这里有一个立方体，画一个能盛得下两倍这么多沙子的立方体。——*我计算出它的容积：3 cm×3 cm×3 cm=27 cm³。我可以将它乘以6，因为它有6条边*（他想了一下）。*不，那样是错的。然后我乘以2，27 cm³×2=54 cm³。然后我除以3，来发现它的高或宽或深：54/3=18。不，那好像不对：18 cm²好像太大了。*”

这些解决方法之中没有一个是完美的，并且都会受到学校教育的影响。然而，从我们当前的观点来看，他们是有趣的。第一个被试，多克，仍然以线性的角度思考，关注于图形的周长，但是与早期的被试不同的是，他使用了计算，而不是试误。在他之后的斯克内，已经在学校学习到了面积是线性维度的乘积。更为重要的是，就在他将边长变为二倍时，发现那样做面积会变得太大（6 cm×6 cm=36 cm²），表现出了对于线性测量和面积测量之间关系的部分理解。但是那种理解仍是不完全的，因为在将面积乘以2之后（2×9 cm²=18 cm²），他简单地将他的答案除以4得到边的长度，而明显没有意识到正方形面积并非边的四倍，而是边长本身相乘。奇思犯了同样的错误，但是他立刻说道：“那仍然是不对的。”与这些儿童不同，瑞已经完全把握了正方形边长和它的面积之间的关系，只是因为他不知道怎么求平方根，所以他被迫通过一条边、一条边的平方来摸索答案；结果，他的答案已经很接近了。最后，阿福提到了“平方根”，但事实上，他的方法跟之前的人是没有差别的。

对于立方体而言，在隶属于面积的关系理解上和支配着体积的关系的理解上还存在着时间上的滞后。因此，奇思在解决正方形的翻倍中决定将正方形的面积除以4，结果发现它的边长仍然不对，但是在开始算出立方体的体积，然后将其乘以2再除以6，以发现每个面的面积时，却表现得很高兴。阿福将获得的体积除以3，因为他受到了有三个维度的影响。只有瑞使用了和正方形相同的方法来求立方体的容积。

这些方法中的每一个的确都不如正确的解决方法。然而它们却说明了阶段4的儿童是怎么理解边长和面积或体积之间的关系与相同幂数的维度之间的关系的不同的。这种意识与形式运算的开始和对连续性的最终理解是吻合的。

补充:线性测量与面积单位所组成的面积测量之间的关系

为了研究长度测量和由面积单位所组成的面积测量之间的差异,我们向 Mlle Princigalli 建议了下面的技术(我们同时考虑了面积测量的困难和它的心理机制)。给被试一个矩形和一些能够恰好覆盖住它的小的正方形。同时给他一些火柴棒以测量矩形和单位正方形的边长。他被要求只通过使用火柴来预测一下,需要多少个正方形来覆盖矩形。这个实验的全部的解释将会在意大利由 Mlle Princigall 出版,我们只需要说明,她的结果证实了从线性测量到乘方测量转化的困难,正如贯穿本章所强调的那样。在亚阶段3A,儿童或者在矩形上面通过间隔开的火柴矩阵来重新排列正方形的位置,或者通过将火柴紧密地挤在一起来覆盖住整个面积。换句话说,他们不是将火柴用作测量单位,他们还不能理解面积和边长之间的关系。如果不允许他们将火柴放在矩形里面,他们将感到完全地束手无策。在水平3B,他们达到了二维的坐标,但是仍然使用逻辑乘法而不是数学乘法。他们最喜欢的方法是将矩形划分成一系列的行,这种划分可以通过像水平3A那样建构小的矩阵来实现,或者将正方形放在矩形的外围,或以火柴代表正方形的边,然后计数行的数量和每一行正方形的个数,这是数学加法的方式,而不包含数学乘法。

只有当儿童从水平3B向水平4转移的时候,才出现了一些乘法使用的迹象,这种迹象是加法方法的简化。即便是到了这个时候,对于面积和边长之间的关系也只是有了些微的理解(出于对制作好的面积单位或线性单位的装备的考虑,这是一个比较安全的结论)。因此,我们可以比较保险地说,这种关系只有到了阶段4本身的时候才能恰当地被掌握。

李占星译,朱莉琪审校

第十四章　体积的守恒和测量[1]

本书第二部分探讨了距离和长度的守恒及测量，在第三部分，我们则探讨了二维或三维空间的线性测量。第十一章着重探讨了面积的守恒和测量。在第十三章中，这一问题得到了进一步的探讨。在第十三章，我们还研究了儿童如何叠加(double)面积和体积。现在我们将讨论体积的守恒和测量。

几何学认为面积和体积是两种密切联系的概念，但是从心理学的角度来看，体积本身就带来了很大的问题，因此在研究这一概念之前，我们有必要先进行多项讨论，以做好准备。从某种程度上来说，长度和面积都很抽象(抽象自某一物体或某个主体本身的行动)。但是体积的概念和物体的物理结构关系更为密切，因为任何宏观物体都具有三维属性。同时，我们对物体的物理属性的守恒研究[2]表明，心理学家需要区分出两种属性的不变性，而几何学家只需要识别出一种。这两种属性彼此分离，并且发展自不同的形式阶段：物体质量的守恒早在3A阶段就出现了，而有关体积守恒的物理概念直到第4阶段，也就是形式运算阶段，才出现。比如，如果我们在儿童面前把一个圆球状的橡皮泥团揉成香肠状，所有处于3A阶段的儿童都认为它还是那么“大”。但是研究者发现，对于不同成熟水平的儿童，这一说法代表着不同的意思。处于第3阶段，包括3B阶段的儿童这样说仅仅是指橡皮泥的量保持不变，并且会接受这一橡皮泥已经膨胀了或者被压缩了的说法，尽管它还是那块橡皮泥。因此，如果你把橡皮泥拉长了没入水中看它会不会占去同样多的水，这个孩子会认为它比还是圆球时“占去的空间更多(或更少)”。但处于第4阶段的儿童所说的“一样大”既指质量保持不变，也是指体积的不变。也就是说，他能够意识到橡皮泥所占的体积不变，因为它并没有膨胀也没有收缩。显然，这一区分为我们当前的几何学研究提出了一个非常微妙的问题。

我们必须允许这一情况的发生，即我们在询问儿童关于体积守恒的问题时，必须要借助于里面装着沙子的砖块或立方体，这一方法通常适用于处在具体运算阶段(第3阶段)的儿童。应该说，直到物理体积达到守恒时，也就是说，直到物体真正被视为一个无法膨胀或收缩的固体时，体积的概念才能够达到几何意义上的守恒。在某种程度上，这是对的，但仅在这一程度上，因为我们所寻求的体积的几何概念应该和物理概念一样，是建立在物体本身和其周围所有其他物体之间的关系上的。那种概念预先假定可以对

---

① 与M. H. Aebli和Mlle F. Pitsou共同完成。

② Piaget & Inhelder, *Le développement des quantités chez l' enfant.*

空间进行连续性的建构，并且可以通过乘法矩阵(multiplicative matrice)进行量化。在上一章中，我们已经介绍过这些预设对于面积和体积计算的重要性。这种建构开始于第4阶段，但也有可能存在简单形式的体积守恒，这种体积的计算不需要仔细地考虑体积和所关联的表面积的测量关系。因为这一概念仅仅是定性的，它很可能在3A阶段就和长度(第三、四章)、面积(第十一章)守恒一起出现了。这也符合第十三章的观察结果，即儿童在3A阶段就获得了一定的面积(和体积)守恒，它们来源于儿童对面积(和体积)的原始概念，但只限于线条(或面孔)。这种理解在使用数学方程计算面积和体积的能力形成之前就已经出现了。它包括理解各种不同力量单元的关系，同时也是形成其他守恒能力的基础。

我们将在本章，也就是第四部分的最后一章，解答这些问题，也将把这些和我们总体的研究联系起来。

第一节　方法和结果概要

儿童会看到一个实心木块(见图21)，4 cm高，底座是3 cm×3 cm的正方形，这样体积是36 cm³。主试会跟儿童讲，这个木块是建在小岛上的一座老房子，小岛的面积是3 cm×3 cm，并且被贴在一块象征着湖泊或海洋的折纸上。这座房子看起来岌岌可危，因此房子里的居民们决定另造一座房子来代替它。虽然新房子建在另一座小岛上，但它的空间必须和老房子一样大。这个孩子会看到用纸板代表的其他岛屿，但是它们的面积或形状或者两者都和老房子不同，分别是2 cm×2 cm、2 cm×3 cm、1 cm×2 cm、1 cm×1 cm和3 cm×4 cm。这样，孩子在重现原始木块的体积时，还要根据所给的底面积调整“房屋”的形状。另一个不同点在于，儿童必须使用1 cm³的小木块来搭建和原来容量一样的新房子，而老房子则是一整个实心木块。不使用和新房子同样的可累加元素来构建老房子模型会带来很多好处，但这只适用于年龄较大的儿童，不然他们会直接通过数数来解决问题，而不会像这样思考体积。

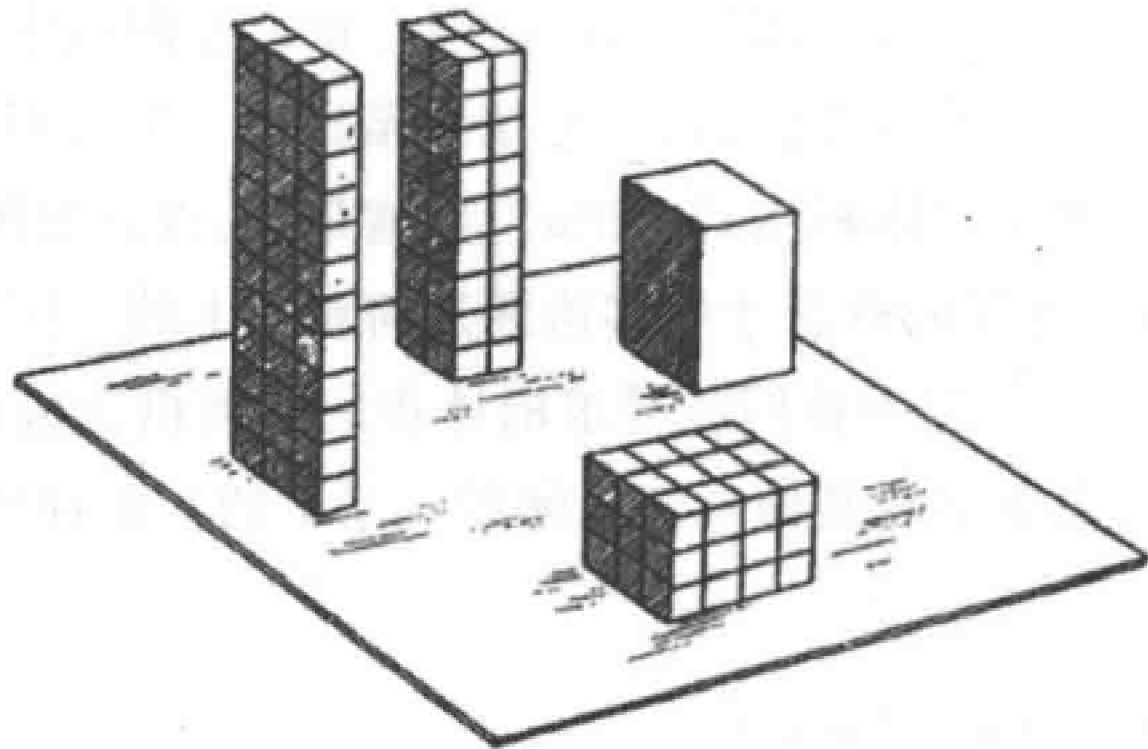


图21

年幼的儿童更容易被结构上的不同所迷惑，因为当小元素的数量远远超过单独一个木块时，他们更容易认为“有更多的木块、空间、木头”等。因此，对于低年龄儿童，我们所用的原始房屋也是用小方块堆积起来的，因为几乎不用担心数量上的一致性，毕竟他们的数数能力还比较弱。我们还要提一句，在其他条件保持不变的情况下，用体积大于1cm³的木块往往更有效。

我们通常用“房间一样大(as much room)”这样的词语来表述空间的同等性。如果儿童无法理解这种表述，我们会告诉他每个居民都要有一个他自己的房间，就像在老房子里他有自己的房间一样。年龄很小的孩子会努力让新房子的形状和老房子保持一致，所以我们必须向他们强调房子不能建在海上，必须建在小岛上。通常，经过提示校正的建筑全部都会落在小岛上，因为只有这样它们才能用于最后的讨论。

这些是我们的主要测验技术，除此之外，还用了一些其他辅助技术。其中最有意思的一种就是让孩子简单地从一堆或完全相同、或仅有大小不同、或形状不同(比如立方体或平行六面体)的方块中选出一个来替代原来的房子。孩子也许被要求隔一段距离去重建那所房子，也许会被要求挨着原来的房子重建。在使用最后一种方法时，我们经常发现这一意义重大的行为：被试围着原模型的五个或者六个面砌墙。事实上，只要孩子在那些面的包围下圈出了那么多的空间，他就不是在重建这一物体本身，他并没有把它看作一个实心物体，而只是重建了它的体积。这一反应表明体积的第一直觉是它的拓扑结构，并揭示了这一欧几里得几何学概念结构的演化形式，以及为何精确计算直到很晚才会出现。

另一种辅助方法则是给儿童展示不同的立方体和平行六面体(这样彼此不同的木块一共12个)，每次展示2个：“这两个一样大吗？它们里面的木头一样多吗？”这些物体都是上过漆的实心木头，而且主试必须谨慎地选择指导语，以免引导儿童在任何一个维度的比较。提供立方小块确实有助于儿童进行三维空间的对比，这样他们可以直接用这些木块来测量，或者来组建物体。另外一种方法就是给被试一个大木块，让他从一大堆不同形状的备选方块中找出体积相同的一个。不管采用什么提问方式，主试试图确定的是儿童进行对比的方法，因为他所采取的方法和给出的答案一样具有启发性。

最后，不管之前的问题如何，这一问询过程总是以体积守恒的问题作为终结。为了达到这一重点，主试会让儿童从36 cm³(或更大，视具体情况而定)的原始模型开始，在借助或不借助成人帮助的情况下，使用小立方体重建出这一模型。然后，成人会通过改变建筑的顶部或基层形状，用这同一批小木块搭建出各种不同的建筑。孩子观看他这样做，并被问道：(a)新“房子”和老建筑的空间是否一样大，或者比它多，还是更少；(b)人们用组成这所新房子的这同一批木块建成原来的房子，而且大小也和原来一样吗？不用说，体积守恒的问题很难确定，这在本章开篇时就已经提到。研究者必须确定被试仅仅是依靠所用木块的实际数量的守恒，还是在考虑它的整体体积的守恒。一些被试能够接受第一种守恒，但却拒绝第二种守恒，说明这两种概念是分离的。然而，研究者

必须使用多种方法来确定每一种情况下的守恒发展情况。

我们认为很值得让同一个被试再接受另一项体积守恒测验,来检验我们的结果是否准确,这就需要让被试观看一个完全没入水中的实心物体[①],并把之前的实验程序修改成现在的实验情境。主试需要向儿童展示一系列长度为1cm的金属立方体,然后把它们放入水底。主试用36个金属块在水底摆出一个长方体(3×3×4),让被试标出水位上升的情况。然后被试会被问道:如果这些金属块的排列顺序出现变化(主试将金属块的摆放形式变成2×1×18或者2×2×9等),水位是否会发生变化。这种方式很容易考察儿童对三种不同体积概念的理解情况:内在体积,或者36个金属块的守恒(这很容易通过前面几章介绍的方法进行测量);以"被占用"的空间形式存在的体积,也就是36个金属块在水中所占用的"空间"量;以及最后一种,互补体积,也就是水的容积。最后两种体积都是以水位以及被试所意识到的水量的守恒来衡量的,也就是他(她)是否能够意识到水位应该保持不变这一事实。除了和水位有关的问题,儿童也会被问到金属块"所占用的水的体积是否保持不变",或者"留给水的空间是否还和之前一样多"等问题。

我们观察发现处于不同发展阶段的儿童会存在以下几种反应。由于我们的实验很难用于4—5岁年龄的儿童,所以对第1阶段的反应分析几乎没有意义。要发现儿童首次注意到体积上的重大变化的年龄阶段可能需要设计其他实验方法,而且如果每次只比较三个维度中的某一维度时,结果会更为清晰。然而,我们目前并不担心这一问题,因为这个问题更多和儿童的知觉特点有关,而和表征方式关系不大。

第2阶段往往开始于4岁或6岁,并持续到5岁和7岁。首先儿童会进入2A亚阶段,这时在体积(底面积)上的任何变形、重组和对比都是基于一维的,通常是最大的那一维。这种变形会不可避免地引起物体体积的变化。然而,处于这一发展阶段的儿童即使充分意识到这种体积上的差异,依然不愿意把新房子建高一点来弥补底面积的减少。即使较大年龄的儿童有时也很难把体积和高度区分开来;但是如果主试继续说明自己想要的只是一个和原来空间一样大的房子,但是它们形状上可以不同,大一点的孩子能很快明白主试的意思。但年龄小的孩子却不会向这个问题屈服:无论自己在建的房子底面积是多大,当高度和原来的模型持平时,他们都会停下来。我们查看了儿童重建某一体积的物体的过程,发现处于这一水平的他们喜欢遵循物体的表面。特别是,我们经常看到这些孩子在重建某一体积时,会贴着物体可见的表面进行搭建。同样,在对各个体积进行对比时,他们不会综合各个测量结果,而只是进行某一维度比较。最后,这一阶段的儿童尚未形成体积的守恒。在2B亚阶段,儿童给出的反应介于刚刚所描述的和第三阶段的反应之间。其最大的进步发生在他们在不同的底面积上搭建等体积的建筑时。如有必要,儿童现在所建造的新建筑会高于原先的模型(这意味着他们在处理维度之间的关系时开始使用逻辑乘法了)。

---

① *Piaget & Inhelder, Le développement des quantités chez l' enfant.*

阶段3开始于6岁半或者7岁半，并持续到11岁或12岁。位于3A亚阶段的儿童能够考虑三维关系（虽然刚开始时，他们只能考虑两个维度，渐渐才能同时考虑第三个维度），但只能依靠逻辑乘法，也就是说，他们无法根据单位进行精确计算或比较。当面临房子的形状变化（比如在使用主要测量方法时）所带来的变形问题时，这一阶段的儿童能够区分高度、形状和体积这三个概念。因此，当儿童需要把房子建在一个很小的岛上时，他会搭得更高，但依然无法决定应该搭到多高，因为无法通过数量的分解和重组计算出所需要的量。当要求使用不同的砖块重现原始模型时，儿童能够完美地重现长度和宽度，但只能靠经验来判断深度。儿童在对比两个物体的体积时，可以通过性质同等的测量属性（指不需要单位迭代的属性传递）来进行，也可以通过不同排列所引起的心理变化（是指基于逻辑而非数量乘法形成的补偿量）来进行。现在我们再来看体积的守恒会发现，这种守恒只存在于“内在体积”上，也就是说儿童意识到在表面所包围下的物质量保持不变（在这里也就是指建筑中所包含的砖块数维持不变）。但是这一守恒并不包含“占用体积”这一内涵，它是指某个被包在其他物体内的物体一共占用了总体多少空间。因此，如果我们问儿童36个金属块排成一排在水中占用的体积和它们的其他组合所占用的体积是否相同时，答案会是否定的。

第3B亚阶段往往开始于8—9岁，虽然我们偶尔会发现更早进入这一阶段的孩子。除了具有以上所提到的发展成果，这些孩子也开始以立方体为单位进行正确的度量，但依然无法进行数量乘法，也就是说，无法建立长度或面积和体积之间的关系。我们通常发现孩子会在对各种关系的逻辑乘法（表现为所用的物体量，因为儿童现在会度量了）和在使用数量乘法之间选择折中方案，表现为儿童把体积视为面积叠加的结果。结果是这些儿童只有在要求通过在某一个维度进行简单的叠加时能够重现所需要的体积，在其他实验情境下，他们都无法通过这一任务。

最后，第4阶段有两个特征，它们是具有决定性又彼此关联的。首先，这一阶段的儿童会发现面积和体积之间的数量关系；也就是说，如果两个物体的对应要素（或者三个维度的长度）保持一致，它们的体积就一样大。第二就是获得了体积守恒，认为某一物体在其他物体中所“占用的空间”，而不是其“内在体积”（由表面积所决定的体积），保持不变。

第二节　亚阶段2A：体积不守恒以及单维比较

很多几何学家认为最初对空间概念的指导应该从对体积的认识开始，因为这一概念没那么抽象，毕竟我们在日常生活中所经历的物体实际上都是三维的，而非二维。他们的观点得到了一定的验证，但仅仅来自于早期对空间的拓扑直觉性认识（虽然我们必

须谨记:体积总是受限于面积,而面积又总是受限于线,因此即使在最早期,线条也远远重要于其他维度,因为它们才是被直接感觉到的)。然而在欧几里得直觉的水平上,这一观点却相当不合理。在阶段1和阶段2对空间和长度的表征也许还不充分,但却比体积的表征更为简单,也许是因为人们无法同时看到三维物体的所有部分。因此,即使处于2A阶段,儿童也无法在容量不变的情况下转换物体的形状,也无法超出一维以外来对比体积。下面列举了几个这种直觉反应模式的具体案例。

福禄(5;0)　这个孩子要在2×3的岛上重建一个3×3×4的矩阵。他造的建筑是2×3×4,也就是说,它和原来的模型高度相等[①]。"这些够了吗?——*是的,够了*。——这两栋房子哪栋更大?——*那个*(模型)。——既然这样,你要怎么办呢?——(他在自己的建筑上又加了一层,这样就变成了2×3×5,和原模型的块数比是30:36。)——这样对了吗?——*不对。现在这里的木块更多*(2×3×5)。——但是,我想让你给我建一个和原来房子木块数一样多的房子。——(他把刚加上的一层去掉,变回了2×3×4。)——这样它们大小一样了吗?——*是的*。——你是怎么知道的?——*因为我把木块拿到那儿了*。——它们里面的容量一样多吗?——*一样多,因为它们一样高*。"主试又给他呈现了一个体积为原来一半的模型(3×3×2),这样它一共有18个木块,堆了两层。这一次他又要在2×3的"小岛"上堆一个和模型空间一样大的房子。福禄立刻搭了一个2×3×2的房子,也就是说,高度和模型相等:"这两个房子的容量一样大吗?——*是的,因为它有这些木块*。——你量过了吗?——*是的*(指它们的高度一样)。——但是那个呢(主试指向宽度上的差异,重建的是2,而模型是3)?——*噢,是啊!*(然后他又添加了一层)。——现在对了吗?——*不对,那个*(2×3×3)*比那个*(3×3×2)*大*。——多出来的容量在哪里?——*那里*(指着高出来的部分)。——那儿?——(他又把高出来的一层拿掉了。)——好的,让我们试试在这个小岛(1×1)上建一座和那个(18个木块)容量一样多的房子。——(他把一个木块叠放在另一个上面,建成了一个和原模型一样高的房子。)——它和那个的容量一样大吗?——*不,它更小*。——那,你要怎么做呢?——(他加上了第三个木块。)——够了吗?——(他加上了第四块。)——现在对了吗?——*不,这间*(1×1×4)*比那间*(3×3×2!)*大,因为我在它上面增加了很多木块*。"

梅(5;1)　原模型是3×3×4=36个木块。"我想让你建在这儿(在2×3的地基上)。——(他搭了这个2×3×4=24个木块的房子。)——这两个建筑的容量一样大吗?——*是的*。——我没有这么确定。在我看来,你这个小岛上的房子的容量更小。——(它在自己房子上又加了一层,变成了2×3×5=30。)——现在它们的容量

① 第一个数字代表建筑的长,第二个代表宽,最后一个代表高。

一样大吗？——是的……这个多一点，因为它更大。——为什么？——因为我增加了很多木块（把最上面一层去掉了，这样现在它仅有2×3×4）。——它们大小是一样的（把两个建筑放在一起）。——好的，那如果现在我想在这个小岛上（2×2）建一座跟那个（36个木块）容量一样大的房子呢？——（他建了一座2×2×4=16的房子）。——那样对了吗？——是的，它们大小一样。——我可以再加些木块吗？——不行，那样这里的木块就多了。——如果在那个岛上（1×1）建呢？——（他堆了一座4个木块垒成的塔。）——这个和那个（36个木块的模型）的容量一样吗？——不一样，那个的容量更大，因为它更厚。——那这样呢（加了一个木块到塔上，现在一共有5个木块了）？——这样的话，这里的木块（5）就更多，因为它更高。"

乔司（5;2） 要在2×2的小岛上重建3×3×4=36的模型建筑："那做不到的。那个太厚了，而这边的这个太小了。——试试。——（他建了一个2×2×4的房子。）——你们的房子容量一样大吗？——不，那个（36）容量更大，因为它更厚。——你能解决这个问题吗？——是的，我必须把我的建高一点（把它变成2×2×5=20）。——哪个容量更大，这个（36）还是这个（20）？——我的（2×2×5），因为它更大（更高）。——我们可以再调整一下你的，让它们的容量保持一致吗？——不行，那是不可能做到的。——试试搭一个和这个完全相同的房子（也就是说，在3×3的底面积上进行搭建。）——我刚刚量了一下这些边的木块数（他完全正确地复制了这个模型，并且进行了认真的检查以保持高度的一致）。——好的，那现在你要在这个小岛（2×3）上再建一个房子，但要保持空间完全一致。——（他建了一个2×3×4的房子。）——你和我的房子容量一样吗？展示给我看看。——是的，它们的高度一样，厚度也相同（指它的宽和高）。——现在我来搭一个，你看好了。（主试首先搭了一个和被试看到的模型完全一样的3×3×4的房子，然后把所有的木块挪到了2×2的小岛上。他根据这个小岛重新调整了房子的形状，最后搭成了一个2×2×9的房子。）——你的更大，但是比之前的容量更小（因为它更薄）。不，它的容量更多，因为更大。——哪个的容量更少？——那个，因为它更小（36）。——那这些（2×2×9和2×6×3比）比起来呢？——它（2×6×3）的容量更大，因为它更长。——那这样呢（把2×6×3变成了2×18×1）？——这个的容量更多，因为它更长。——我们可以用这里面的木块（2×18）再搭一个这个（3×3×4的原始模型）吗？——搭出来的会更大……不，是一样大……我要搞清楚是不是真的，一样大（搭建出了那个房子，并和原来的模型比高度）。噢，是的！它们一样大！——那这样呢（把3×3×4变成了2×3×6）？——这个更大（有6个高）。——那它们的容量是否一样多呢？——不，这个容量更多（2×3×6），因为它更大。"

安博（5;3） 需要对比一些已经建好的结构之间的体积大小，也需要对其中的几个进行重建。"看看这两个（1×2×1和1×1×2）？——它们一样大。——那这两

个(1×3×1和1×1×3)呢? ——*它们也一样大。*——这两个(4×1×1和1×2×2)? ——*那个(4×1×1)更大。*——你能自己搭个和这个一样的吗? ——*能*(正确重建)。——这个(1×2×2)呢? ——*那个我做不来,太难了。*——你试试建个简单点的。——*好的*(搭了一个1×1×2的塔,作为原来的复制。然后他把模型放在它旁边,2×2×1,并且在它周围包了一层)。——你可以搭一个站起来的房子(1×2×2)吗? ——*不行,我做不到。*——这个呢(2×2×3)? ——(他造了一个1×1×3。)——它们两个一样吗? ——*我不知道,我只能搭那些长的,其他的都做不来。*

同(6;1)　对他的研究方法和安博的相同。"这两个(1×1×2和1×2×1)的容量一样大吗? ——*一样。*——这两个(1×3×1和1×2×2)呢? ——*那个(1×2×2)更大。*——很好。你试试搭一个和那个一模一样的。——(他在原来模型的外面又加了一层。)——现在这个(1×1×3)。——(他完美地重建了这个建筑。)——这两个(2×2×2和1×4×2)呢? 它们的空间一样大吗? ——*噢,不一样!*——哪个里面的木头更多? ——*那个(2×2×2)。*——你能搭个和那个一样的吗? ——(他在外面又围了一层。)"

西尔(6;5)　需要复制标准模型(3×3×4=36个木块),并且相当正确地完成了这项任务。主试调整了他重建的房屋,让它变成了2×3×6=36。"这个里面的容量和那个一样吗? ——(他想了一下)*那个(3×3×4)的容量更大,因为它更宽。*——那这样呢(把2×3×6调整为原来的比例)? ——*现在它们又一样了。*——那这样呢(把其中一个变成了3×4×3)? ——*还是一样。*——那这样(2×2×9)呢? ——*不行,这个容量(2×2×9)更小,因为这个中间是空的*(长和宽只有2×2)。——我们可以用这个(2×2×9)里面的木块再搭一个这个(3×3×4)吗? ——*是的,我觉得可以。*——你还是认为这里面的容量更小? ——*是的……我不知道*(他试着把其中一个变为了另一个,并且成功了)。——那这样呢(把它变成了2×18×1)? ——*那它们不一样。这个更大(3×3×4),而那个更小。*"

高(6;6)　显示了这一阶段儿童对在水中实验的反应,这一实验可以同时反映儿童对"内在"体积、"所占用的体积"以及互补体积的理解。高看到一堆木块(3×3×4)被放在水中。他记录了一下水位。"如果我把它们这样竖起来(垂直地),水位会发生什么变化? ——*它会变。会变得更高。*——仔细看看发生了什么(开始实验)。——*噢,不!*——现在,如果我把它们像这样围起来(3×1×12),这两个房子的容量一样多,还是一个会比另一个的容量大? ——*这个里面的容量更大*(3×12比3×3×4大)。——它们所占用的水一样多,还是一个比另一个占用得多? ——*这个所占用的水更多。*——为什么? ——*因为它更平坦。*"我们必须通过推断认为,高觉得新组合所有木块的内部容量更大,而且所互补的体积,也就是水的体积,也更大。处于这一阶段的儿童在考虑所限制的和互补面积时也会产生这种表现(看第十一章第八节所列出的沃尔的例子)。

第2A阶段的反应非常有趣,因为它们提供了很多儿童早期对体积的直觉认识。很显然,这里所提到的所有儿童都具有了这样的直觉认识。也就是说,他能够理解这一问题的意思:“这个房子比那个房子的空间更大还是更小?”同样,他也能理解主试所问的一个建筑是否比另一个建筑里的木头更多。而且,他的回答并非完全错误,因此福禄知道3×3×4的建筑比2×3×4的建筑更大。然而,这也充分表明这一阶段的儿童对体积的概念主要是拓扑性的:体积由外表面,也就是外面可见的部分所决定,而这些外表面反过来又决定于它们边界的线。然而,这些孩子还无法想象这些边界里的内容能够通过乘法运算计算出来。他们也无法通过逻辑乘法来平衡长、宽、高的关系,更无法通过数学乘法来计算长、宽、高(以量的形式存在)的积,从而得到体积。因此,可以看出来,孩子们认为体积不过是被边界所围出来的面积所估算出来的,而且这种估算是根据他们所认为的最重要或最突出的特征所决定的。

现在我们找到了体积的拓扑概念和欧几里得概念的联系。儿童需要比较两个不嵌套于任何其他东西而且彼此形状不同的物体的体积,因此必须依靠自己所有的欧几里得概念来解决这一问题。但这些概念是什么? 在第十一章,我们看到第2阶段的儿童在面积对比时,如果面对两个形状不一致的物体,根本无法进行对比,尽管他们能够看到组成这两个物体的单个要素数量一样多(比如用6个方块排成的长方形和重组后的金字塔形)。由于他们无法平衡各维度,因此无法比较飞机的两翼。因此,在第七章,我们看到这一水平的测量总是一维的,即使是在测量飞机表面或者固体时。即使这种线性的测量也很不完整,从第四到第六章可以看到。对距离和长度的估计还依赖于独立的顶点,也就是,儿童只会考虑两头的端点。因此,处于这一水平的儿童对比两个物体的体积时,会把体积视为具有表面的物质,而且只会考虑到它们和体积有关的最为显著的维度。

在实验过程中,我们发现上面所提到的儿童在估计房子的“容量”时,不管需不需要自己再建造一个,都只倾向于根据高度进行判断。有时我们发现儿童会基于长度或宽度进行判断,但这也表明儿童只会考虑某一个维度,任何一个最为突出的维度(参考乔司在对一排18个积木堆成的建筑所做的判断)。这一维度通常是高度,因为当一个建筑比另一个建筑高时,这一区别最为明显。然而,物体之间的区别非常重要,因为对这种区别的思考是儿童从体积的拓扑性直觉迈向初步欧几里得平衡的关键一步。

但我们也在这里发现了空间的基于表面的拓扑性直觉和只考虑一维的欧几里得估计之间的冲突。因此,儿童在另一座岛上所建造的小屋也许和模型的高度一致,但即使如此,他也开始意识到表面所包裹的内容是不一样多的。因此,他会试着增加建筑的层数。但当他发现这一建筑会高于原模型时,马上又会把这一层去掉,因为他又受到内在认知标准的限制。因此现在,他又一次发现自己把体积和高度混为一谈。福禄就是一个很典型的例子。先是认为一个3×3×4的模型和2×3×4的模型一样大,但当注意到房子

的外形时，他改变了主意，认为3×3×4的房子更大，所以他又在另一所房子上增加了第5层。但是他对第二种解决办法也不满意，所以他说2×3×5的房子“容量”更多，直接忽视了它只包含30个木块，而模型有36个木块这一事实。后来，他竟然认为一个由4个(1×1×4)木块组成的塔(比一个3×3×2=18个木块的房子)“更大，因为我一直在增加木块”。下一个被试梅意识到了4个木块的塔的体积没有3×3×4的大，因为后者更“厚”，但是在塔上加了一层之后，他非常自信地告诉我们“这里(1×1×5)的容量更大，因为它更高”。实际情况是，孩子刚开始只会考虑一个维度，并且搭出了比模型容量小的房子。然后他在其他的维度进行了对比，发现模型更大(“更大”“更厚”“更薄”“中间没有东西”等)，但是他无法综合考虑这些维度，因为无法运用数量乘法或者是逻辑乘法(也就是系统进行质性补偿)。因此，他又回到原来的单维比较模式，固执地认为这个单一的维度一定决定了面所包围下的空间体积。

当主试要求儿童随意地复制模型，而非在不同的地基上重建体积相等的模型时，儿童的反应完美地验证了我们的解释。毫无疑问，体积的拓扑性概念主导了儿童的反应：儿童没有建造另一个和模型相似的结构，而只是在它表面围了一圈，以覆盖所有可见的面。很显然，他以为这样做才能体现体积的核心特征，即体积是由表面的面所决定的。即使儿童所听到的故事不包括房子和墙，而只是被要求使用木块(这些被试之前没有接受过在小岛上建房子的任务)，也会这样做。因此安博无法复制1×2×2的木块结构，“我只会复制那些长的。”在面对这些过于复杂的模型时，他在木块外围又堆上了一层。同六岁了，如果指导语直接要求他复制模型，他能够轻而易举地完成，但他依然更喜欢在外面垒一层墙，就像安博一样。至少三分之一处于2A阶段的儿童都会这样做。

毫无疑问，在这些情景中还没有出现欧几里得意义上的体积建构，因为儿童尚未获得欧几里得建构所必需的核心要素——守恒。这里守恒是指形状改变时的体积守恒。乔司和西尔都不认为用同一堆木块堆积出来的两个模型拥有同等的“容量”。考虑到它们的表面确实不同(不仅在形状上，而且也是在量上)，这并不奇怪。那两个模型要素的线性关系不同，所以被试会受到这种影响，认为它们在体积上也不同，因为对他而言，体积取决于端点或表面。被试甚至会质疑模型转换形状后，使用同样的这批木块(这些木块没有增加也没有减少，虽然它们并没有经过点数)还可以通过反转回到原来的形状去。所以我们听到乔司说：“它会变得更大……不，是一样……我得看看它们是不是一样。”

第三节　亚阶段2B:过渡性反应

和之前一样,阶段2B水平的主要特征也是从阶段2到阶段3的过渡。在当前的实验情景中,阶段2B表现为儿童开始意识到如果要保持体积大小不变,在较小的地基上的建筑要造得更高,但是如果只是高一点点,还不足够。如果主试只是要求儿童复制这一模型,那么这一阶段的孩子需要进行一系列的尝试才能复制得一模一样。不管在哪种情境中,儿童都开始综合地考虑三个维度之间的关系,而不只是局限于一个维度。

查派(5;4)　他需要在1×3的底面积上重现一个2×6×2的模型。他把模型放在地基上,说:“*那个(岛)更小*(然后他建了一个1×3×2的模型)。——我刚刚让你为我建一个什么的?——*一个容量一样的房子*。——*那么?*——*这个的容量更大*(指着那个模型更长的宽度)。——好,那要怎么做呢?——*我要让它更高一点,但我不能让它更厚*(然后他建了一个1×3×4)。——现在容量一样大了吗?——……(他加厚了自己的建筑,超越了岛的边界,占用了代表水的皱卡纸)——那样不行,你的建筑必须建在岛上。——*这里的容量不够。那个房子*(1×3×4)*从这个角度而言*(高=4)*更大,但是这个房子从那个角度看更大*(宽=6)。——既然这样,那我们应该怎么调整呢?——(他放弃了,因为他不敢让高度超过4。)——试着在那个岛(2×2)上建这个房子(3×3×4)吧。——(他建的是2×2×5。)——哪个容量更大?——(他把房子建到了‘水上’,来拓宽房子的体积,但是想起了主试的要求后,又改变了主意。相反,他又增加了一层,让房子变成了2×2×6)*这个更高*。——这两个里面哪个容量更大?——*那个*(36),*因为它更厚*。——(现在,他的任务是重建一个一模一样的模型,3×3×4=36。)——(刚开始时,他建了一个2×3×4的,但是他突然大叫起来)*我知道秘诀了现在*(对比了两个房子,然后把他自己的改成了3×3×4)。——现在认真看(引入守恒问题)。现在我把这些木块拿出来堆成了这个(2×2×9)。现在它们的容量还一样吗(3×3×4)?——(他把两个放在一起,说)*一个宽一个长。那个*(3×3×4)*里面的空间更大,因为它有三排*(也就是说,它的宽是3)。”

克里(5;10)　要在2×2的地基上建一个容量等于3×3×4的房子:“*我觉得在这么小的岛上建一座这么大的房子是不可能的。我(只)能让它们的高度保持一致*(2×2×4)。*不,我必须让它更高一点*(然后把它变成了2×2×5),*现在它们的容量一样大了,因为这个更高一点*(36)。——试着建个跟这模型完全一样的建筑(在桌子上搭,不用考虑地基的大小)。——(他先贴着模型的两边开始搭,然后把模型拿开,并在刚刚搭的边界里面继续填充,最后重建了一个一模一样的。)——(主试把

他搭的变成了2×3×6)现在它还和那所房子(3×3×4)里的容量一样吗？——*不，这个(2×3×6)容量更大，因为它更高。*——那这样呢(把它变成了2×18×1)？——*这个更长，但是它没那么高。*——我们可以用这个(2×18×1)再搭一个这样(3×3×4)的吗？——*是的，因为这个更长。*”

吉奥(6;11)　要把3×3×4的房子进行转换，建造在2×2的地基上。他先是建了一个2×2×4的房子，但是接着说：“*我不知道如何继续下去。噢，是的！我要让它变得更高*(把它提高到2×2×7)。*现在差不多一样了。*——再仔细观察一下。——(他对比了这两个房子，然后又在自己的上面加了一层，变成了2×2×8)*这一次我觉得对了。*——为什么？——*我无法解释。*”主试只是让他重建一个和桌子上摆着的3×3×4的模型一样的房子。他重建的模型是3×4×4。“它俩完全一样吗？——*是的。*——再仔细看看它们。——(他调整了自己的模型。)——(现在主试把它变化成了2×2×9)它们的容量一样多吗？——*一样多，因为你用的是同一堆木块。*——(它又被调整成了2×18×1。)——*噢，这样的话这个*(2×18×1)*的容量更大，因为它更长。*——为什么？——*噢，不！它们的容量一样大，因为还是用同一批木块搭的。*——那这样呢(1×36×1)？——*这样的话，容量就不一样大了，因为这个太长太长了。*——但它们还是同一批木块搭的，不是吗？——*是的，显而易见。这个只有3个木块宽，而这个新的所有的木块都是宽。*——现在，你能用这些木块(1×36×1)再搭一个这个(3×3×4)吗？——*能，它们是同一批木块。*——但是如果这些木块一样，你还是觉得其中一个的容量会更多或者更少？——*是的，因为那个非常长。*——这样的话？——*它们是同一堆木块，但是那个容量更大。*”

卢克(6;2)　所接受的是另一种实验任务，对比和重建一些建筑。首先他比较的是两个排成列(1×2×1)和排成塔(1×1×2)的立方体。一开始他认为这些立方体垂直比并排摆放所占用的空间更大，但是他有更好的想法。然后，他要比较一个2×2×2的立方体结构和排成一行(1×8×1)的8个积木之间的大小：“*它们一样大，因为如果你把它*(2×2×2)*切开后再一字排开，就能得到这个*(1×8×1)*了。*(读者需要注意，这一实验方法中所采用的模型都是整体结构，而不是用小木块堆积成的结构。)——你可以量一下，看看是不是确实如此？——(卢克拿了一些木块，并且贴着1×1×8的模型一字排开进行测量；但在测量2×2×2的结构时，他只是覆盖了它的两个面。)——这两个呢(2×2×2)和(1×4×3)？——*它们是一样的。*——为什么？——*这个它更薄，但是也更长，而那个整个很厚。*——你试着再搭一个一模一样的。——(他复制了这两个模型，发现它们并非一样。)——这些呢(1×8×1和1×4×3)？——*第二个更大*(他开始重建这两个模型)。*不，我错了*(完成他的重建工作)，*我还是对的。*——这些呢(1×6×2和1×4×3)，它们一样吗？——*这个*(1×4×3)*更大。*(但是他开始重建它们，最终发现他能够把一个变形成另外一个)*不，它们一样大。*”

佩拉(6;7) 实验方法同上。对仅有2—3个元素的小模型的比较都是正确的。但是他后来确信(1×3×1)比(1×2×2)的体积更大,“*因为那里有3个木块*。——试着自己搭一个。——(他正确地搭出来了)*不,应该是那个*(1×2×2)*更大,因为另外一个里面缺了一个*。——这些(2×2×2和1×8×1)呢? ——*那个*(*立方体*)*更大*。——试着重建它们。——(他刚开始搭的是1×8×1,并且正确地搭出来了,但是在搭2×2×2时他说)*我搭不出来*(并且最多只能做到在模型的可见面周围搭上一层)。——再试试。——(他又开始紧挨着可见面砌墙。)——先从最底层开始。——(最后他终于把一个2×2的结构叠在另一个上面,成功地做到了。)——那这些呢(1×4×3和2×2×3)? ——*那个*(2×2×3)*更大*。——为什么? ——(他开始数4+4+4和3+3+3+3)*它们是一样的*。——你可以自己搭一个吗? ——(但是他一开始又把所有的表面都围上了,最后才搭成功了。)”

在这一阶段,儿童在重建和模型一模一样的建筑时一般不会围着模型的可见面进行搭建,这一点从佩拉身上就可以看出来。我们必须推断指引这些被试的直觉反应在本质上依然是拓扑性的。然而,这些反应不同于2A阶段的,因为儿童现在开始在两种对比的模型间建立起各个维度之间的关系。因此,在要求转换一个给定的模型时,查派几乎立刻说:“我要让我的高一点,因为我不能让它更厚了。”后来又说:“这个更厚,但那个更长。”或者我们可以引用克里的话:“这个更长,但是却不高。”或者卢克告诉我们的:“这个瘦而长,而那个总体来说更厚。”因此,在他们的建构过程中,这些被试都反映出对三个维度的意识,但不是同时的,而是一个接着一个的,说明他们开始进行逻辑乘法思维,虽然这种思维依然不如第3阶段的运算那么精确。

儿童能够考虑到三个维度这一进步,最明显地表现在他们在转换特定体积时,会改变这一结构的高度。处于2A阶段的儿童还不具备让新建筑超过原有模型的勇气,即使主试要求他们在更窄的底面积上进行搭建;而2B阶段的儿童则试图通过增加高度来弥补宽度和长度上的不足。同样,他们的冒险尝试也有局限性,即他们不会让自己的建筑比模型高2或3层。

维度关系协调上的进步也明显地体现在当被试要比较两个形状不同的体积时。因此卢克和佩儿都能够准确无误地做出一系列比较,虽然两个模型一个被拉长了,另一个更接近立方体。然而,即使在这一阶段,他们的进步依然只是相对的,因为只有在所对比的物体所包含的元素较少,或者让被试采用方块元素重建了这些物体之后,他们才能进行比较精确的对比。(当元素的数量超过3个或者4个时,没有试误就获得了成功意味着分解和运算测量的进行。)

在所有这些发展趋势中,也出现了体积的欧几里得直觉的进步。越来越清晰的体积概念让它的拓扑性质越来越弱,并形成了本阶段所描述的服从欧几里得规律的长度和面积概念。然而,虽然这些清晰化为使用逻辑乘法和运算不同维度之间的关系奠定

了基础,但它们还不足以让儿童有效地利用这些可逆的组合,这些组合直到运算阶段才能产生作用。因此这些反应本质上来说是一种过渡,并且最清晰地反映在儿童对守恒问题的回答上。虽然本质上还没有达到对原始模型的变形守恒,但是他们实际上已经获得了对体积的守恒,但是这些守恒并没有扩展到所有的变形过程中。吉奥的例子就很典型地反映了这一点。他看着一个3×3×4(自己模仿模型搭出来的结构)的结构被变成了2×2×9,而他非常肯定“它们是一样的,因为你用了同一堆木块”。然后,这个模型又被变成了2×18×1的结构,这次吉奥没那么肯定了。(“噢,这一次这个容量更大,因为它更长。”)但是又改变了主意:“噢,不! 它们的容量一样大,因为它们的木块一样多。”这两个结构外形上的差别太大,也可以看出吉奥已经离发展到阶段3不远了。然而,当把结构变为1×1×36,继续拉大了外形上的差异时,吉奥彻底被外形所迷惑了:“这一次它们不再一样大了,因为这个太长太长了。”然而他很清楚地知道那些木块还是一样多,而且用最为清晰的话来解释了这一原因,即一个3×3×4的结构可以通过把所有的排成一条线从而转换成1×36×1。然而,虽然他已经通过直觉获取了大量的关系信息,依然无法认同那两个体积一样大,理由是“另一个太长了”。他最后的结论也许看起来很奇怪和矛盾,但却是前运算直觉阶段儿童对欧几里得体积的典型反应:“这些木块是一样的,但是那个空间却更大。”这些困难可以被克服,但是只有在获得了阶段3才能达到的乘法运算之后。

第四节 亚阶段3A:关系的逻辑乘法以及局限于内在体积的守恒

通过不断地改变实验模型的形状而获得的体积守恒在阶段3固定下来,这一发现因此成为分辨阶段3和阶段2A的标准。在阶段2A,儿童根本没有守恒概念,而在阶段2B,就像我们所看到的吉奥的例子,守恒已经存在,但尚不完整。它和阶段4所获得的整体守恒不同。这些差别非常清晰地反映了儿童在建构体积或更宽泛的空间的欧几里得概念上的差别。在阶段3A获得的守恒既是拓扑性的,也是欧几里得性的;它的原型最早出现在2B阶段,因为两者都来源于同一种体积观念,即体积受限于其外在表面。在实际操作中,这一观念体现在儿童认为组成某一物体的木块和这一物体是相同的。从物理学的角度来看,我们可以说守恒的基础是物质的量的不变性,而非固定或液体所占的空间体积的不变性。这也意味着从几何学的角度来看,所守恒的体积是“内在体积”,只关系到其内容而不是容器。后者的体积只有在关系到外在空间结构时才有意义,因此意味着儿童认识到体积是一个彼此关联的连续体,它没有界限,因为其本质是一种数量关系。长度的守恒相对比较简单,而面积的守恒还涉及第二个维度的变化:其各部分长度的变化,尤其是周长的变化。但在三维空间形状的变化会同时改变长度和

面积，而体积却保持不变；因此，一个边长2 cm的正方体表面积是24 cm^2，但如果把它拉长成平行六面体，1 cm×8 cm×1 cm，虽然它们的体积都是8 cm^3，但是它的表面积变成了34 cm^2。这也解释了为什么儿童在尝试搭建和实体空间相同的建筑时刚，开始会用构成立方体的小木块来理解其内容的守恒，而用其在周围环境中占据的固定空间来理解其体积的不变性。对后者的理解不仅仅需要理解内容或"内在体积"守恒所需要的质性运算。儿童要在所包含的空间以及包裹它的面或区域之间建立正确的关联，这不仅仅需要逻辑乘法运算，还需要数学乘法运算。儿童在形式思维阶段之前不可能具备这些运算能力，就像我们在第十三章看到的，因为这需要对连续空间进行无限分割。

然而，对3A阶段有限的认识值得我们关注。有证据表明，儿童认识了线条之后才会关注面，接着才会考虑如何填充这些面。"内在"体积的守恒是这一过渡期的最后一个阶段。朗伯西尔(Marc Lambercier)对不同年龄儿童重铸黏土立方体的一系列研究很好地说明了这一点。他的被试中最年幼的，只是把黏土捏成线描出了正方形的边；大一点的儿童，他们也许处于阶段2的某一个亚阶段，会接着用这些黏土线搭出一个框；而再大一点的孩子开始填这些面(给架子搭上栅栏)；但只有到了8岁左右的孩子，也就是处于阶段3A的孩子才开始把它捏成一个实心的固体，也就是说，直到那时他们才开始考虑物体的内容或"内在"体积。朗伯西尔的发现和我们的不谋而合，充分说明三维关系的平衡是渐变式发展的，这也是我们研究的主体。

让主体认识到"内在"体积守恒，从而正确地从三维角度来认识空间的运算格式是什么。刚开始它只是其中一种逻辑乘法，因为它足以让儿童认识到当物体形状变化而体积没有发生改变时，各种空间元素之间是如何互补的。

瑞斯(5;1)　虽然很年幼，但已经发展到2B和3A阶段之间了。他要在2×2的小岛上建一个3×3×4的房子。一开始，他保持了高度上的一致，并用手指来测量以确保无误："它们的容量一样多吗？——*不*(并且把他2×2×4的房子比着原模型。看到后者在厚度上多了一层，他把自己的变成了3×2×4)。——试着别搭在水上。——(他又添了很多层，直到变成了2×2×7)*现在好了*。——现在给我建一座房子，容量和这个(2×2×5)一样大，但要建在这个小岛(1×1)上。——*这很难，因为我只能搭个塔*(搭了一个1×1×11)。——这对了吗？——*不对，因为必须要保证它们的数量一样多*(他数了一下自己塔里的和2×2×5的模型里的木块数)。——它们的容量一样大吗？——*不一样，这里的更少*(指塔里)。——现在在这个(2×3)上面搭一个这个(3×3×4=36)。——(一开始他搭的是2×3×4)*不，这个房子更薄*。(所以他又挪过来一个岛，并把自己的搭成3×3×4，也就是完全复制了原模型)——假如我把你的房子变成这样(2×3×6)，它们的容量还一样多吗？——*是的，因为它们的木块一样多*。——变成这样呢(2×9×2)？——*还是一样*。——那这样呢(2×18×1)？——*还是和那个一样*。"

沃格(6;7)　要在2×2的地基上重建3×3×4的房子，一开始看着它的高说："肯定要更高(建了一个2×3×6=36的建筑)。——你现在确定了吗？——是的。——为什么？——我要量一下(他把最上面两层12个木块移开，放到剩下的旁边，变成了和模型一模一样的3×3×4；然后他又把这两层放到其他的上面，变回了2×3×6)。——你能在这个(2×2)上面再建一个容量一样大的吗？——我要把它搭得很大(让它变成2×2×8=32)。——那样对吗？——是的，我的比那个高两层。——所以就可以了？——是的，我已经量过了。——我们可以把你的房子转换成那样(3×3×4)吗？——是的(开始尝试)。我一定是错了。我的少了4个！——如果要你在那座小岛上(1×1)搭一个(3×3×4)大的建筑，你会怎么办？——我有办法了(他在桌子上了搭了个3×3×4的结构，然后把那里面的木块一个一个垒到1×1的小岛上)。"不用说，他的结构在彻底完成之前倒塌了，但却足以表明其想法是正确的。

艾尔(6;7)　要在2×2的地基上建一个和3×3×4的建筑容量一样的结构。他刚开始对比了一下两者的高度，建了一个2×2×4的房子；但他接下来又对比了剩下的两个维度，并把自己的建筑改为2×2×6。"你为什么把建筑添高呢？——因为我的没有你的厚(又加了第7层)。——你怎么决定要增加多少层呢？——我知道它缺了这些(指着宽度上的差异)。——你看看能否再搭一个这个(3×3×4)？——(他正确地搭出来了)——现在看(把这个结构转换成2×2×9)。这两个哪个的容量更大？——它们一样大，因为你用的木块是一样的，你没有使用其他的木块。——这样呢(1×1×36)？——我觉得它们不一样。噢，是的！它们的容量还是一样大，因为用的还是以前的木块。这个(3×3×4)包含了所有的这些(把他的手放在上面，指着外面的面)。那个更高，但是如果你把它们拆开来，它又会变低了。"

鲁特(6;9)　要在一个2×3的地基上建一个3×3×4的房子，他一开始就说："你做不到的，因为它更小(然后搭了一个2×3×2的)。不，必须再加一层。就是它了，不用再加了(然后他继续加到最后变成2×3×7=42)。我的容量可能更大，因为我增加了那么多层。只是它更薄，所以你要让它更高。——如果在那个(2×2)上面建呢？——噢，我知道，你也要让它更高(而他搭的是2×2×13=52!)。"

米克(7;2)　为了在2×3的地基上搭一个3×3×4的建筑，建了一个2×3×6的房子："这样它们就一样了，但是高度不一样。与其把木块搭到水里，还不如简单地加高建筑。——如果在那个(1×1)上面搭呢？——(他试图量量应该用多少木块，但是没成功。)"

斯特(7;0)　要对比2×4×1和2×2×2的结构："这两个结构的容量一样大吗？——(他很仔细地看着它们，接着开始用手指进行测量)是一样的。——你怎么知道的？——你可以把它们切开(试图把一个转换成另一个)。——你不可以用这些小(单位大小的)木块来测量吗？——不行，我不知道要怎么做。——这些

(1×4×3和2×2×3)呢? ——*它们是一样的*。——你怎么知道? ——*我会试试*(用12个木块重建了一个1×4×3的木块,然后把这个建筑转换成2×2×3)。——你怎么确定呢? ——*我会数数它们*(在两个里面都数了12个)。"

马尔(7;4) 对比了2×6×1和1×8×1:"*第二个更大但也更窄。如果把它切开*(2×4×1),*它会*(比2×6×1)*更短*。——这些呢(1×8×1和2×2×3)? ——*如果你把这个*(1×8×1)*分成四份*(转换成了2×2×2,也就是4个2木块高的柱子),*另一个会更大*。——这些木块会帮你做决定吗? ——(他重建了这些模型,先进行了一下对比,然后又数出了每个里面的数目。)"

梅(7;7) 比较了2×2×3和1×6×2:"*它们都是一样的,因为如果你把这个*(2×2×3)*分成两半,再这样并排*(在宽度上)*拼接起来,就和那个完全一样了*。——你能使用这些木块来验证自己的想法吗? ——(他和第二阶段的孩子一样,在模型的可见面围了一层,因此他发现在这两个模型中所使用的木块数量不一样)*是一样的,它们是一样的*。——找一个和这个(2×4×1)一样大的。——*那个*(2×2×2)。*那是4套2个一列的组合。它和那个真的一模一样,但是这里的组合是上下堆积的。*"

布尔(7;7) 比较着并排摆放的1×8×1和2×2×2,说:"*它们是一样的。你看右边的那一堆有4块。我们马上就能看到是不是这样*(然后他用小木块重建了一个2×2×2,确保了每一个维度的正确性,然后把它转换为了1×8×1)。*它是一样的。它们的容量一样大。*"

上述是3A阶段的典型反应。很显然,这些被试不需要辅助就能建立其相连维度之间的关系,虽然刚开始时他们只能成功地考虑两个维度。刚开始这种协调是质上的,也就是说刚开始它只包含了对"更多"或"更少"这种关系的逻辑乘法[①]。这里没有任何形式的测量,当然也没有采用任何形式的测量单位。然而,虽然这种协调所引起的补偿仅仅是一种粗略的估计,而没有完全消除这些差异(比如瑞斯和沃格刚开始的回答就是这样),而且有时这种差别还会被放大(鲁特),但是我们很快发现被试有了两大重大发现,这让他们的补偿更为精确。首先,开始出现自发的测量,包括两种或多种方程的逻辑传递性,虽然儿童尚未掌握单位的迭代。其次,这一补偿得到了准确的验证,尽管是通过重建来进行的。沃格就是一个很好的例子,他成功地在1×1的地基上搭建了和3×3×4容量相等的结构,通过先重建模型再调整其木块的位置来转换形状。斯特和布尔也是这样做的。

内在体积(比如物体内部所含的物体的量)守恒的获得和儿童获得长度和面积的过程是一样的。对部分和位置改变的质的协调不需要运算的参与,也就是不需要真正的

① "第二个更大(比如说更长),但是更窄。"(马),或者,"它更瘦,所以你要让它变得更高。"(瑞特),等等。

数量运算。这里的所有被试都明显地意识到守恒,这表现在他们改变木块的排列顺序来进行变形时,或者在回答主试有意提出的变形问题时,或者最后,像马尔和梅一样,在对比两个形状不同的模型时,不需要提醒就做出了纯粹的心理变形。

然而,守恒依然局限于内在体积,还没有延伸到物体和其周围环境的空间关系。布尔和艾尔很明显:"它们是一样的。它们的容量一样大。"或者"它们的容量还是一样多,因为它们所用的木块和之前一样多"。梅进一步阐释了这一点,他试图通过把所有的木块围在两个模型周围进行重建,并发现他所用到的木块数量不一样多,但他依然告诉我们:"是一样的,它们是一样的。"梅并不是唯一一个坚持把给定体积围住来进行重建的被试,但是他却能很清楚地认识到其包含的木块数量是稳定的。米克和梅这样的孩子正确地认识到,体积是被表面积包住的部分,但是当他们试图比较包住两个模型的直立面的木块数量时,却遇到了困难。

通过实验也可以看出,这两种守恒在本质上的差异。内在体积的守恒出现在3A水平,但和空间上相连的物体的体积守恒直到第4阶段才能获得。刚刚所提到的被试可以准确并且清楚地告诉我们,一个2×2×2的立方体和一个长度为8个木块、宽和高只有1个木块的长方体:"是一样的。容量一样大。"(而且,他们能够预见到这种一致性。我们发现,他们预测到两个维度彼此不同的盒子所包含的沙子量会是一样多的。)然而,如果我们的问题是关于没入水中的体积,那么他们给出的答案会接近于7—11岁孩子在初次接触这一实验时所给出的回答[①]。(他们会认为)一个球形黏土或一个圆柱形黏土所占用的体积会不同,并取决于其是整体还是被切成两块或四块放入水中的等,甚至还取决于这个圆柱是直立放入还是平躺着放入的。随着黏土形状或者甚至位置的变化,它的体积也会发生改变——表现为所占用的水的体积的变化。但同时其内在体积则取决于所构成的黏土量,并始终保持不变。

下面的例子很好地代表阶段3的反应(虽然它们也包含了一些阶段3B和阶段3A的反应)。它们很清楚地表明在3A阶段获得的内在体积的守恒不同于"所占用的"体积或与它互补的替代性体积。

萨尔茨(7;10)　预见到我们把3×3×4的木块放入水中,水位会升高,我们也这样做了:"*你看我是对的。*——那如果我把这个塔像这样倒下来放平,所占用的水量还是一样多吗?——*不,占用的水会更多,因为这些砖块直接接触了水底了。*——那现在如果我们把它变成这样(3×1×12),这两个房子里的容量还一样多吗?——*是的,完全一样。你用的是同样的木块。*——那它们所占用的水量是一样的吗?——*不一样,这个占用的空间更多。噢,不!不是的!它占用的空间更少,因为这个房子被侧着拉长了。*"

---

① Piaget & Inhelder, *Le développement des quantités chez l'enfant*, chs. Ⅲ and Ⅺ.

贯克(8;2) 意识到3×3×4的塔没入后水位会上升:"现在如果我把它颠倒一下,会发生什么? ——*水位会下降一点点,因为这下房子就在水底了。*——那如果我把木块放在水底,房子本身的容量还是一样的吗? ——*是的。容量是一样的。*——那这意味着所占用的水量也是一样的吗? ——*不,那不一样。*——那,如果我把房子分成了两半,里面的容量还是一样的吗? ——*是的,容量还是一样,只是分成了两半。*——所以所占用的水量也是一样的,是吗? ——*不,那个会变化。所占用的量会更少。不,更多。*"

艾迪(8;5) 也认为木块在直立或水平摆放时,水位会发生变化。实验进行之后:"*我错了。水位的高度不会变化,因为木块的数量是一样的。*——那是否意味着无论我如何摆放这些木块,水位都会保持不变? ——*是的,一直如此。*——那么房子在水中所占用的体积一直会保持不变吗? ——*不。*——(木块的排列方式由3×3×4变成了3×1×12)现在这所房子的容量和之前的一样大吗? ——*是的。它们的木块一样多。*——那它躺在水底时所占用的容量一样吗? ——*不一样,这样(3×1×12)的话,占用的更少。*——你的理由是什么? ——*木块的数量一样,但是所占用的体积更少。*"

钦(9;6) 也认为3×1×12比3×3×4的木块:"*所占用的体积更少。*——那房子里面的容量一样吗? ——*是的,因为不管房子是直立的还是平放的,里面的木块数量都是一样的。*——那会如何影响它在水中所占用的空间呢? ——*它躺着时所占用的容量更少。*"

盖尔(13;4) 也认为3×3×4和3×1×12的木块堆里所具有的空间是一样的,但是:"*这些木块占用了更多的空间,因为它们又矮又宽。之前它又高又窄。那会占用更少的空间。*"

从以上被试的反应可以看出:当木块被没入水中时,其内在体积的守恒并不能确保与其互补的水量的守恒。更奇怪的是,木块本身在水中所占用的体积也不稳定!"它们所用的木块数量是一致的"是艾迪所给出的天才回答,表明其内在体积的不变性,"但是它们占用了更少的空间"表明对他而言,木块在水中所占用的体积并不等同于其内在体积。直到阶段4这一矛盾才得到解决。我们在讨论其解决方法时(第六节)会再介绍其解释。

第五节 亚阶段3B:首次开始考虑测量关系

3B和3A阶段在内在体积的守恒上几乎没有差别。然而,他们获得了一项关键技能,以平衡对物体进行实际或者心理上的转换时的关系。在这之前,儿童仅仅是通过逻

辑乘法来协调这些关系，而现在这些关系则以数量形式表现出来。这并不意味着被试懂得如何通过线性测量计算体积，只是意味着他会努力去测量三个维度的长短，充分利用测量单位，或者用他对边界的测量来衡量其体积概念。

盖斯(6;7)的发展特别超前。虽然她年龄很小，但是她的反应接近于3B水平。为了在2×2的地基上重建一个3×3×4的空间，她首先把自己的建筑堆到了4木块高，然后说："*不，那还不够，我必须让它更高一点。*"她又添了两层才感觉到满意。但是在把建筑建在1×1的地基上时，她并不满意于1×1×13的构造，而且试图采用数量术语来描述这个转变过程："*我必须让我的更高一点，因为那个更宽。我已经让我的两倍高了，但接近于3倍高了。*"下一个任务是在2×3的底面积上转换3×3×4的模型，刚开始她意识到宽是一样的："*从这个角度看它们是一样的，但是那样(深度)看的话，它更小。*——你能够通过什么方法发现应该堆多高吗？——*我看看。我会量一量。*(她只放了一层在2×3的底面积上，然后把它和模型对比，注意到其中一个维度少了一层。她评论道)*没有必要让它变成双倍高，因为只少了一层。*——(主试让她建个和3×3×4一模一样的建筑。)——(她把三个木块一组沿着一面摞起来，并且把其中一列增高到4。这些测量足以让她轻松地复制原模型)*每次我都会摆三排，每排3个木块。*(这一次，她轻松地把她的建筑转换成了2×3×6，因为她只是在垂直方向移走了12个木块，剩下的结构变成了2×3×4，然后又把那些木块摆成两层，每层都是2×3，放在原来的结构上。)——如果我这样放(2×18×1)，它们的容量还是一样大吗？——*当然。容量肯定是一样的，因为你用的是同一堆木块。*——我可以再用这个(2×18×1)转成这个(3×3×4)吗？——*是的，因为你用了我的木块，那就够了！*"

詹(8;4)　要在2×2的底面积上转换一个3×3×4的模型。刚开始他和3A阶段的儿童一样只是猜猜，在原来的基础上加了一层。在搭成2×2×5之后，他评论道："*下面(底面积)越窄，房子越高。*——你的屋子容量还是那么多吗？——*是的，你可以说都是一百。*——你怎么确定的？——(他数了一下自己搭的建筑2×2×5，从外面可以看见它所有的部分)*这儿有20个。那个(3×3×4)，我看到了三排……*[1][不知道从哪儿开始数起，他突然叫道我需要用这个(2×2×5)里面的积木搭一个那个(3×3×4)。他发现需要更多的积木，因此多拿了些来保证自己的和模型同高；然后他又把这些积木搭在了2×2的'小岛'上，并搭到了2×2×9高。]*现在对了。*"

艾杜(9;2)　要在2×2的底面积上转换一座3×3×4的房子。首先，他让高度保持一致，搭出来的房子是2×2×4："*不对。那个更宽。它有三个房间，而这个只有两个房间！我必须让它更高一点。*(他搭的是2×2×6。完成以后，他俯视了一下

① 读者需要注意原模型是一整块，而且也没有用小块标记。

模型,研究了一下它3×3=9个砖块的直立面。他数了一下形成其表面的积木数量,但是错误地对8个角的木块进行了重复计算,让他误以为一共是12个木块,而不是8个木块)一共是*有三组四个木块*。——那么,你的房子对了吗(2×2×6)?——*是的*。(他研究了其中一个直立面并把12个木块分解成4份,每份3个,看看它们会如何与模型最上一层的四个边一一对应起来。)*这个是这里,这个是这里,而这个应该是这里*,等。"艾杜在度量过程中很明显不只犯了一个错误,他试图把整个侧面和部分水平面混淆,而且在数后一部分时数错了!

接着,他要完全复制这一模型,然后主试将他的建筑转换成了1×36×1。"这个和那个里面的房间完全一样多吗?——*是的*。——你怎么做才能确信你的想法是正确的呢?——*把这个*(1×36×1)*变成那个*(模型)。"

巴(9;6) 要在2×2的底面积上重建3×3×4的模型,他搭了一个2×2×8的:"*我已经搭了2倍高了,因为一个(模型)比较矮但是更宽,而另一个则瘦而窄,但也更高*。——那为什么是两倍?——*因为这里还剩下1个*(宽度上相差1,3−2),*而这里也留下了1*(深度相差1),*所以我搞成了2倍*(因为1+1=2!)。"

尼克(9;5) 也试图通过比较每一排的差异来算出所需要的高度。为了在2×2的底面积上搭出和3×3×4模型容量相等的建筑,他先在模型上方(3×3=9)挨着角落搭了一个2×2=4的底,然后他数了一下差的木块数,那里是五个:"*这样的话我的就少了五个,所以我需要再加一层*(4+1=5,这五层对应着那五个木块,因此他现在的结构是2×2×5)。——你如何肯定呢?——*我会看看能不能把这些填满*(比如又围着模型的外周建了一层!现在他又建了一层,但仅仅是围着模型的垂直面,没有考虑底面和上面。他一共使用了64的木块,每四个面有3×4=12个木块,而在四个角每个角都需要额外增加四个木块:48+16=64)。*这里*(底面积2×2!)*需要非常高*。"显然尼克不会想去用这64个木块去包围自己建的建筑(2×2×5,需要60个木块)。但是,他认为用这64个木块可以重建一个体积为3×3×4的建筑。然而,我们看到他有点疑虑,因为木块太多了:"你觉得太多了还是太少了?——*我不知道。它会变得太大了*。"现在他试图用这64个木块搭出3×3×4。他很惊讶地发现剩下来太多,但是他试了一次又一次,最后大声说:"*我真搞不懂。我是不是把哪个面数了两遍*(在围着模型进行搭建时)?"尼克明显以为他用来围出某个体积所用的木块就等于这个体积!

尤德(9;5) 采用了同样的方法进行测量,但是他的质性估计本质上是正确的。当要求在2×6的底面积上建造容量和3×3×4相等的结构时,他建造的是2×6×3,也就是对的。他和处于3A阶段的儿童一样,根据所需要补偿的量来进行调整。(他心理加工的方式是在3×6的底上分解3×3×4的模型,从侧边拿走一层堆在旁边)然而,在确认这种结构是否正确时,他在模型的4个直立面上添加了一层木块,每层有3×4=12的木块。(尤德比尼克的想法更加高明,在于他没有填

充四个角落)"我数了4×12,因为(模型)的一面是12个,一共有4面,这样就是12+12=24,另外再加24就是48。而这个(2×6×3)也是48个。(他毁掉了自己的模型)*噢,不!少了一些东西*(然后他又加了12个)。——试试再建个跟这个一模一样的(3×3×4)。——(他正确地进行了重建,并且发现用掉的木块数没有48个)*噢,是三而不是四乘以12个木块!那我们这里应该也有36个木块*(2×6×3)*!"*

我们观察到刚进入3B阶段的反应类似于3A阶段,比如盖斯和詹,存在空间关系的逻辑乘法,但是这一过程逐渐发展为一种修正过程中的调整和补偿。儿童出现的唯一发展表现为,儿童使用数字或数量关系来证实自己的预测。盖斯会说"两倍高,接近三倍高",而且,正确地打消了把自己的复制搭到原来的两倍高的想法,因为它在深度上仅仅少1层。詹数了自己的2×2×5的结构里的20个木块。虽然测量并不是儿童的首选,只是源于一种直觉或质性运算的延伸来辅助建筑过程,但是测量本身却是相当准确的。因为它只用于线性数量估计("两倍高"),或者在已知可见的单元间进行乘法关系运算:"每次我都会堆出3排,每一排3个木块。"是不到7岁的盖斯所使用的乘法。但是当涉及体积问题时,这些孩子就被难住了。因此詹仅仅数了他能看到的所有2×2×5结构里的20个木块,但是在面对模型时,他在"我已经弄了3排了……"时就卡住了,并且抛弃了数数,而是采用补偿的质性方法(比如通过改变位置来把木块从一个维度挪到另一个维度上)。

在3B亚阶段开始时,我们也许可以说,测量这种位置的改变或分解的综合,并不局限于一个维度,而可能会发生在二维或三维(正如我们在第七章所见)空间,但是孩子们尚不具有计算内在体积的能力。

后来儿童表现出试图通过测量来重现体积本身。但是这一努力却像是退回了阶段2的行为,也就是儿童试图通过包围某一模型来构造其体积。当儿童要使用特定量的木块来重现给定体积时,他们经常会用木块包住可见面,好像"圈"住它就能够获得其体积本身。达到阶段3B之后,我们的被试相当擅长复制某一直立的体积,但当要测量它,或者更准确地说,测量其由可见边界的长度或面积决定的内在体积时,会退回到随意地测量这些边界,或者会像阶段2的儿童一样围住它。他们的这种行为可以解释为依然无法利用数量乘法来计算面积和体积,而它们是从不同维度得到的线性测量的乘积。然而,不同于阶段2的儿童的是,他们现在会通过数出搭建过程中会用到的木块来测量!艾杜就是采用这种方法来建立了自己塔的一个直立面和模型的上水平面所对应的8个木块(非常便利地忽视了处于中间但完全可见的第9个木块!)的对应关系。同样,巴的结构是模型的两倍高,因为模型在另外两个维度上都多了1个木块(模型的底面积是3×3,而巴所重建的底面积是2×2)。尼克在贴着模型(其上表面是3×3)的某一个角摆上了自己的底面积(2×2)所要求的4个木块,然后他注意到模型多出了5个木块(9-4=5),这让他得出了一个奇特结论:他的建筑应该是原来的5倍高!最后,他退回

了标志着第2阶段的典型反应。他用64个木块把模型的表面包了起来(也就是他所说的“把它整个装满”),并且试图在他2×2的底面积上造一座包含64个木块的塔,这样就能保证和原模型的体积一致了！当他复制模型时,很震惊地发现这64个木块本身都无法重建3×3×4的模型。好像一个需要用64个木块来围住四面的建筑自己本身必须也有64,而不是36个木块！尤德的推理方式完全相同,但是他并没有管四个角,因此不正确地估计出了3×3×4=36的模型需要48个木块,因为它有四个侧面,每个侧面都需要3×4=12个木块。

这些对测量内在体积的最初尝试可以总结为以下几点。儿童要么会把体积等同于一系列立方体,其数量等同于某一个面(甚至可能对应着某个线性周长,比如上表面包围着中间内里木块,但这个木块对艾杜是可见的8个木块),要么会把它等同于围住模型所用的立方体数量。在第3阶段(A和B)体积的守恒只限于内在体积的守恒,儿童也无法理解物体在周围空间所占用的体积是不变的,这并不奇怪,因为他们既无法测量也无法进行计算。这一阶段的孩子还受限于封装和边界的拓扑学概念,因为还缺乏运算概念,那样才能通过测量和计算来构建欧几里得体积概念。儿童可以以长度为单位来对三个维度进行测量,但是无法理解如何通过让这些长度相乘来得到平方或者立方单位的乘积。我们在第十三章看到,这一理解的获得是形成第4阶段的形式运算的前提,在下一部分将会进行这一总结。

第六节　阶段4:三维度量的数学计算以及真正意义上的体积守恒

随着儿童年龄的增长,校园学习所习得的知识越来越影响到其几何概念的自发发展。然而我们可以发现第4阶段有两种理解上的重大突破。一方面,儿童现在建立起形成固体和体积本身的线段和面积之间的关系;另一方面,体积的守恒概念也扩展到对物体相对周围空间所占用的体积的守恒。刚开始我们会介绍两个介于阶段3B和4之间的例子。

毛(10;10)　要在2×3的底面积上转换一座3×3×4的建筑:*“小岛并不相同,所以我要让屋子更高一点*(数出了覆盖底面积的木块数量是6)。——为什么你要那样数?——*这样可以知道我还需要多少。面积是6,而高度是4,所以我还需要4个……如果我知道那个*(模型)*体积有多大就好了!*——看看你能不能找到这个答案。——*体积?我还需要4个*(排)*来填满这个地方*(也就是两者底面积的差异)。*所以我还需要12个木块*(让它变成2×3×6)。*现在这个和那个*(3×3×4)*的房间一样多了。”*

“好的。试试在这个(2×2)上面进行转换。——(他先搭了一个2×2×4)现在

我还需要16个。不，这一面还和之前一样需要再加12个，而那一边要再加7，不，8个，那两边加起来就是12+8个，所以还需要20个（这样就是16+20=36，因此是正确的）。*这意味着高必须是10。不，完全错了。我应该先算出体积。*——你要怎么算呢？——*嗯，它取决于长度。我必须数一数，宽是12（数了3×4这一面的木块），然后高是4，长是3……*"虽然他知道他还需要20个，但他没有再继续下去。

科尔（11;11）　要在2×3的底面积上转换3×3×4。他说他必须保持体积上的一致性："你知道我们说的体积是什么吗？——*小木块进去的次数是多少。*——很好。你能在这个上面（2×3）搭个一样的吗？——*你需要9×4=36个。*——你是怎么算出来的？——*它的高是4，每排有3个，那就是4×3=12个，而我乘以了9，因为那是上表面的面积。*"

这两个孩子都想知道模型的体积，说："如果我能知道体积是多少就好了！"但是虽然他们意识到体积是数量乘法的积，却试图用两个长度与面积相乘：高和深乘以侧面积（4×3×12，毛），或者高和宽乘以上表面积（4×3×9，科尔）。即使如此，他们都很充分地论证了在根据底面积调整建筑时，还需要增加多少层。

对体积的兴趣也和介于阶段3B和4的过渡阶段的另一发展过程有关。儿童在第3A阶段就获得了内在体积的守恒，但直到这时，儿童才开始将内在体积等同于其在所包围的空间里的体积，也就是说直到这时，儿童才能够获得"所占用"体积的守恒。下面的两个例子中的测量表明三维空间开始表现出一定的连续性，从而让我们的被试能够考虑"被占用的"体积，而不是"内在"体积，并意识到其守恒。

毛（10;10）　一堆3×3×4的木块被直立放入水中："*水位上升是因为木块在水中占用了很多体积。*——如果我把它侧放呢？——*水位依然不变，因为它所占用的空间是一样的。*——如果我改变它的形状（2×1×18）呢？——*水位依然会上升到同一水平，因为它所占用的体积是一样的。*"

卓（11;4）　在要测量木块时的回答和毛差不多："假如我把这些木块（3×3×4）像这样放入水中，水位会发生什么变化呢？——*它会上升。就像你把手放进去水也会上升一样。它占用了很多空间，所以水会上升。*——如果我这样放（3×1×12），它们占用的水量还一样吗？——*不一样。*——为什么不一样？——*噢，是一样的！我错了，还是一样的。*——那周围的水所占用的空间呢？还是一样的吗？——*当然。*——如果我们把木块分散开呢？——*还是一样。它们占用的空间总会一样的。*"

我们的被试（卓）有时会犹豫，但是我们看到他开始表现出将体积作为一种被占用的体积，甚至是互补置换体积（displacement　volume）的守恒。

最后,我们来看看三个毫无疑问属于阶段4的例子。

格拉(9;6) 显然能够自己测量体积,虽然他很聪明,他还是和学校里其他同年龄的孩子处于同等发展水平,因为他们都没有接触过几何学:"你看能不能在这座岛(2×3)上建一个容量和我这个(3×3×4)一样大的房子。——我能看出它有点小(建的是2×3×4)。它们在宽度上不一样,所以我要在上面再加点。——你会怎么做呢?——我先数数这些木块(用模型来比对着复制品):这个一排有12个,所以我只要把它们放到顶上就好(2×3×6)。——好的,现在你怎么在这个(2×2)上面建一座那样的房子(2×3×6)呢?——如果你用这个房子(2×3×6)里的木块,就会有36个。这里(在2×2的小岛上)每层需要4个,所以一共要9层(2×2×9)。——如果在这个小岛(3×4)上重建这个(3×3×4)呢?——我数一数(模型)。每个边有3个,所以每层有9个。由于一共是4层,所以一共是4×9=36。因为每层有9个,3×3,一共4层。(而他建造的是3×4×3。)看,现在这个屋子完成了。——它的空间和之前一样大吗?——是的。"

赛(11;8) "看看你能不能在这个岛上(2×2)建一座和那个(3×3×4)体积一样大的塔。——我需要让它更高(量量模型的高)。这个有4层。我要算出这个模型里的木块数。我想应该是36个。所以……(他垒的是2×2×4=16个木块,然后又加了12个,最后又加了8个,这样一共是2×2×9。)——如果我把这个模型(3×3×4)放入水中,水面会发生什么变化?——会上升。——为什么?——因为这个在水里会占用水的地方。——那如果我把这个(3×3×4)变成这样(3×1×12)呢?——水会上升到同样的地方。——为什么?——因为它的大小没变,所占用的空间也不会变化。——为什么?——因为量是一样的。——你的一个朋友告诉我它躺下比直立时占用的空间更多。——他肯定只考虑了底面积,而没有考虑到高度。"

吉斯(12;6) 在2×2的底面积上重建3×3×4的模型:"它们高度上肯定不一样,然后(数了一下)。总共应该是36个木块,那就应该是9层。——你是怎么算出来是36个的?——它的长是3,宽也是3,底面积就是9,而高是4,4×9=36。"

和第3阶段相比,这些反应似乎很矛盾。在阶段4以前,儿童一直认为体积是被表面所围住的部分,也就是以边的形式所表现出来的。即使在3A阶段(而不是阶段2),儿童也能够意识到当模型的外形改变时,其内在体积是守恒的。他们仅仅是用质性方法协调了位置的分割和改变达到了这种认识:一些木块之前可能是作为长度或深度上的延伸,而现在则作为高度上的延伸,因此高度上的增加弥补了宽度或深度的减少。然而只有在阶段3B儿童才开始测量体积,即使是这时,对体积的测量也只是局限于对三维的长度的估计,而内在体积虽然得到了理解,却依然没有得到测量或计算。有时候儿童甚至会用一层木块像窗帘一样围住特定体积,并且只数这一层表面积。在阶段3时,物

体所占用的相对空间的体积还相当不稳定:这是因为经过变形的体积的表面积很容易改变,因此相对相邻物体所占用的空间会增加或者减少。然而在阶段4儿童会从边和表面积出发,并用这些测量结果来计算出体积。直到这时他们才能非常肯定地认为,不仅内在体积是守恒的,物体所占用的相对总空间也是稳定不变的。这一矛盾非常清晰:在阶段3时守恒只局限于内在体积,但是儿童既无法测量它本身,也无法从外部测量它(通过外包围的墙);到了阶段4他们意识到了体积和边界的关系,因此也能够进行测量并计算其内在体积,然而只有在这时才会把守恒扩展到它本身和其外在物体之间的关系中!

但实际上如果这一阶段的儿童最终发现了如何测量其内在体积,这只是个体不断填充边界的漫长发展过程的一个终结。在阶段3儿童所获得的物体的质性守恒是在这一发展阶段的倒数第二个阶段。当这一过程最终完成,体积的边界和体积本身会形成清晰的关系,这也让守恒概念扩展到物体所占用的空间,而不是局限于其边界。在第4阶段,对体积概念的理解在两方面进一步发展:体积现在被视为完全充满的,而且它与周围空间的关系也得到理解。实际上这不过是对之前获得的相对零碎的概念的整合。

我们在第十三章看到,儿童之所以能够获得这种新的建构,是因为获得了连续性的概念:由于在形式运算阶段(阶段4)儿童能够对空间连续体进行无限地分解和重组,因此阶段3B获得的线性组合矩阵现在可以用来构建面积和体积完全被充满的概念。因为这种连续性概念在第3阶段尚未出现,我们的被试还无法通过数量乘法计算体积本身,虽然他们能够很好地测量二维和三维的边长。在第4阶段这一线性矩阵成为一个连续体,填满了整个实心体,这也解释了儿童为何能够通过用边长相乘来计算面积和体积。数量乘法需要儿童从边界过渡到对其内在空间的认识,而逻辑乘法并不需要这种过渡。

理解了边界(或面积)和内在体积之间的关系后,儿童肯定会加深其体积守恒的概念。他们第一次发现不仅仅内在"所包含的"体积是不变的,也会发现其在较大空间里所占用的体积也是不变的。当形状得到改变时,边界的长度和体积之间的关系维持不变,而这是在阶段4获得的核心价值,并且以数量乘法的形式表现出来:$3\times3\times4=2\times3\times6=2\times2\times9=36$,等。由于从现在起儿童能够测量和计算内在体积,因此这一守恒也会扩展到其周围空间。这也解释了为何直到形式运算阶段才能获得所占用的体积的守恒(在物理学家所认为的概念意义上),因为直到这时才能通过刚获得的数量连续性概念来测量内在体积。从上一章就明显能看出这一现象,但直到这时才做出了解释。研究者频繁发现,如果不是存在无法变形的实体,这种测量也没有可能:现在我们也许可以说,在标志着儿童空间表征开始的拓扑性直觉阶段不可能获得实体概念,它是实体的数量守恒的副产品。

邱小菊译,朱莉琪审校

第十五章　欧几里得空间的建构:三个亚阶段

本卷主要包含体积的欧几里得概念和测量方法。这也是本书十四个章节和《儿童的空间概念》的第十三章和十四章的主要研究内容,在这几章分析了参照体系的发展过程。总之,我们会试图在表征水平中勾勒出欧几里得空间的构建过程。《儿童的空间概念》的最后一章(第十五章)试图厘清不同的运算发展过程,先是拓扑性的,然后是投射性的,最后是欧几里得概念。但是只有在那一章才涉及这些数量运算。因此需要简明扼要地描述其发展过程。我们不需要过多考虑太多运算的细节,而是要聚焦于当前工作所发现的欧几里得思维的两大基本机制:大小的守恒及其测量方式。

在构建欧几里得空间时,我们需要区分三个水平的发展成果。第一水平表征为在各种守恒中的质性运算,其中大多数在子阶段3A表现出来:距离和长度的守恒、面积和内在体积的守恒、传递性比较的一致性守恒,等。第二水平也许应该被称为简单数量运算的获得。它形成在水平3B:在一维、二维或者三维内测量长度、数量坐标系的建构,以及刚开始形成的对角度和面积的测量。最后一个水平是获得了计算面积和体积的能力,并且持续到阶段4,也就是形式运算阶段。只有这个阶段我们才发现儿童会采用数量乘法来协调逻辑乘法和简单测量,也只有在阶段4儿童才能获得体积相对于周围空间媒介的守恒。

第一节　亚阶段3A:从守恒的拓扑关系到初级欧几里得概念的过渡

在早期的著作《儿童的空间概念》中,我们看到儿童空间概念的发展遵循着从拓扑关系到欧几里得关系的过渡,习得了投射概念(projective notions)、关联变形(affinitive transformations)和形状相似性(similarity of shape)的发展。因此,当儿童学会使用系统化的视角,他们就可以使用序列的拓扑性概念来构建投射性的直线(《儿童的空间概念》,第六章)。随后得到发展的是平行(第十一章)和角度(第十二章)的建构。对投射概念、调和关系和相似性的建构为后来应用于欧几里得空间(《儿童的空间概念》,第十三和十四章)的坐标系统的发展奠定了基础。

然而本书更为直接地研究了拓扑关系向欧几里得关系的转变。这里我们所指的是从首次意识到位置顺序和拓扑性分解的关系到位置变化和分解的欧几里得概念的转变。这些欧几里得概念也产生了更为基础的守恒概念,比如距离长度或面积和内在体

积的守恒。我们将会在这一部分小结一下这种转变过程。

让我们先看看分散在拓扑线段上的元素(而不是包含二维或三维空间的嵌套拓扑关系):*A*点在*B*点之前,*B*点在*C*点之前,*C*点在*D*点之前,等,按照这种固定顺序着落在一条直线上;我们要知道*A*点和*B*点之间有一条线段*AB*,而这条线段短于,比如说*AD*;同样线段*BC*也比线段*AC*或者*BD*短,诸如此类。仅仅通过对调线段的方向就可以改变顶点的顺序,*DCBA*;但是却不可以通过把*ACB*变成*ABC*这样来对调顶点的顺序。同样,线段的相对关系是确定的,比如线段$AB < AC < AD$等,但是线段的绝对长度却是可变的。因此,这一拓扑结构不重视其内容的物质变化(虽然它允许一定的变化,让被试可以随意往两边移动顶点,这也是它在构建元素的直接或相反顺序时所必须要做的)。同样,这一序列并不意味着距离或者长度的守恒:唯一保持不变的是这种"介于两者之间"的关系(*B*介于*C*和*A*之间,也介于*A*和*C*之间),其次则是决定着线段之间相对大小的嵌套关系。这些初级拓扑关系也是儿童为构建变化的位置关系,进行同步,和认识距离和长度的守恒的欧几里得概念的起点。

刚开始时,儿童把位置的变化等同于排序的变化[①],它和顺序反转的唯一区别在于这种变化取决于物体顺序的变动,而不是儿童在改变物体顺序时对方向的反转。因此如果点*B*一开始在点*A*和*C*之间,后来又到了*C*的后面(*ACB*),儿童会意识到*B*和*C*的顺序对调了。但是这种对元素顺序变化的初步直觉还很难让儿童构建对位置变化的集体表征认识。即使是最原始的形式,也要到3A阶段才能发展出来,就比如我们在本书中第一章所看到的:它意味着能够使用固定参照物和距离的守恒系统,这些都是构建欧几里得空间的关键前提要素。精准的参考系、距离的守恒和位置变化的组合都在同一阶段发展出来,并共同推动了空间概念从拓扑性转化为欧几里得性概念。

这一观点表述得更为通俗易懂一点其实也就是:投射性的直线是拓扑顺序发展的结果,但是又关系到观点的系统化,因此同一种基本顺序概念,如果关系到参考系(不管在初期是如何不完善),都能够催生出距离和位置变化的欧几里得概念。

如果一条线上三个点的顺序依次是*ABC*,这条线上包含两条线段*AB*、*BC*和一条总线段*AC*。但只在两种情况下,这些线段可以说标记着端点*A*、*B*和*C*之间的距离。第一种情况是,在测量*A*、*B*和*C*三点之间的距离时,这三个点的位置不能变化。也就是说,线段*ABC*必须是固定的,而非弹性变动的。要么这三个点本身是固定的,要么即使位置发生变动,也能够通过固定的参照点来确定之前所占用的空间。因此距离概念的第一个前提意味着位置变化的概念(因为在假设距离相对不变时,我们也确信了它们没有位置变化),以及参照点的概念,因为只有这样儿童才能在必要时辨别出这些参照点和位置能够变换的可移动物体之间的稳定关系。距离概念的第二个前提是拓扑系统*ABC*的变形……变形为一条欧几里得直线。直线的投射概念(projective notion of straight line)

① 见《儿童的运动和速度概念》第三至五章。

是一系列点和一个“视角”(用于瞄准)的集合。同样,同时间出现的射线的相关欧几里得概念则是一系列点和朝向固定方向运动的趋势的集合。为了保持运动方向的稳定性,被试必须通过固定的参照系来确定后面点的位置。因此,我们又再次回到了最初的观点,也就是两个固定端点之间的距离既需要位置变化的概念,也需要使用参照系统。

就像位置的变化刚开始只是排序的变化,但到后来却要使用参照系,以及对距离决定性因素的觉知。为了建立物体和它邻近物体之间的位置关系,就需要注意到这些物体之间排序的变化。其核心在于被试需要在物体运动过程中所占据的固定“点”(包括那些清除和占据的点)之间建立关系,他必须注意到这些静态点之间的固定距离。因此,由于位置的变化概念意味着对运动轨迹的理解,所以它需要个体理解距离和参照系概念,反过来同样如此。

我们因此可以说如果没有对距离和位置变化概念的精确理解,从拓扑关系向欧几里得关系的转变也不可能实现。这些发展成果是同时出现的。虽然它们是两种质性运算,但是却相辅相成,而且都关系到固定的参照系统[①]。距离的运算是在固定参照点之间分解线段的过程,而对位置变化的运算则是根据这些距离进行排序的过程。位置变化所导致的相继距离和序列关系之间的嵌套都依赖于参照系的精确化。从心理学的角度而言,我们可以说当使用参照元素来构建拓扑性空间时,这一空间就是欧几里得式的了。因为这些元素的使用引起了两种空间现实的区分,一个是固定的“位置”,另一个则是移动物体所占用的空间。在拓扑空间里,容器(固定“位置”)和内容物(移动物体)没有区别,但是在欧几里得空间中,这种差别却非常明显。

这两种运算是第三到四章所说的距离和长度守恒的精细化的基础。两者都密切关系到固定的空间容器和可变的内容之间的根本关系。在第三章,通过分析距离概念的发展,我们看到阶段1和2的孩子不会允许空白处的线性区间完全等同于实体物的长度。距离的运算概念直到阶段3才出现,而且它依赖于空间的分解和重组,这就要求具备这两种要素。在第四章,我们还研究了儿童在看到一根直筷子跟另一根一模一样的筷子先是头尾对齐摆放在一起,后来又前后错开摆放后的反应。在阶段1和阶段2的被试会拒绝认为这两根筷子的长度依然相等,但是在阶段3他们很确定是相等的,因为这时知道一根筷子尾部多出来的长度和另一个筷子前面多出来的长度是相等的。同样,这里这种特殊情况下还无法确定是否获得了长度的守恒概念,因为作为容器的空间和所包含的实心可移动的物体还没有达到一致。后来,我们研究长度的方法变为把一条直线以一定的角度变弯,变成看起来更短的一系列线段。这样就能够控制稳定性的建构,并且观察儿童在平衡这两个互补的质性运算、部分的变化和位置改变时如何获得这种守恒。被试可以通过把部分相加来汇总各个部分并合成一个整体;也可以通过运算来改变其位置,这样就可以在不改变其总长度的情况下改变其排列顺序(第五章)。最

① 在《儿童的空间概念》,第十五章中有对这些运算的定义。

后,在研究儿童对平行但前后错开的两条等长线段位置变化的反应(第六章)时,我们可以确认在第一章所了解到的旅程表征:感觉运动阶段所获得的运动系统协调并不足以保证他们在表征水平进行充分的详细化,因为这还需要让控制顺序和位置变化的运算与参照元素发生联系,而参照系统本身就可以让被试把空的“位置”和被占用的“位置”纳入到一个整体思维框架中去。

但是需要附加说明的是,虽然儿童已经认识到在物体和参照系,或者被填满的“位置”和空“位置”之间存在联系,但这些只是所包含的空间及盛载这些空间的容器之间的关系,在这种欧几里得表征的初期阶段,尚未形成整合的坐标系,而且还没有建构起数量框架系统。不仅仅是因为这种系统不止包含一个维度,这一点会在下面进行综述,而是因为即使线性关系也只是被识别为一种质性嵌套关系,这样只会出现有限的距离比较。它们是线段ABC所包含的元素比较,儿童知道的是$AB<AC$,或者把物体A_1B_1平移到A_2B_2,移动方向是水平的,并且在不到B_1处停止(四个点的顺序是分别是$A_1A_2B_1B_2$):儿童知道线段$A_1A_2=B_1B_2$,因为对$A_1B_1=A_2B_2$的长度守恒让儿童意识到A_1A_2(撤走的距离)被替换为B_1B_2(新占用的距离),反过来也是如此。但是儿童这时候还不会测量,它要在下一个发展水平(子阶段3B)才能获得,所以儿童没有获得整体的参照坐标系,因为只有通过测量距离,儿童才能够去比较距离本身,而不受其形状、位置或者方向的影响,而不是去比较物体和它延长后所空出来的距离的长度。

我们这里可以转到在第一个质性阶段(3A阶段)所形成的面积和体积的守恒。这一发展过程本身以及从拓扑向欧几里得空间的过渡模式都和上述描述比较一致,唯一不同的是这时的内容是两维或者三维的了。从拓扑学的观点来看,面积是被封闭线段所围出来的部分,而体积只是被一个或几个面所围出来的部分,当然这些面也是封闭的。从拓扑学上来看,接下来,人们就会说到面积的嵌套结构,每一个面积都被嵌入一个更大的面积中,或者体积的嵌套结构。这里,我们又一次发现了顺序的概念,因为可以从内往外,也可以从外向内逐步审视这些嵌套结构。和线性顺序一样,我们要面对一系列嵌套区间,其大小决定于其封闭关系。因此,总体上我们可以说面积一开始是由封闭的线条所围出来的两维区间(面积是两维的,因为线条是一维的),而体积则是由封闭的面所围出来的三维区间(因此体积是三维的,因为形成体积的面是两维的)。从心理学的角度来看,我们只需要考虑儿童对面积和体积是如何从简单的拓扑概念转变为欧几里得的建构的。

我们的研究表明,这一转变需要三个阶段,而不像线性结构的建构一样只需要两个阶段。第一个阶段也表征为初级守恒形式。这能够让儿童把面积和体积视为不变的,即使其形状发生变化,因为我们应该知道拓扑空间的核心在于其大小的可伸缩性。这里守恒的获得也依赖于认识到固定(或相对固定)的参照系,以及固定的空间“容器”和移动的“内容物”(阶段3A)之间的差别。这之后则是对两维或三维测量方法的获得(水平3B),但是这种测量依然是线性的。获得这些之后儿童还无法自己测量面积和体积,

虽然它们可以让儿童对其界限进行量化。最后，在阶段4，儿童开始计算面积和体积，也就意味着他们这时能够把数量运算应用到空间的连续性上，而不仅仅是在作为标记的线段上。在实现两维和三维空间连续体的拓扑向欧几里得概念的转变时，孩子们可以说是起步于外部，并逐渐向内部延伸，因为他们开始于一个图形的边线，直到后来才能够计算这些线条所包围的空间。在这第一阶段，虽然达到了对面积和体积的初步守恒，但他们还只是从其拓扑学结构把空间看成是被边界所包围的一部分内容。然而，这些维度表现出更强的稳定性，因为儿童开始认为空间的容器本身是固定的，并以此作为参照系。但直到第二阶段面积和体积才开始欧几里得化，因为到这一阶段就没有对两或三维的线性框架的测量了。因此，直到第3阶段其内部才得到计算。然而，面积和体积的质性守恒是第一水平(3A)的特征，也非常类似于长度和距离的守恒。

这长度的守恒和面积或体积的守恒的机制几乎完全相同，唯一的区别在于前者是对线段本身的守恒，而后者则是对线段或面所围出的空间的守恒。其差别不在于守恒的发展过程本身，而在于其对象。在这种守恒中，其核心机制都在于对分解和位置变化的平衡，因此都能够认识到新占用的“位置”能够补偿位置变化所产生的空白空间。在3A阶段实现的面积和空间的守恒依然是质性的。这在面积和体积的测量上则不是问题，就像距离和长度的稳定性并不意味着它们一定要得到测量。儿童的面积和体积概念几乎等同于早期的拓扑性直觉，而唯一的新发展在于在运算意义上意识到了位置相对于其他面积和体积部分的变化。此后儿童意识到物体一部分撤出所留下的空白会被其他物体重新占用补偿。这种对补偿的意识依赖于发现当改变位置时，面积或体积的某一部分依然保持不变。但是这一发现反过来也需要认识到当某一物体的位置发生细微变化时，其后面所遗留下的空白空间恰好等同于其前面所新占用的空间。这是个循环过程，因为剩余空白空间和新占用空间之间的补偿依赖于面积和体积的不变性，尽管位置的改变以及后者(面积和体积的不变性)也依赖于对补偿的认识。但尽管是循环进行的(长度的守恒也同样如此)，这种推理过程也让儿童能够整合位置的分解和变化，因此才能意识到当物体的外形发生变化时其面积和体积是守恒的(第十一章，第十四章)。

当位置发生变化时能建立剩余的空间和填满的空间之间的联系仅仅是一个开始，而且儿童还没有形成全面的参照系，就像他还没有坐标轴的概念一样。参照系只限于直接和物体相连的部分空间，因为只有位置出现细微变化时，才能够构建出互补关系。同时，由于既没有对面积和体积的测量，甚至也没有在一维、二维或者三维空间的线性测量，因此这种协调也必然受到限制。它无法应用到整个距离，因此也无法影响到周围的面积或空间。因此可以得出适用于面积和体积的守恒的第一概念只包括界限包围之内的面积或体积，而没有延伸到被占用的空间意义上的面积和体积，这意味着所有跟形状和物体的关联(也关联到两维或三维的空白空间)。除了这一差别以外，它们和长度的守恒几乎是一样的。内在面积或体积不变性的构建和长度稳定性的构建几乎是一样的。但是作为所占用空间的面积和体积的守恒意味着进一步和整体空间容器和物体

(内容物)的关联,这样所考虑的特定物体或形状只是其中的一部分。它也意味着被试懂得如何测量围成两维或三维空间物体的线条,而且也构建着这些测量结果及其内在面积或体积的数量关系。

确实,在阶段3A儿童无法进行测量,因为他们只能够协调位置的变化和分解,对其进行互补操作,而无法把它们整合进一个单独的算法,来进行单位的迭代运算。然而,他们可以很好完成构成总体的部分的加减,因为对部分进行整合是形成面积和空间守恒的因素之一,也就是以空白空间和新增空间之间的互补为形式存在的。尤其是,当同等部分从完全相等的总体中减去时,这一水平的儿童能够意识到剩下的面积也相等(第十一章,第一部分)。在那一实验中,虽然看上去完全相反,但其实儿童并没有获得对土地面积的守恒,因为它们是占用空间的区域:只有在这些区域上建造的房子面积是守恒的,因为它们是由边界线条所围出来的内在面积。

几何推理能力主要有三大发展成果,都起源于3A阶段出现的对位置的分解和变换的能力,这也形成了欧几里得大小的守恒。首先需要考虑的是测量本身。虽然儿童还难以充分地进行测量,但能够通过质性方法进行常规的测量。换句话说,也就是虽然他们还无法使用测量单位,但是他们能够使用质性传导推断出一致性($A=B$,$B=C$,因此$A=C$),意味着通过中间量B的守恒,推出了A和C的一致性。对于长度(第二章、第五到八章)、面积(第十一章)和体积(第十四章)也是如此。

其次,平等性或者一致性关系能够被推导出来这一事实本身就足以确信"位点(loci)"运算建构过程中等距的泛化。因此,在构建圆形(第九章和第十章)时,儿童这时意识到其半径的等长性。这一认识是构建测量单位的前提。

最后,对传导性的认识让儿童能够通过初级重现规则进行推理。这一推理方式是意识到其他等距过程的基础。因此我们在第九章看到7—8岁的儿童是如何首次发现一系列到A点和B点距离都相等的点,并且进一步推理认为,所有在经过线段AB中点并垂直于AB的直线上的点到点A和点B的距离都相等。而且,他们意识到这条线的方向可以是双向的:$A \rightarrow B$或者$A \leftarrow B$。

因此,可以合理地推断出,虽然位置的分解和变化依然是一种质性运算,因为其参考的依然是直观上接近的空间结构,而不是系统的坐标系,这些是儿童最初形成守恒概念的基础,但也因此能够促进形成所有这些基本的推理方式,来构成欧几里得空间。

第二节　亚阶段3B:测量方法的成长

测量的获得,这里我们是指单位迭代,依赖于长度、面积和体积的构建,这也允许了初级守恒的出现。它也依赖于位置分解和变换的质性运算,而这些和守恒又紧密关联。因此,测量关系到位置分解与变换的亚逻辑运算,它们的关系就像数量和嵌套的层

级和序列结构之间的关系一样。但是也存在区别。数量建构出现的同时也出现了整合数（水平 3A）的逻辑运算，但是这一测量的出现晚于它的构成部分运算（constituent operations）（也就是说，这一阶段直到3B才出现）。

作为这部分的开始，我们需要谨记长度测量和位置的分解和变化运算之间的明确关系（第五、六章）。让我们假设有一条一定长度的线段C，通过运算进行分解和组合，我们能够理解这一线段可以分解成无数连续的部分，而这些部分也可以重新组合成这条原来的线段。这些部分也许可以表征为一条长度为A的线段，以及与它所相邻的另一条线段A'，共同组合为$B(=A+A')$，而B反过来也得到了最后一个部分B'的补充，共同组合成了整条线段$(B+B'=C)$。处于3A阶段的儿童理解了这种组合，因此可以进行下列推断：$A+A'+B'=C$，$B-A=A'$，$B-A'=A$，$C-B=B'$，$C-B'=B$，$C-B'-A'=A$，$C-B'-B=0$，等。他甚至能够更精细地量化这些关系。换句话说，这种量化只是来源于部分和整体的关系，而非部分与部分之间的关系：我们的被试会意识到$A<C$; $A'<C$; $B<C$; $B'<C$; $A<B$；等，而不需要知道线段A、A'和B'到底是多长。这些基本组成部分A、A'和B'之间只存在其总和加起来等于C的关系，因为它们都是C的组成部分。因此，在进行长度的守恒运算时，分解运算也许非常独立于数量运算，事实也是如此。

我们发现在对位置的变化进行质性运算时也是如此。再思考一下上面所假设的线性序列，我们也许应该注意到其基本构成部分的顺序依次是$A\ A'\ B'$。其相对位置的任何变化都仅仅是把顺序变换成了$A'\ A\ B'$或$A\ B'\ A'$，等等。同样，如果要改变整个线段C的位置，就相当于改变C相对于其参照点的位置。另一方面，对其构成部分进行的任何改变都不会影响总长度C，因为$A'+A+B'=B'+A+A'=A+A'+B'=C$。同样，线段$C$的前移并不会影响其长度。这是因为新填充的空间补偿了移动所空缺的空间。但是那种补偿也可以说是一种质性分割：通过前移，木棍C的前端延长出了C'，同时它的后面又少了C''，这也可以表示为$D—C''$。但由于位置的改变是一种物体序列的变化，新的C'和之前的C''是相等的，也就是$C'=C''$，而儿童会认为$C+C'-C''=C$就和$C+C'-C'=C$是一样的。

这些位置的分解和变换的质性运算可以同时轻易地应用于多个物体，也可以单独应用于某一个物体，这样它们才能产生乘法关系。这里的意思是儿童不需要测量，也不需要质性运算以外的能力，就能够意识到物体或者物体各部分之间的等同性。因此，我们可以把一根由A、A'和B'组成的直棍子C放在另一根棍子C_2旁边：我们会发现这两个整体是相等的$C_2=C$，其部分也是相等的：$A_2=A$; $A_2'=A'$; $B_2'=B'$；这些部分$(A_2+A_2'+B_2')$甚至也许可以应用于第三个长度$C_3(=A_3+A_3'+B_3)$以确保$C_3=C_2=C_1$，等。但这些仅仅包含了位置的改变和各个部分之间的传递性对应。也就是说，这些运算依然是质性的，因为还没有涉及单位（unit）的概念。这不需要比较某个部分和相邻部分的数量大小关系，只需要认识到任何部分都小于总体。位置的部分变化无法产生单位，因为我们所知道的是这种变化比不上位置的总体变化，而且也不知道它们和位置的其他部分变化之间是什么关

系。同样，只要我们关心的仅仅是元素之间的对应关系，而没有用数量公式 $C+C_2=2C$ 把它们结合起来，两个整体或其相应部分的相等关系就也没有包含单位的概念。最后，用同样长度的中间量 C_2 来联系 C 和 C_3 的关系，$C=C_2$，$C_2=C_3$，因此 $C=C_3$，也不需要单位概念，而只需要各个对应部分的传导性。

测量开始于通过改变位置(或者是线段本身，或者是同等长度的线段，通过传递性来进行比较)，来比较属于整体线段 C 的部分线段 A 和其余部分，这样就可以把 A 线段(或者与其等长的距离)放在其他线段之上进行比较。这就是说位置的分解和变换已经汇入了一个单独的运算过程中，而不再是互补的了。这一运算过程就是单位迭代(unit iteration)。我们上面所提到的运算包括交替使用位置的分解和变换，而非同时使用这两种方法：因此，位置的分解先于其变换，而不是在其之后，但是位置的变换本身也是独立于其分解的。这一过程可以很好地体现在总体长度的守恒上，儿童在这一过程中总是会先把整体分为部分，然后再变换其相对位置，这样部分距离就会占用其他部分的位置。这一运算并不需要这几个部分之间任何直接或间接的比较[①]。但在用部分 A 和整体 C 剩下的部分(也就是 $C-A$)对比时，这种分解过程就不是独立的了：它是由 A 本身或者与 A 相对应部分位置的改变引起的。因此实际上是用 A 比着 $C—A$，首先量出了一段 $A=A'$(这样用 $B=2A$)，然后又使 $A=A'=B'$(这样 $C=3A$)，这里的分解也离不开相应的位置变化。所以在进行测量时，我们发现位置变换的利用方式非常特别：长度 A 首先被比在一处，然后将其向前移动，使起点对到之前的终点处，如此循环进行。这样的分解完全取决于位置的变换，但是反过来也是如此，而且正是这种定性运算引起了后来的单位迭代，并且构成了测量的一部分。通过用某一部分重复地去比对某个整体，直到整体全部被比对完，我们能够有效地把整体分解为多个这一部分，而这一部分就成为一个单位。由于单位还可以被分解为更小的部分，因此任何一段长度都能够用另外一种长度来表示为整体和部分单位的关系。

非常明确的是，在第二、五和六章介绍过的阶段 3B 的被试最终已经通过融合或者说统合了位置的分解和变换运算获得了测量建构。在阶段 3A，这两种运算都会被用来形成守恒概念，但它们依然是彼此互补的，而没有被融合进一套单独的运算系统中。这种测量方法所依靠的两种定性运算首先可以说是两个完全不同的过程，但后面必须整合起来形成一个整体的运算，这一过程可以类比为另外一种过程，就是数的精化过程(elaboration of number)。这毫不奇怪，因为数量单位的迭代等同于整体的数的序列(同样，测量单位的分解也等同于数的分解)，这就像部分的分解和组合等同于嵌套的层级关系，以及最后，位置的变换等同于不平衡关系的有序化一样。因此，子逻辑运算领域的测量，就等同于逻辑运算中的数，因此数是整合的，包含了嵌套层级的逻辑整体和非对称关系的序列。唯一的差别在于整数序列在阶段 3A 就获得了，并且接下来就获得了

① 在其他地方，我们把这一运算过程称为“替代性(vicariance)”。见 *Classes, relations et nombres*, ch. IV。

这两种逻辑整体，而测量的出现则有些延迟，在守恒概念获得之后才出现。虽然它们都一样地取决于所具备的守恒概念：位置的分解和变换。我们已经尝试去表现出这种延迟的出乎预料性，因为数集可以是非常直观的，任何非连续物体几乎都包含这一特定要素，而在总长度内选取长度单位则是在连续性的整体内任意地选择一部分。

处于3B水平的儿童并不局限于线性测量，我们很快发现他们测量面积时也采用了同样的办法：他们选择了一块面积作为单位，并且有效地变化那个单位的位置（第十一章，第二部分）。但是这种同地域的测量和即将产生的能力还不同。当儿童意识到面积和其边长的关系时（例如对于长方形来说是：$2cm \times 3cm = 6cm^2$），他们就可以测量这些边长并计算面积。但是这种认识直到阶段4才会出现。在阶段3B儿童理解了二维或者三维空间的线性测量（这意味着他们能够通过两到三次彼此垂直的线性测量锁定飞机上或者体积内的一个点）。他们也可以这样测量面积——但只有在使用两维单位时。他们无法使用线性单位测量面积（area measurement）。3A阶段的儿童发现了当组成面积的各部分顺序调整了之后，其面积依然保持不变。到了水平3B，他就发现了如果得到了一个现成的单位时，可以用这一部分去一一比对其剩余的部分，这样就可以把整体表示成这一部分的方程了。因此我们看到了他是如何使用一个小正方形来测量长方形的（这个长方形刚好可以用正方形表示，没有剩余），以及他是如何把小正方形对折成三角形，来测量大三角形的，等。但是对于这一阶段的儿童来说，这个正方形单位并不等同于长度单位的二次方或“平方”，它只是一个平面物体，刚好可以被儿童通过单位的变换来分解整体，因此儿童是把它作为一种测量单位来使用的。

我们发现，这一阶段的儿童可以把一段面积划分为均等的部分，比如一个蛋糕可以被平均分为五份或六份。但是我们只有在限制了两大条件后，才能够对此进行正确地理解。首先，我们可以回忆一下在第十二章中，即使阶段3A的孩子也能够进行三等分，而儿童早在第二阶段就能够成功地进行平分。同时，我们也看到在3A子阶段的被试能够把蛋糕分成三份，然而却无法分成六份，虽然他们只需要再简单地把这三份各分成两份就行了，这应该是非常容易的，因为平分远比三等分容易多了。所以我们只好总结认为，把某一面积分为两等份或者三等份仅仅在定性意义上达到运算水平。因此，被试使用的是预期格式来对面积进行分解，但是依赖的是直觉而非精确的数量关系来决定各部分是否均等。因此，他无法均分为五份或六份，因为这就要求整合通过测量获得的各部分之间的关系。而第二条则是，我们要注意对面积的分解并不是让面积增倍的逆转（第八章）。后者要求形状的守恒，因此也意味着方形的边界和其面积之间存在关联，而只有通过数量乘法才能建立这一关系。而我们这里并不要求儿童在平分蛋糕时保留其形状，所以也并不要求建立边界和面积之间的乘法关系。要分为几部分可以简单地通过在刀数上加一来实现，而各部分之间的均等只通过一个变量（比如对于其中一角蛋糕来说可以是它的弧长或者弦长）就能确定。这就解释了为什么3B阶段的儿童就能够成功地把整体均等地分为与之形状不同的各个部分。

然而,在这一水平还无法进行体积的测量,原因并不难理解。我们无法直接通过比对来测量体积。我们可以通过比对组成特定体积的边界的线条和表面积,但是由于并没有第四维,我们无法从外面直接测量体积的里面。因此,在水平3A的儿童发现组成体积的部分发生变化后,体积依然保持不变。他可以通过定性运算、位置的分解和改变等获得这一认识,这让他在新位置上找到了原有的元素。然而他无法继续进行第3B水平才具备的对这两种运算的综合,也无法像测量长度或面积一样地直接测量体积,因为他无法用一个单位体积来衡量剩下的体积。只有在总体积所包含的是完全一样的元素,而且当这些元素完全可见(比如并排摆置的是一排或两排小正方体)时,他才能够进行有效的测量,但是当有隐藏的元素时,比如我们3×3×4的单位模型,儿童就无法完成任务了。内在体积的守恒(水平3A)和测量体积的计算(水平4)也完美地指示了对整体的定性守恒和测量运算的差别。第十四章所介绍的3B儿童所给出的答案是最有趣的:儿童量出了围成体积的面(因为只有它们能够通过比对来测量),而且似乎认为这些面的相对大小就完全等同于被其围出来的体积(这就等同于认为其厚度永远是一个单位)。

实际上,3B水平的反应是浑然一体的。只有在能够直接进行比对时,也就是说,在能够使用线性单位来测量长度和面单位来测量面积的地方,儿童才能够正确地进行测量。基于线性测量的面积或体积的计算依然还没有实现。然而,欧几里得空间的构建在很大程度上还依赖于很多其他过程。这里,我们提到的一系列在两维或三维空间内的线性测量,包含了一对一或一对多的对应关系。前者所产生的结果是以长方形坐标系形式存在的可测量的空间体系,而后者则标志着对角的测量的开始。

能够在一维内测量长度的儿童自然也能测量多维空间中的长度。一维长度和多维长度的不同从本质上来说等同于加法和乘法的差别(不管这些是逻辑的或是子逻辑的)。不管这一研究是在哪儿进行的,我们总是发现会加法运算的儿童也能够做乘法,因为逻辑乘法只是把两个或多个加法整合在一起所形成的结果。所以在构建正方形、长方形,或者甚至是平行四边形时,儿童只是在各种相等的直线中建立联系。在对这些模型进行复制时,他会仿照模型的线来搭建所对应的线,一次对照一个,或者两个。后者更为容易,因为总是会有两对平行线。在第2阶段这一建构还是根据直觉进行的,直到第3A阶段才会被转化为一种运算。这是一个用乘法组合尚处于定性阶段关系的例子,因此这就像对各部分做加法一样简单[1]。而且我们发现一旦儿童能够在一维中进行线性测量,就能够整合二维或三维空间里的测量。在3B亚阶段,儿童可以通过在某一角度进行两次或三次线性测量,确定出位于两维或三维框架内的某一点的精确位置(第七章)。在那一水平之前,我们的被试如果进行两次或者三次测量,或者只是进行了与边平行或者从区域内部指向其一角的斜线的一次测量,他们根本无法综合这些测量。

① 也见第六章,第三节和第四节,描述了儿童对平行四边形两条平行边的关系进行加工的过程。

这些测量如果成功了,可以决定面积或体积内某点的位置,但是它们绝不是对面积或体积的测量,因为其中并没有涉及数学乘法运算。它们只是一种线性测量,符合双条目表或者三条目表的结构,也就是一种逻辑乘法。确实这些测量本身是用数量表示的,因此在本质上也是定量的,但是它们是通过逻辑(更精确地说,是亚逻辑)乘法结合在一起的。为了在二维或者三维直角坐标内匹配这些测量,儿童必须建立一一对应的关系:这种匹配是一一对应的,因为这些元素在横向和纵向上都是匹配的,并且使系统整体构成了一个网格。然而,这并不是仅有的逻辑(或者子逻辑)乘法。其他还包括一对多的对应[①]。然而,事实是处于3B子阶段的儿童能够建立一一对应,而且也恰好能够建立这种一对多的对应。我们也在第九章发现,这一阶段的儿童开始通过平衡高度的增加和与顶点距离的增加来测量角。角的测量对应着相似性的概念,而且当儿童能够通过叠加来判断两个三角形是否相似时(也就是说,在亚阶段3B,见《儿童的空间概念》,第十二章),儿童就能够完成角的测量了。

事实上,处于3B亚阶段的儿童正处于使用乘法平衡各个测量结果的时期,这都是形成欧几里得结构化空间的基础。因此这些发展除了与角度的定性建构出现了惊人的一致外,其重要性还表现在让儿童构建直角坐标系成为可能。人们对此不会感到惊讶,即在阶段3B,当儿童首次掌握了一维或多维的测量方法时,他们也开始使用横向或纵向参考系来全面构建空间关系,包括两个维度、自然或人造物的位置以及其中间隔的空白空间。我们可以想想这些定性的坐标系之所以产生,是不是因为用二维或者三维框架协调了这些测量,还是因为其他原因。

然而,其真相和在所有类似问题中的发现并无不同:这两种建构是彼此依存的。没有定性建构的数量关系将是不完整的,不足以支撑测量,但同时如果缺少了数量关系,定性的建构也会"开天窗",从而变得不完整。坐标系不仅仅意味着参照轴,也意味着一种关系的全面整合。它们可以追溯到最早期的欧几里得运算。正如我们在第一部分所言,距离和长度的守恒不仅仅是指固定的参照系,也意味着移动的物体或形状,和固定的空间"容器"(这个是指有时被占用,有时没有被占用的位置或者"地点")之间的固定区分。其实,位置改变的欧几里得概念也意味着同样的系统。确实,这一系统也是形成面积和内在体积守恒,以及进行测量本身的前提条件,因为测量包含了位置的变化,而且预先假定整体及其各个分解部分的稳定。但只要系统是定性的,就还只是处于初期阶段,并且时刻受到周围所在物体的局限性。这是无法避免的,因为儿童还不能测量任何超过参考物长度的距离。当他知道了如何在一维、二维或者三维空间内进行线性测量时,就可以扩展自己的坐标系了。到目前为止,这些都是定性的,因为只涉及顺序关系的乘法,但是这时他们能够精确地测量距离和位置。因此,参照框架包括所有在考虑的空间位置。因为这种意义上的坐标系就是定量的了,所以其功能也更泛化。

---

① 见《儿童的空间概念》,第十五章。

在本书中，我们一再重申这一事实，即从心理学的角度来看，对空间的表征是否为欧几里得的取决于坐标系的建构。拓扑关系只考虑图形或者轮廓的接近性，投射性空间则涉及从所观察的物体的角度来看的坐标系，欧几里得空间则涉及物体本身所在的坐标系。现在我们知道物体是可以移动的。它们的位置不是稳定不变的(从自己的视角创建投射性空间的被试的位置也是可变的，他自己也是一个物件，置身于其他物体之中)。因此，只有通过用固定的空间"容器"来连接位置、距离和位置的变化，才能形成坐标系，这种结构才能保证让移动的"内容"在坐标系内得到正确的表征。因此，容器和内容物的区分对于欧几里得空间的表征尤其关键①。它催生出了这些坐标系，标志着从拓扑性空间向欧几里得空间的转变。

这一研究的另一特征是对各种曲线生长规律的认识。有些曲线，比如一些机械曲线，意味着两个，而非一个参考或者坐标系的重合。这里我们发现，虽然我们处于3B亚阶段的被试完全掌握了这些直角坐标系，但他们才开始在这两种坐标系间建立联系。在3B水平，儿童总是通过试误建立这种关系，直到阶段4，也就是形式运算阶段，才能够立即建立这种关系。这让我们进入欧几里得空间构建的第三个水平，来介绍面积和体积的计算。

第三节　阶段4:面积和体积的计算

我们看到了位置的变换，以及长度和距离的守恒是如何开启欧几里得空间概念的发展的。欧几里得直觉早在阶段2就开始出现了，而意味着运动着的物体和固定的参照"点"之间关联的欧几里得运算则是水平3A的特征。然而，即使在3B子阶段，它也远远没有得到完全发展。在3B子阶段存在一个明显的对立，即在线性测量中能够成功地进行欧几里得构建，但是在面积和体积领域的概念依然是拓扑性质的。儿童一旦学会了在一维空间中进行线性测量时，就能够在多维中平衡多个线性测量。我们已经看到了完整坐标系的建构实现了欧几里得空间的准确搭建，使多维线性测量的平衡成为可能。但从本质上讲这些参照系依然是线性的。直线的焦点就足以进行准确的位置定位和确定方向和距离了。但即使放在一起看，它们依然只是在各自的三维空间里的直线，而不是连续的。这就解释了为什么线性测量和面积、体积的表征在3B子阶段是不同质的。后面的概念还受到拓扑残留思想的影响，而这似乎很难被欧几里得的重构过程打破。

确实，还处于3B水平的儿童甚至也可以测量面积。同样，他们也可以测量作为飞机平面的角，因为角也可以说是被其机翼所围出来的一部分。但是面积只是通过其他

① 这一点在儿童对互补面积问题的回答中表现得特别明显，这将会在第三节提到。

比较小的单位面积来测量的，而角也只是通过用相似角的叠加来测量的。这些测量还没有包括面的维度，而只是通过线性维度进行的。它们是通过比对来进行测量的，也结合一定的数量组合方法。虽然后一方法来源于长度的数量组合，但是这两种组合在儿童的思维中通常是分离的。后来面积主要还是拓扑性的，在3B水平，儿童认为面积是被边界圈出来的一部分空间。它是稳定的，因为它遵循欧几里得守恒，保持不变。因为它和一种静态的"容器"相关联，但又无法分解为线性单位。因此这些儿童无法做到在保持形状的前提下让面积翻倍（第十三章）。通常，他们会尝试把边界的长度翻倍，但最后又惊奇地发现其面积变成了原来的4倍。他们搞不清楚为什么，主要因为无法意识到面积必须用更高阶的方程来表示。

体积的实际情况甚至更加矛盾。其"内在"体积在某种意义上是守恒的，即儿童能够意识到在某一边界线或面内的物质或元素（小木块等）是稳定不变的。同时他也开始进行测量，但是这种测量只局限于包围住内在体积的边界。但有点奇怪的是内在体积的守恒并没有带来真正的体积（即物体在周围环境中所占用的空间）的不变。儿童会意识到当他用立方体中的木块重新组合成一面长墙或者一个塔时，这并不会改变其内在体积，但依然认为其在环境中所占用的体积会变化。守恒的内在体积在儿童看来不过是二维边界所包裹的特定大小的三维空间。他无法构想任何界限和体积本身的数量关系。这里的情况完全类似于儿童在面积方面的成就，而且我们发现，儿童认为他们可以简单地通过让边界或者表面积翻倍来翻倍体积。

这就产生了一个问题，即为何在3B水平体积没有出现相对于周围空间媒介的守恒，尤其是儿童在这一水平获得了全面的参照系统和坐标轴概念。然而，虽然缺乏用坐标轴架构的空间体系确实无法产生"被占用的"空间概念，但是这并非它产生的唯一条件。儿童还必须发现边界线和边界面之间真实的数量关系，以及面和体积的真实数量关系。线条形状的变化不会影响其总长度，但是面积或体积形状的改变却会影响其总长度，或者其外表的总表面积。正是因为这些边长会变化，所以儿童认为面积也会随之变化，特别是，他们长期坚持认为被占用的体积不会在这些变形过程中保持稳定，因为边界面和边是连接体积和其周围空间的核心要素。在面积守恒的获得中也出现了类似的滞后，因为内在面积在3A水平就获得了守恒，而互补面积的守恒直到水平3B才获得。在体积上，儿童无法同时看到所有要素，因此直到他学会在物体的表面和内部之间建立明确的关系，才能从其内在体积的守恒推断出其所占用空间的守恒。

我们所说的明确的关系是指定量，而非定性的关系。它们所包含的乘法不仅仅是逻辑性的，也是数量上的。也就是说，通过让对图形边的线性测量结果相乘，我们就得到了以二次方或者三次方单位所表示的乘积。从其本身来看，乘法是一种数量关系，对更年幼的儿童也不是难题，因为我们知道儿童早在3A水平就能够理解最简单的数量乘法了。因此我们可以有理由预期，获得面积和体积的几何学有效概念所需要的只是在3B水平的空间搭建能力。但不要忘了，把两个数字相乘是一回事，而把两个边长或三

个边长相乘并意识到其乘积就是面积或体积又是另一回事了。后者包含了空间的连续性概念:面只有在被视为一系列无限的毫无间隙的线段时,才能被分解为线段。但是对空间连续性的分解和重组是在形式运算水平(《儿童的空间概念》,第五章)才能获得的运算方式。这就解释了为什么直到阶段4,儿童才能够理解他们能够简单地通过将边相乘来得到面积或体积。从某种意义上,我们可以说这种形式的乘法是在构建坐标系时,结合逻辑乘法使用数量乘法的延伸。但是这里存在明显的不同,因为这时儿童思维中的坐标系的线排布得如此紧密,以致不存在任何缝隙。因此,连续性是通过在已有的坐标系中加入数量无限的线条实现的。获得了精细的连续性概念后,儿童这时能够使用数学乘法来计算面积和体积,这种操作又能进一步让他们使用定量术语重构相关概念。这里我们看到了欧几里得空间重构的最终阶段。它所完成的阶段也就是拓扑概念本身凭借形式运算思维达到自身的平衡的阶段。

邱小菊译,朱莉琪审校

原版索引

Aebli, M. H. 艾伯利, M. H., 354

Angle, definition of 角, 对……的定义, 182, 206-208

Anticipation, intuitive 直觉预期, 267-268

-perceptual 感知的, 268

Anticipatory schema (see Schema)预期性格式, 参见格式

Area (see Conservation and Measurement) 面积, 参见守恒和测量

-doubling an 加倍, 第3章

Aristotle 亚里士多德, 231

Associativity 关联性, 25

-law of ……定理, 21

Asymmetry of distance 距离的不对称性, 79, 83

Augenmass 目测, 28

Begert-demetriade, Beatrice 白哥特-德米脆兹. 碧翠丝, 27

Belliere, N. 拜里尔, N, 226

CCS., see The Child's Conception of Space 参见儿童的空间概念

Change of order(or serial position) 顺序变化(或序列位置), 85, 97, 110

Change of position 位置变化, 第1章和第四章, 22, 27, 29-30, 31, 32, 39-40, 42, 44, 49, 55-56, 58, 59-61, 63-66, 88, 91f, 104-105, 108, 110-111, 120-121, 128, 145, 229, 254-255, 390, 398

Change of position and order of position 位置变化与位置顺序, 87, 137, 148

-synthesis of... 的综合, 125, 160, 170, 177, 188, 292

Change of position and subdivision, coordination of 位置和切分的变化, ……的协调, 115, 120, 125, 137, 146-148, 172, 286

-operational 运算性的, 60

-qualitative 定性的, 146-147

Change of position and subdivision, synthesis of 位置和切分的变化, 的综合, 33, 63, 122-123, 140-141, 145, 172, 186, 292, 302, 380, 400

Children's Conception of Number, The 儿童的数概念, 59, 74, 102, 266, 278, 308, 309-310, 349

Children's Conception of Reality, The 儿童的现实概念, 6, 7, 13

Children's Conception of Space, The 儿童的空间概念, 3–5, 7, 9–10, 14, 16, 19, 21–3, 25, 29–30, 41, 48–50, 61, 66, 69–70, 72, 74, 78, 85–87, 90, 98, 153, 155, 155, 160–161, 168, 173, 176, 179–180, 182, 187, 198, 207, 210, 221, 224, 227, 252, 254, 256, 272, 281, 286, 290, 292, 309–310, 326, 338, 345–346, 348–349, 389–390, 392, 403–404, 408

Classes 集合, 326, 333, 348

Classes, complementary 补集, 307–308

Classes, relations et Nombres 数的集合与关系, 208, 349, 399

Comparaison visuelle des hauteurs a distance variable dans le plan fronto parallele, La, 28, 36

Comparison, analytic 比较, 分析, 33

–perceptual 感知的, 40–41, 43, 298

–visual 视觉的, 33, 43

Composition, operational 成分, 运算性质的, 124–125, 270–272, 281

–transitive 传递性组合, 122

Conservation 守恒, 66, 68–69, 72, 86, 100–102, 112, 116, 254, 330–331, 389

–intuitive 直觉的, 101

–qualitative 质量的, 147

Conservation of area 面积守恒, 第11章, 273f, 345, 389, 394f

–operational 运算性的, 284f

Conservation of distance 距离守恒, 39, 66, 70–72, 81–83, 128, 389–390

Conservation of overall distance 总距离的守恒, 83

Conservation of length 长度守恒, 第5章, 27, 32, 38–39, 48, 55, 66, 69, 90–91, 95, 100–103, 104f, 128, 147, 389, 393

Conservation of volume 体积守恒, 第14章, 357f, 394f

Conservation of interior 内在体积的守恒, 374f, 384, 389, 396

Conservation of the whole 整体守恒, 326f

Continuity and formal reasoning 连续性和形式推理, 353

Coordinate system (or reference system)参照系统, 坐标系 22–23, 26–29, 39–49, 58, 63–66, 70, 87, 91, 103, 105, 128, 153, 159, 164, 172, 175, 245, 254–255, 286, 345, 348

Coordination 协调, 256, 291, 294, 346

Coordination, egocentric 协调, 自我中心, 6

–objective 客观的, 6, 19, 25

–partial 部分的, 21, 59

Correspondence, one-one and one-many 一一对应和一对多的对应, 173, 182, 191,

206-8
Curves of movement, representation of 运动曲线的表征,第10章
Delacroix, H. 德拉克洛瓦,H.,47
Developpement des quantites chez l'enfant, Le, 10, 102, 274, 278, 354, 358, 375
Developpement de la notion du temps chez l'enfant, Le, 83
Displacement, see Change of Position 置换,参见位置变化
Displacement volume 置换体积,383
Distance 距离,第3章
Du Pasquier, L. 杜. 帕斯奎尔,L.,261
Emplacement, see site 放置,参见地点
Euclidean space 欧几里得空间,69,254,404-405
Evolution des comparaisons de longeurs de l'enfant a l'adulte, L',29,39,47
Fractions 部分,309f
Galusser, Ursula 格鲁瑟.乌苏拉,173,209,226,336
Gestalt 格式塔,309
Horizontality 水平状态,161
Imagery 图像,245(也可参见直觉)
Imitation 模仿,31-32,65
-automatic 自动的,47
-object 物体,31
Inhelder, B. 英海尔德,B.,274,278,354,358,375
Insight 洞察力,126
Intelligence 智慧,307-308,337
-sensori-motor 感觉运动智慧,37
Intuition 直觉,73,137,266-267,270,341
-articulated 联结式,188,255,267,311
-perceptual 知觉式,157,159
Intuition and imagery 直觉与意象,32,245,256
Intuition and perception 直觉与知觉,32
Iteration (see also Recurrence, Principle of) 迭代,221-222,225(也可参见重现原则)
Judgment and Reasoning in the Child 儿童的判断与推理,308
Lambercier, Marc 朗伯西尔·马克,28,36,61,371
Language 语言,37
Loci, geometrical 几何轨迹,第9章,235
Logical multiplication 逻辑乘法,169,349,389,403,407

Mallet, M.R. 玛丽特, M. R., 226

Matthey, Ch. 马修, Ch., 173

Measurement 测量, 3–4, 27–29, 32, 36–37, 54–57, 61–62, 64, 66–67, 69–70, 85, 90, 105, 128, 137, 142, 144, 146, 275, 399–400

Measurement, angular 角的测量, 152, 第8章, 173f, 187

–curvilinear 曲线的测量, 209

–operational 运算性测量, 28, 56, 142f

–perceptual 感知的测量, 28–30

–visual 视觉的测量, 28

Measurement, one dimensional (or linear) 单位或线性的测量, 149, 154–155, 175, 177, 187–186, 341, 400f

–two–dimensional 二维的测量, 第7章, 153f, 177, 182

–three–dimensional 三维的测量, 155, 169f

Measurement of area 面积的测量, 第11章, 273f, 292f, 401f

Measurement of length 长度的测量, 第5章, 第6章

Measurement of the sum of the angles of a triangle 三角形角度之和的测量, 195f

Measurement of a triangle 三角形的测量, 184f

Measurement of volume 体积的测量, 第14章, 406f

Metrics 度量, 1, 123, 145

Meyerson, E. 梅耶森, E., 330

Movement 运动, 231, 235f, 242, 256

Muller, Gisella 缪勒.吉塞拉, 3

Muller, L. 缪勒.L, 173

Muller, M. 缪勒.M, 302

Multiplication of relations, logical and mathematical 逻辑与数学关系的乘法, 345–353, 389

Nicolas, J. 尼古拉斯, J., 226

Non–conservation 非守恒性, 100, 122, 274, 378

Non–conservation of distance 距离的非守恒性, 79–80, 341

Non–conservation of length 长度的非守恒性, 80, 95, 97–98, 112, 116, 120, 341

Notions de mouvement et de vitesse chez l' enfant, Les, 儿童的运动和速度概念, 3, 13, 21, 24, 42, 55, 66, 75, 78, 80, 83, 87, 97, 108, 111, 129–130, 231, 236, 267, 341, 390

Nostebescu, M. D., 诺斯贝克, M.D 173

Number 数字, 149, 310, 400

Object, symbolic 象征性的客体,32,65
Odiniak, C. 欧迪纳克 C.,173
Operation 运算,330
Operational grouping 操作分组,23
Operations, concrete 具体运算,204,221
Order of position 位置顺序,(see also Change of position)见位置的变化,170,172
Origine de 1a pensée chez l'enfant, L'儿童思想的起源,10

Parallelism 平行线,49,181
Part-whole relations 部分整体关系,30,12,327
Perception 感知,31,33,39,65,70,100,156,176,266-8,330
-intuitive 直觉的,144
Pitsou, F. 皮德孙,F,354
Pitsou, H. 皮德孙,H,261
Placement, see Order of position 放置见位置的顺序
Play, Dreams and imitation in Childhood 儿童的游戏、梦与模仿,7,47,50,75
Poincaré, H 庞加莱,H.,221,225
Positional changes, see Change of position 位置的变化,见位置的改变
Princigalli, Mlle 柏林斯卡里,米尔,353
Psychology, educational 教育心理学,337
-genetic, 基因心理学,337
Psychology of intelligence, The 智慧心理学,54

Reasoning 推理,144,194-195,200,206,221,268
-formal 形式推理,204,349-353,408
Recurrence, principle of 循环原则,221-222
Reference system, see Coordinate system 参考系,见坐标系
Relations, topological and Euclidean 拓扑学的和欧几里得空间的关系,310,368-369,389 f.
-symmetrical and asymmetrical 对称的和非对称的关系,85-86
-logical and sub-logical 逻辑的和亚逻辑的关系,25,334
Reversibility 可逆性,268,330-331
Schaffrin-Kersten, Mme. Renate 沙弗林-科斯腾·雷纳特,128,153
Schema, anticipatory 预期的格式,169,303-306,314,319,332

-egocentric 自我中心的格式,83
-Euclidean 欧几里得的格式,10
-formal 形式的格式,308
-operational 运算的格式,168
-sensori-motor 感知运动格式,36
Sensori-motor level 感知运动水平,25
Separation,angular 角度的间隔,178,190
Sites 位置,80,103-104,279,290,392,395
Subdivision 细分,(see also Change of position) 见位置的变化部分,30,32,56,61,63,104-105,110-112,114-116,121,127,137,144-145,148-149,160,164,310f.,331,333 f.,348-350,398
Subdivision,intuitive,直觉的细分,120,122,128
Subdivision of areas,ch. 12 面积的细分,第12章
-space 空间的细分,333
Sub-Logical grouping,25 (see also Relations) 亚逻辑分组,也见关系,25
Symbolic object 象征性客体,50,65
Syncretism 汇合,33
Synthesis 综合,58,61
Szeminska,A. 斯泽明斯卡,A.,102,278,349

Thinking,intuitive 直觉的思维,50,329
-operational 运算的,6,50,149,157,408
-symbolic 符号的 47
Topological intuitions 拓扑直觉,102,279,345,395
- relations 拓扑关系,88-90,310,389-397
Transfer 迁移,28-30,36,38,221
-body 身体迁移,31-32,46,48-50,61,64-65,120,146
-intuitive 直觉的,54,58,65
-manual 手动的,31,33,37,40,42-44,47-48,61 ;64-65,120,280
-operational 运算的,32
-perceptual 知觉的,58
-temporal 暂时的,36
-visual 视觉的,31,34-38,40-41,44,47-50,61,64-65,120,280
Transitivity 传递性,54,117,123-128,142,146-147,284,293-295
Transposition 调换位置,36-39

Transposition's perceptives et transitivité operatoire dans les comparaisons en profondeur 感觉传递的迁移和运算的深入比较

Tsien, Lily c.塔斯恩,莉莉.c 104

Unit iteration 单位的迭代,62,122-123,145,296,341,344

Visual estimation 目测,61,168

Volume, see Conservation and Measurement 体积,见守恒和测量

Volume, notions of 体积;363,394

-interior 内在体积,360,371f.,385,396

-occupied 占用体积,360,382

Wallon, H. 瓦隆,H.,10

Würsten, H. 伍斯顿,H,29,39,47,175